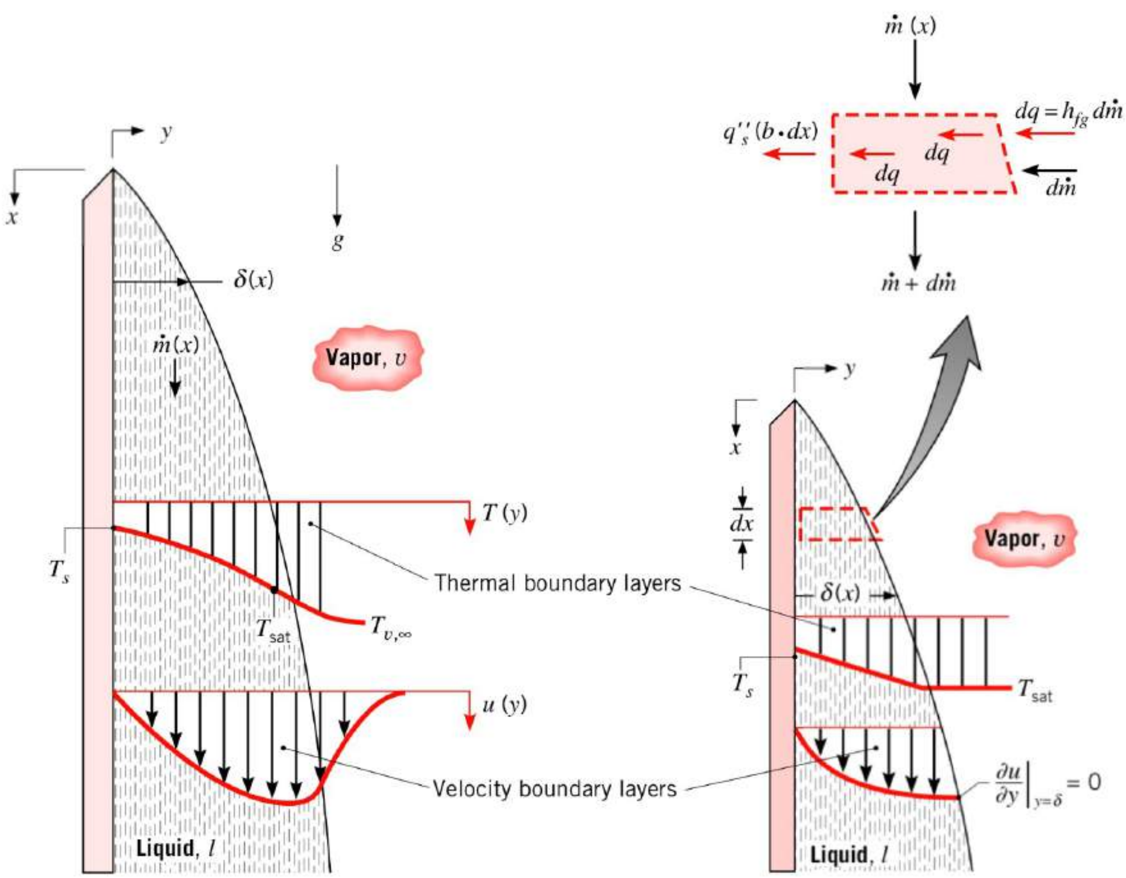
Análise de Nusselt

Condensação em filme laminar sobre uma placa vertical.



real

camada-limite térmica e de velocidade

aproximada

Análise de Nusselt

1) escoamento laminar e propriedades constantes no filme líquido;

2) a fase gasosa é considerada como vapor puro com temperatura uniforme $T = T_{sat}$. Transferência de calor pode ocorrer na superfície líquido-vapor apenas por condensação e não por condução a partir do vapor.

3) a tensão de cisalhamento na interface líquido-vapor $(y = \delta)$ é desprezível.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$$

4) transferência de quantidade de movimento e energia por advecção no filme condensado é desprezível. Esta hipótese é válida para velocidades do filme baixas. Com isso a transferência de calor ao longo do filme ocorre apenas por condução, ou seja, sua distribuição é linear.

Conservação da quantidade de movimento

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_l}{\rho_l}\left[\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}\right] + g_x$$

$$\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}} = \cancel{-\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial p}{\partial y}} + \cancel{\frac{\mu_l}{\rho_l}}\left[\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right] + \cancel{g_y}$$

$$\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial w}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial w}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial w}{\partial z}} = \cancel{-\frac{1}{\rho_l}\frac{\partial p}{\partial z}} + \cancel{\frac{\mu_l}{\rho_l}}\left[\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right] + \cancel{g_z}$$

- considerando o vapor em repouso $(y > \delta)$, $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_\infty}{dx} = \rho_G g$ ← teoria de camada-limite
- gradientes normais à superfície são muito maiores que gradientes ao longo da superfície, pois a espessura da camada limite é relativa pequena quando comparada ao tamanho do objeto a partir do qual ela se forma.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_\infty}{dx} = \rho_G g$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_L}\rho_G g_x + \frac{\mu_L}{\rho_L}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\rho_L}{\rho_L} g_x$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g_x}{\nu_L}\frac{\Delta\rho}{\rho_L} \qquad \text{onde } \Delta\rho = \rho_L - \rho_G$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L - \rho_G)$$

- Integrando a equação:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L - \rho_G)$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L - \rho_G)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} d\left(\frac{du}{dy}\right) = \int_{y_0}^{y=\delta} -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L - \rho_G)\, dy$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L - \rho_G)\,y + C_1 \longrightarrow \int_{x_1}^{x_2} du = \int_{y=0}^{y=\delta} -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\,y\,dy + \int_{y=0}^{y=\delta} C_1\,dy$$

$$u(y) = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

- aplicando as condições de contorno:

$$u(y=0) = 0 \longrightarrow u(0) = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\frac{0^2}{2} + C_1 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=\delta} = 0 \longrightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\,y + C_1 = 0$$

$$C_1 = \left.\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\,y\right|_{y=\delta}$$

$$C_1 = \frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\,\delta$$

- resultando em:

$$u(y) = -\frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\frac{y^2}{2} + \frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\,\delta y$$

$$= \frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L-\rho_G)\left[\delta y - \frac{y^2}{2}\right]$$

- o fluxo de massa 2D $\dot{m}$ por unidade de comprimento L:

$$\dot{m} = \int_S \rho_L u \, n \, dA = \int_{y=0}^{y=\delta}\int_{z=0}^{z=L} \rho_L u \, dz \, dy = \int_{y=0}^{y=\delta} \rho_L u \, L \, dy$$

$$\frac{\dot{m}}{L} = \int_{y=0}^{y=\delta} \rho_L \frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L - \rho_G)\left[\delta y - \frac{y^2}{2}\right] dy$$

$$= \rho_L \frac{g_x}{\mu_L}(\rho_L - \rho_G)\left[\delta \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{y=\delta}$$

$$= \rho_L \frac{g_x}{\mu}(\rho_L - \rho_G)\frac{\delta^3}{3}$$

$$= \frac{\rho_L g_x(\rho_L - \rho_G)\delta^3}{3\mu_L}$$

- para calcularmos a espessura da camada limite, procuramos encontrar a diferencial do fluxo de massa $\frac{\dot{m}}{L} \longrightarrow d\left(\frac{\dot{m}}{L}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\dot{m}}{L}\right) = \frac{\rho_L g_x(\rho_L - \rho_G)}{3\mu_L}\frac{d\delta^3}{dx}$$

$$\frac{1}{L}\frac{d\dot{m}}{dx} = \frac{\rho_L g_x(\rho_L - \rho_G)}{\mu_L}\frac{\delta^2 d\delta}{dx}$$

Conservação de energia (temperatura)

~~taxa de acumulação de energia dentro do volume por unidade de tempo~~ + ~~fluxo líquido de energia atravessando a fronteira do volume~~ = $\cancel{\dot{W}} - \dot{Q}$

$\dot{Q} \rightarrow$ fluxo de calor

$\dot{Q} \rightarrow$ ~~geração~~

fluxo de calor $= 0 \xrightarrow{\text{forma diferencial}} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = 0 \therefore \vec{q} = \text{cte}$

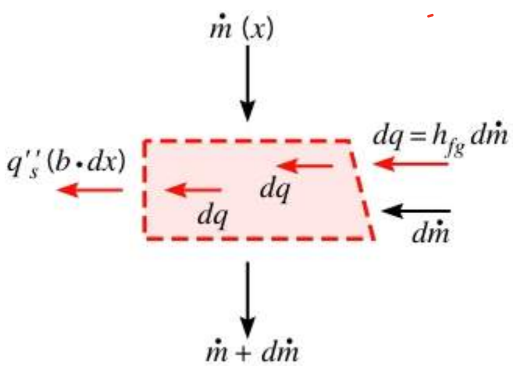
$$\vec{q}_{entra} = \vec{q}_{sai} \longrightarrow \vec{q}_{latente} = \vec{q}_{condução}$$

- camada-limite térmica linear: $\partial T / \partial y = \Delta T / \Delta y$

2-dimensões

$$h_{fg}\, d\dot{m} = \vec{q}_s\,(L \cdot dx)$$

$$\frac{1}{L}\frac{d\dot{m}}{dx} = \frac{\vec{q}}{h_{fg}}$$



$$\vec{q}_s = \frac{k_l\,(T_{sat} - T)}{\Delta x} = \frac{k_l\,(T_{sat} - T)}{\delta}$$

$\hookrightarrow$ lei de Fourier

- igualando $\frac{1}{L}\frac{d\dot{m}}{dx}$ e substituindo $\vec{q}_s$:

$$\frac{k_L}{h_{fg}\,\delta}\,(T_{sat} - T) = \frac{\rho_L\, g\,(\rho_L - \rho_G)\,\delta^2\, d\delta}{\mu_L\, dx}$$

$$\int_{\delta=0}^{\delta} \delta^3 \, d\delta = \frac{k_L \mu_L (T_{sat} - T)}{g \rho_L (\rho_L - \rho_G) h_{fg}} \int_{x=0}^{x} dx$$

$$\delta(x) = \left[4 \, \frac{k_L \mu_L (T_{sat} - T) x}{g \rho_L (\rho_L - \rho_G) h_{fg}} \right]^{1/4}$$

- substituindo $\delta(x)$ na equação do fluxo de massa $\frac{\dot{m}}{L}$:

$$\frac{\dot{m}}{L} = \frac{\rho_L g \times (\rho_L - \rho_G) \delta^3}{3 \mu_L} = \frac{\rho_L g \times (\rho_L - \rho_G)}{3 \mu_L} \left[4 \, \frac{k_L \mu_L (T_{sat} - T) x}{g \rho_L (\rho_L - \rho_G) h_{fg}} \right]^{1/4}$$