Fenômenos de Transferência – FEN/MECAN/UERJ

Prof° Gustavo Rabello – 2° período 2014 – lista de exercícios – 06/11/2014

Análise Vetorial

1. Demonstrar as seguintes identidades vetoriais, onde **A**, **B** e **C** são vetores:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= -\mathbf{B}\times\mathbf{A}\\
(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C} &= \mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}\\
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\times\mathbf{B}+\mathbf{A}\times\mathbf{C}\\
\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\\
\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\\
(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})
\end{aligned}
$$

2. Demonstrar as seguintes identidades vetoriais, onde **A**, **B** e **v** são vetores, ϕ, f, g e ρ são funções escalares e S, um tensor de segunda ordem:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{rot}\,(\,\mathbf{grad}\,\phi) &= 0\\
\mathbf{div}\,(\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) &= 0\\
\mathbf{div}\,(f\,\mathbf{grad}\,g-g\,\mathbf{grad}\,f) &= f\nabla^2 g-g\nabla^2 f\\
\mathbf{rot}\,(\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) &= \mathbf{grad}\,(\,\mathbf{div}\,\mathbf{v})-\nabla^2\mathbf{v}\\
\mathbf{div}\,(\rho\mathbf{v}) &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\rho+\rho\,\mathbf{div}\,\mathbf{v}\\
\mathbf{div}\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{B}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{B}\\
\mathbf{rot}\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \mathbf{A}\,\mathbf{div}\,\mathbf{B}-\mathbf{B}\,\mathbf{div}\,\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{grad}\,\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{grad}\,\mathbf{B}\\
\mathbf{rot}\ (f\mathbf{A}) &= f\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A}+\,\mathbf{grad}\,f\times\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

3. Mostrar que o produto $T_{ij}S_{ij}=0$ se T_{ij} for o elemento geral de um tensor simétrico e S_{ij}, o de um tensor anti-simétrico.

4. O operador $\partial^2/\partial x_i\partial x_j$ é simétrico ou anti-simétrico?

5. Seja o vetor $\mathbf{w}=\mathbf{n}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{n})$, onde **v** é um vetor arbitrário e **n**, um vetor unitário. Em que direção **w** aponta e qual é sua magnitude?

6. Seja os vetores $\mathbf{u}=(3;2;-7)$, $\mathbf{v}=(4;1;2)$ e $\mathbf{w}=(6;4;-5)$. Os vetores **u** e **v** são perpendiculares ente si? Qual é a magnitude de **v** e **w**? Qual o ângulo entre esses dois vetores? Qual é a projeção de **u** na direção de **w**?

Derivada Material

1. Mostrar que:

(a) $\dfrac{D}{Dt}(f+g) = \dfrac{Df}{Dt} + \dfrac{Dg}{Dt}$

(b) $\dfrac{D}{Dt}(\alpha f) = \alpha \dfrac{Df}{Dt}$

onde $f = f(t,x,y,z)$, $g = g(t,x,y,z)$ e α é um número.

2. Mostrar que:

$$\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\frac{v^2}{2}$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t,x,y,z)$ e $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

3. A temperatura dentro de um túnel varia na forma:

$$T = T_0 - \alpha e^{-x/L} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{\tau}$$

onde T_0, α, L e τ são constantes e x é medido a partir da entrada do túnel. Uma partícula move-se com velocidade $v_x = U_0 \cos(2\pi t/\tau)$ dentro do túnel. Determinar a taxa de variacão de temperatura da partícula.

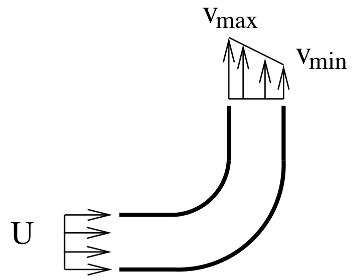
4. A temperatura T do ar em uma região da atmosfera é dada por:

$$T = \theta_0 \left(\frac{2x}{d} + \frac{3y}{d} + \frac{t^2}{t_0^2} \right)$$

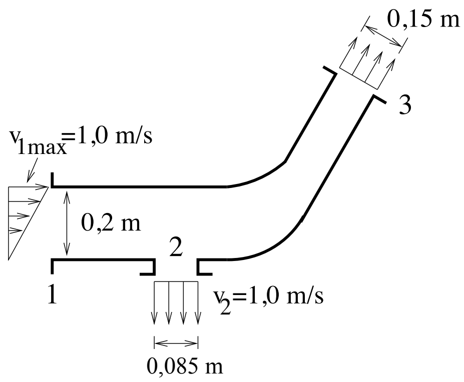
A velocidade do vento é dada por $v_x = U(1 + x/d)$, $v_y = U(1 - y/d)$ e $v_z = 0$. Os parâmetros θ_0, U, d e t_0 são constantes. Determine a taxa de variacão da temperatura de uma partĩcula de fluido localizada em $x = 2d$, $y = 3d$, quando $t = 2\,t_0$.

Conservação de Massa

1. Água entra em um canal bi-dimensional de largura constante $h = 100\,mm$, com velocidade uniforme U. O canal faz uma curva de 90°, que distorce o escoamento, de tal modo que o perfil de velocidades na saída tem a forma linear mostrada na figura ao lado, com $v_{max} = 2,5\,v_{min}$. Determinar v_{max}, sabendo que $U = 5\,m/s$.

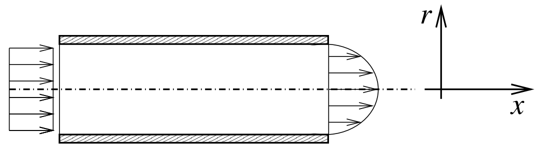


2. Uma curva redutora de um conduto com seção transversal retangular opera conforme o esquema ao lado. O perfil de velocidades varia ao longo da entrada (secão 1) de forma linear e é uniforme nas seções 2 e 3. Determinar a magnitude e sentido da velocidade na seção 3.



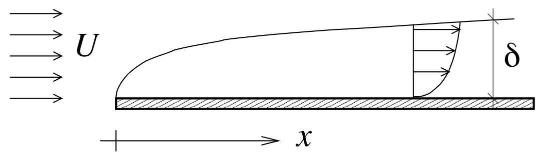
3. Água escoa em regime permanente através de um tubo de seção transversal circular e raio $R = 3\,m$. Calcular a velocidade uniforme U na entrada do tubo, sabendo que a distribuição de velocidades na saída é dada por:

$$v_x = V_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$
$$V_{max} = 3\,m/s$$



4. Uma aproximação para a componente v_x da velocidade em uma camada-limite bi-dimensional, permanente e incompressível que se forma sobre uma placa plana é dada pela forma:

$$\frac{v_x}{U} = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$



com $v_x = 0$ na superfície da placa ($y = 0$) e $v_x = U$ em $y = \delta$, onde $\delta = cx^{1/2}$ e c é uma constante. Obter uma expressão para v_y.

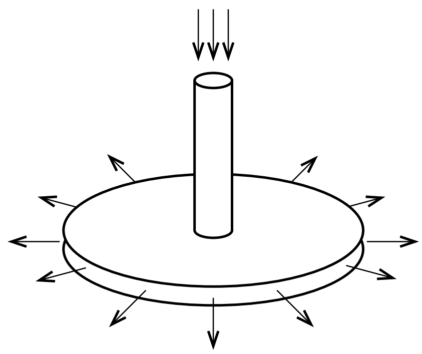
5. O campo de velocidades de um fluido é apresentado por $\mathbf{v} = (Ax+B)\,\mathbf{i}+Cy\,\mathbf{j}+Dt\,\mathbf{k}$, onde $A = 2\,s^{-1}$, $B = 4\,ms^{-1}$e D$=$ $5\,ms^{-2}$ e as coordenadas são medidas em metros. Pede-se:

   - Sendo o escoamento incompressível, determinar o valor de C;
   - Calcular a aceleração de uma partícula que passe pelo ponto $(x, y) = (3, 2)$.

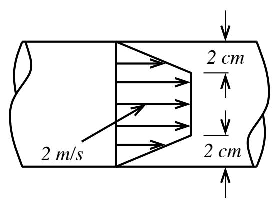
6. Verificar se os campos de velocidade abaixo correspondem a fluidos compressíveis ou não:

   - $\mathbf{v} = (y\ln x + 3xy^2 - xz^2)\,\mathbf{i} - (y^2/(2x) + y^3)\mathbf{j} + z^3/3\,\mathbf{k}$
   - $\mathbf{v} = x\text{sen}\,y\,\mathbf{i} + y\,cosx\,\mathbf{j}$

7. Água ($\rho = 995\,kg/m^3$) escoa em um tubo vertical de raio $R_1 = 25\,mm$, com velocidade de $6\,m/s$. O tubo é conectado ao espaço compreendido entre duas placas paralelas, espaçadas de $5\,mm$ entre si. Nesta região, a água escoa radialmente. Calcular a velocidade do escoamento em um raio $R_2 = 60\,mm$.



8. Água ($\rho = 995\,kg/m^3$) escoa em um tubo de diâmetro $d = 80\,mm$, com perfil de velocidades conforme mostrado na figura ao lado. Calcular a vazão em massa e o fluxo de quantidade de movimento através de uma seção transversal do tubo.



9. A componente tangencial de um escoamento incompressível com simetria axial é dada por:

$$v_\theta = \left(10 + \frac{40}{r^3}\right)\text{sen}\,\theta$$

Determinar $v_r(r,\theta)$ e **rot v** sabendo que $v_r(2,\theta) = 0$. O operador rotacional é dado pela expressão abaixo, em coordenadas cilíndricas:

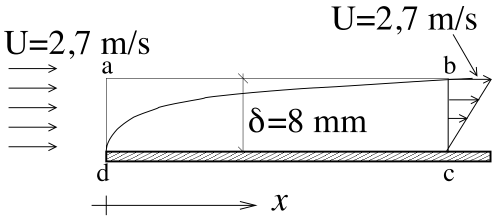
$$\mathbf{rot\,v} = \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)\mathbf{e_z}$$

10. Um fluido incompressível com massa específica ρ escoa em regime permanente, em um tubo de raio R. O perfil de velocidades é dado por:

$$v_z(r) = \frac{-dp/dz}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)$$

onde $p = p(z)$ é a pressão na seção transversal de coordenada z, dp/dz, uma constante e μ, a viscosidade do fluido. Calcular os fluxos de massa, quantidade de movimento e energia cinética através da seção transversal do tubo.

11. Ar ($\rho = 1,02\,kg/m^3$) escoa sobre uma placa plana delgada com $1,0\,m$ de comprimento e $0,30\,m$ de largura. A velocidade do ar antes de atingir o bordo de ataque da placa é uniforme ($U = 2,7\,m/s$). Ao atingir a placa, o escoamento desenvolve uma camada limite em que o campo de velocidades é independente de z e tal que:



$$\frac{v_x}{U} = \frac{y}{\delta}.$$

Usando o volume de controle *abcd* mostrado na figura ao lado, determinar a vazão em massa através da superfície *ab*.

Conservação de Quantidade de Movimento

1. A componente de velocidade v_y de um escoamento bi-dimensional, estacionário e incompressível, de um fluido newtoniano é dada por $v_y = e^{-2y}\cos x$. Determinar a componente v_x da velocidade e o gradiente de pressões, desprezando-se a força gravitacional.

2. O campo de velocidades incompressível de um escoamento de água é dado por $\mathbf{v} = (Ax + By)\mathbf{i} - Ay\,\mathbf{j}$, onde $A = 1\,s^{-1}$ e $B = 2\,s^{-1}$ e as coordenadas são medidas em metros. Determinar a magnitude e o sentido da aceleração de uma partícula no ponto $(x,y) = (1,2)$ e o gradiente de pressão no mesmo ponto. Massa específica da água: $\rho = 993\,kg/m^3$. Viscosidade dinâmica da água: $\mu = 1,0 \times 10^{-3} Ns/m^{-2}$.

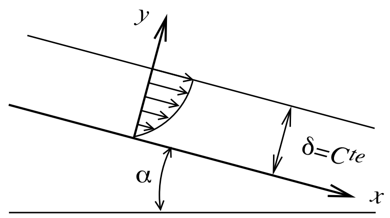
3. O campo de velocidades dado por:

$$v_r = 10\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)\operatorname{sen}\theta \qquad v_\theta = 10\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\cos\theta \qquad v_z = 0$$

representa um possível escoamento incompressível? Em caso afirmativo determine o gradiente de pressão desprezando efeitos viscosos e gravitacionais.

4. A componente radial de um escoamento incompressível é dada, no plano (r, θ) por $v_r = -A\cos(\theta/r^2)$. Determinar uma solução possível para a componente v_θ, o gradiente de pressões e calcular o $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$.

5. Calcular a vazão e os fluxos de quantidade de movimento e de energia cinética por unidade de comprimento na direção z, de uma lâmina de fluido com espessura δ, que escoa sobre uma placa plana conforme figura ao lado. A massa específica do fluido é ρ. O campo de velocidades é dado por:



$$\mathbf{v} = \frac{g\mathrm{sen}\,\alpha}{\nu}\left(y\delta - \frac{y^2}{2}\right)\mathbf{i}$$

Calcular o perfil de velocidades se a viscosidade do fluido variar ao longo da direção y segundo a lei $\mu = \mu_0\,(1 + y/\delta)$.

6. O número de Reynolds crítico para a transição laminar-turbulento em tubos é $Ud/\nu = 2000$. Qual é o valor crítico da velocidade U em tubos de diâmetro $d = 6\,cm$ e $d = 60\,cm$ para:

	T (K)	$\mu\,(Ns/m^2)$	$\rho\,(kg/m^3)$
água	300	855×10^{-6}	1017
Ar	300	$18,46 \times 10^{-6}$	0,861
óleo lubrificante	350	$3,56 \times 10^{-2}$	853,9
Etilenoglicol	350	$0,342 \times 10^{-2}$	1079

7. As equações da continuidade e de Navier-Stokes para o escoamento bi-dimensional de um fluido incompressível são:

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\mathbf{v} &= 0\\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p + \nu\,\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$. Mostrar que este sistema pode ser reduzido à forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nu\nabla^2\boldsymbol{\omega} \qquad\qquad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Sugestão: Derivar a equação de v_y em relação a x, a de v_x em relação a y, subtrair uma da outra, utilizar a equação da continuidade e a definição de $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$.

8. Escrever as equações de Euler (sem viscosidade) e de Navier-Stokes (viscosidade cinemática constante) sem a pressão, utilizando a notação tensorial cartesiana; Nos casos em que a viscosidade cinemática não é constante a Conservação de Quantidade de Movimento angular em sua forma diferencial toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\,\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{rot}\,\mathbf{v}) + \mathbf{rot}\,\left[\mathbf{div}\,\nu\left(\mathbf{grad}\,\mathbf{v} + \mathbf{grad}^{\,T}\mathbf{v}\right)\right].$$

Reescrever essa equação na forma tensorial cartesiana.