

ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE BIOCOMBUSTÍVEIS EM UM  
MEIO POROSO

Daniel Moreira Spesani

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro

Agosto de 2023



*UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO*

**Politécnica**  
UFRJ

**Escola Politécnica**

Departamento de Engenharia Mecânica

ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE BIOCOMBUSTÍVEIS EM UM  
MEIO POROSO

Daniel Moreira Spesani

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

---

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, Ph.D.

---

Prof. Gustavo Cesar Rachid Bodstein, Ph.D.

---

Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

AUGUST DE 2023

Moreira Spesani, Daniel

ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE  
BIOCOMBUSTÍVEIS EM UM MEIO POROSO/ Daniel  
Moreira Spesani. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola  
Politécnica, 2023.

XIX, 97 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/  
Curso de Engenharia Mecânica, 2023.

Referências Bibliográficas: p. 68 – 70.

1. Análise Numérica.
  2. Mecânica dos Fluidos.
  3. Biocombustíveis.
  4. Meio Poroso.
- I.  
Rabello dos Anjos, Gustavo. II. Universidade Federal do  
Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica.  
III. ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE  
BIOCOMBUSTÍVEIS EM UM MEIO POROSO.

*“If I have seen further it is by standing on the shoulders of Giants.” - Isaac Newton.*

*“The best way to predict the future is to invent it.” - Paul Dirac.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à minha mãe, Luciene, que, apesar de todas as adversidades da vida e das dificuldades de criar dois filhos sozinha, me apoiou e guiou ao longo dessa jornada. Sem você eu não estaria aqui. Obrigado por tudo.

Agradeço ao meu orientador, Gustavo Rabello dos Anjos. Sua excelente didática e amor pela profissão despertaram em mim o interesse pela área de mecânica dos fluidos computacional. Além disso, todo o seu amparo como orientador foi essencial em minha formação como profissional da engenharia mecânica.

Agradeço a minha companheira de vida, Ana Julia. Nesses últimos anos você foi, e continua sendo, um dos motivos para eu continuar, sempre me auxiliando e me motivando a ser uma pessoa melhor. Obrigado pelo imenso companheirismo, amor, paciência e amizade. Minha caminhada até aqui foi mais fácil e feliz por sua causa.

Agradeço a toda a equipe docente da Engenharia Mecânica da UFRJ, por todo o auxílio e conhecimento transmitidos durante todos esses anos. Vocês foram fundamentais para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional, guiando-me com sabedoria e paciência em cada etapa do meu percurso. Foi uma honra poder contar com profissionais tão capacitados e dedicados em minha trajetória, e levarei comigo todo o aprendizado adquirido aqui para o resto da minha vida.

Agradeço a todos da empresa TechnipFMC, em especial ao RPE (Rigid Department Engineering), por proporcionarem minha primeira experiência de trabalho em engenharia e ajudarem em meu desenvolvimento, tanto profissional quanto pessoal.

Agradeço a todos os meus amigos e amigas, que estiveram comigo até aqui. Gostaria de dizer que sou muito grato por ter conhecido todos vocês e que vocês foram fundamentais para minha formação. Em especial, gostaria de agradecer ao meu grupo de amigos chamado "Mecrias". Sem as idas às festas, os jogos de "Kings" e os cafés no CAENG, minha vida universitária seria muito monótona e desmotivadora.

Por último, agradeço à Agência Nacional de Petróleo (ANP), em especial ao Programa PRH-ANP 8: Engenharia Mecânica para o Uso Eficiente de Biocombustível, por incentivar a pesquisa científica e fomentar uma nova geração de pesquisadores, bem como pela bolsa de pesquisa concedida, que viabilizou a realização deste trabalho.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

## ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE BIOCOMBUSTÍVEIS EM UM MEIO POROSO

Daniel Moreira Spesani

Agosto/2023

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Departamento: Engenharia Mecânica

A degradação ambiental decorrente do uso de combustíveis fósseis no planeta criou a necessidade de utilização de combustíveis alternativos e sustentáveis. Nesse sentido, o biocombustível se apresenta como uma ótima opção, já que sua queima gera menos poluentes e gases de efeito estufa. Assim, a utilização de ferramentas computacionais para prever e otimizar o comportamento de escoamentos desse tipo de fluido torna-se fundamental para garantir sua viabilidade futura. Este trabalho tem como objetivo analisar o escoamento bidimensional de biocombustíveis através de um canal com uma seção de meio poroso em seu interior, utilizando o método de elementos finitos (MEF). O domínio do escoamento do fluido foi modelado utilizando a formulação corrente-vorticidade, sendo que, no domínio do meio poroso, a velocidade do fluido é dada pela equação de Brinkman-Forchheimer. Para a realizar a análise numérica, foi desenvolvido um código em Python. Por fim, observou-se que tanto a largura quanto a espessura do meio poroso influenciam nos resultados obtidos.

Palavras-chave: Análise Numérica, Mecânica dos Fluidos, Biocombustíveis, Meio Poroso.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

## NUMERICAL ANALYSIS OF BIOFUELS FLOW IN A POROUS MEDIA

Daniel Moreira Spesani

August/2023

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

The environmental degradation resulting from the use of fossil fuels on the planet has created the need for alternative and sustainable fuels. In this sense, biofuel emerges as an excellent option, as its combustion generates fewer pollutants and greenhouse gases. Therefore, the use of computational tools to predict and optimize the behavior of such fluid flow becomes crucial to ensure its future viability. This study aims to analyze the two-dimensional flow of biofuels through a channel with a porous medium section inside, using the finite element method (FEM). The fluid flow domain was modeled using the stream-vorticity formulation, and within the porous medium domain, the fluid velocity is given by the Brinkman-Forchheimer equation. To perform the numerical analysis, a Python code was developed. Finally, it was observed that both the width and thickness of the porous medium influence the obtained results.

Keywords: Numerical Analysis, Fluid Mechanics, Biofuels, Porous Media.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xvi</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Objetivo . . . . .	2
1.3 Organização do Trabalho . . . . .	2
<b>2 Revisão de Conceitos Básicos</b>	<b>4</b>
2.1 Biocombustíveis . . . . .	4
2.2 Mecânica de Fluidos . . . . .	5
2.2.1 Equações de Governo . . . . .	7
2.3 Meio Poroso . . . . .	11
2.4 Adimensionalização . . . . .	13
2.5 Método de Elementos Finitos . . . . .	16
2.5.1 Formulação Forte . . . . .	17
2.5.2 Formulação Variacional . . . . .	18
<b>3 Metodologia</b>	<b>20</b>
3.1 Formulação Corrente-Vorticidade . . . . .	20
3.1.1 Meios não porosos . . . . .	20
3.1.2 Meios porosos . . . . .	22

3.1.3	Equação de transporte de vorticidade generalizada . . . . .	23
3.2	Método Numérico . . . . .	23
3.2.1	Formulação fraca da equação de transporte de vorticidade ge- neralizada . . . . .	23
3.2.2	Formulação fraca da função corrente . . . . .	27
3.2.3	Formulação fraca das velocidades . . . . .	28
3.2.4	Formulação fraca da condição de contorno de vorticidade . . .	28
3.2.5	Sistema de equações completo . . . . .	29
3.2.6	Matrizes globais do MEF . . . . .	30
3.3	Gerador de malhas . . . . .	31
3.4	Código numérico . . . . .	32
3.5	Análise de Resultados . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Validação do Código Numérico</b>	<b>34</b>
4.1	Escoamento de Poiseuille . . . . .	35
4.2	Escoamento de Poiseuille com meio poroso . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Filtro de Biocombustível</b>	<b>50</b>
5.1	Resultados . . . . .	52
5.1.1	Simulação 1 . . . . .	52
5.1.2	Simulação 2 . . . . .	53
5.1.3	Simulação 3 . . . . .	54
5.1.4	Simulação 4 . . . . .	55
5.1.5	Simulação 5 . . . . .	56
5.1.6	Simulação 6 . . . . .	57
5.1.7	Simulação 7 . . . . .	58
5.1.8	Simulação 8 . . . . .	59
5.1.9	Simulação 9 . . . . .	60
5.1.10	Simulação 10 . . . . .	61
5.1.11	Simulação 11 . . . . .	62
5.1.12	Simulação 12 . . . . .	63
5.1.13	Simulação 13 . . . . .	64
5.1.14	Simulação 14 . . . . .	65

5.1.15	Simulação 15 . . . . .	66
5.1.16	Simulação 16 . . . . .	67
5.1.17	Simulação 17 . . . . .	68
5.1.18	Simulação 18 . . . . .	69
5.1.19	Simulação 19 . . . . .	70
5.1.20	Simulação 20 . . . . .	71
5.1.21	Simulação 21 . . . . .	72
5.1.22	Simulação 22 . . . . .	73
5.1.23	Simulação 23 . . . . .	74
5.1.24	Simulação 24 . . . . .	75
5.1.25	Simulação 25 . . . . .	76
5.2	Comparação entre os resultados . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>81</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Códigos Fonte</b>	<b>86</b>
A.1	Script para a geração das malhas no Gmsh . . . . .	86
A.2	Script para a análise de elementos finitos em Python . . . . .	87

# Lista de Figuras

1.1	Ilustração do processo de BECCS. Fonte: GOUGH, C. AND UPHAM, P., 2013 [1] . . . . .	2
2.1	Ilustração do comportamento de um sólido e um fluido ao sofrer cisalhamento. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2] . . . . .	5
2.2	Classificação do escoamento dos fluidos. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2]. . . . .	7
2.3	Volume de controle. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2] . . . . .	8
2.4	Forças atuando sobre uma partícula fluida. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2] . . . . .	9
2.5	Desenho esquemático de um escoamento através de um meio poroso. Fonte: FrackOptima, 2023 [3]. . . . .	12
2.6	Malha de elementos finitos em 2 dimensões. Fonte: DE SOUZA, R. M., 2003 [4]. . . . .	16
3.1	Elemento triangular genérico. Fonte: GUSTAVO, R. A., 2019 [5] . . . .	30
4.1	Condições de contorno escoamento de Poiseuille. Fonte: Autor. . . . .	35
4.2	Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refino = 0.1. . . . .	37
4.3	Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refino = 0.08. . . . .	38
4.4	Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refino = 0.05. . . . .	39
4.5	Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refino = 0.03. . . . .	40
4.6	Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a velocidade horizontal no escoamento de Poiseuille . . .	41
4.7	Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a velocidade vertical no escoamento de Poiseuille . . . .	41

4.8	Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a função corrente no escoamento de Poiseuille . . . . .	42
4.9	Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a vorticidade no escoamento de Poiseuille . . . . .	42
4.10	Condições de contorno escoamento de Poiseuille com meio poroso. Fonte: Autor. . . . .	44
4.11	Escoamento de Poiseuille com meio poroso: $Da = 0.025$ . . . . .	45
4.12	Escoamento de Poiseuille com meio poroso: $Da = 0.0025$ . . . . .	46
4.13	Escoamento de Poiseuille com meio poroso: $Da = 0.00025$ . . . . .	47
4.14	Comparação entre as soluções numéricas encontradas com as soluções encontradas na literatura para a velocidade horizontal no escoamento de Poiseuille com meio poroso . . . . .	48
5.1	Condições de contorno para o escoamento no filtro de biocombustíveis. Fonte: Autor. . . . .	50
5.2	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.0$ e $h_f = 0.05$ . . . . .	53
5.3	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.0$ e $h_f = 0.075$ . . . . .	54
5.4	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.0$ e $h_f = 0.1$ . . . . .	55
5.5	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.0$ e $h_f = 0.125$ . . . . .	56
5.6	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.0$ e $h_f = 0.15$ . . . . .	57
5.7	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.5$ e $h_f = 0.05$ . . . . .	58
5.8	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.5$ e $h_f = 0.075$ . . . . .	59
5.9	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.5$ e $h_f = 0.1$ . . . . .	60
5.10	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.5$ e $h_f = 0.125$ . . . . .	61
5.11	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 1.5$ e $h_f = 0.15$ . . . . .	62
5.12	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.0$ e $h_f = 0.05$ . . . . .	63
5.13	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.0$ e $h_f = 0.075$ . . . . .	64
5.14	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.0$ e $h_f = 0.1$ . . . . .	65
5.15	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.0$ e $h_f = 0.125$ . . . . .	66
5.16	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.0$ e $h_f = 0.15$ . . . . .	67
5.17	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.5$ e $h_f = 0.05$ . . . . .	68
5.18	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.5$ e $h_f = 0.075$ . . . . .	69
5.19	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.5$ e $h_f = 0.1$ . . . . .	70

5.20	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.5$ e $h_f = 0.125$ . . . . .	71
5.21	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 2.5$ e $h_f = 0.15$ . . . . .	72
5.22	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 3.0$ e $h_f = 0.05$ . . . . .	73
5.23	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 3.0$ e $h_f = 0.075$ . . . . .	74
5.24	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 3.0$ e $h_f = 0.1$ . . . . .	75
5.25	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 3.0$ e $h_f = 0.125$ . . . . .	76
5.26	Visualização dos campos de interesse: $l_f = 3.0$ e $h_f = 0.15$ . . . . .	77
5.27	Comparação entre a taxa de redução de velocidade e a espessura do filtro . . . . .	78
5.28	Comparação entre a taxa de redução de velocidade e a largura do filtro	79

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros das simulações do escoamento de Poiseuille. . . . .	36
4.2	Média relativa do erro das simulações do escoamento de Poiseuille. . .	43
4.3	Desvio padrão da média relativa do erro das simulações do escoamento de Poiseuille. . . . .	43
4.4	Parâmetros físicos do escoamento de Poiseuille com meio poroso. . . .	45
4.5	Média relativa e desvio padrão do erro das simulações do escoamento de Poiseuille com meio poroso. . . . .	48
4.6	Média relativa e desvio padrão do erro das simulações do escoamento de Poiseuille com meio poroso ( $0 \leq x \leq 2.5$ , $3.5 \leq x \leq 6.0$ ). . . . .	49
5.1	Parâmetros físicos e da malha do escoamento no filtro de biocom- bustíveis. . . . .	51
5.2	Constantes da regressão linear e o valor de $R^2$ . . . . .	78
5.3	Constantes da regressão hiperbólica e o valor de $R^2$ . . . . .	80

# Lista de Símbolos

$A$	área do elemento triangular, p. 30
$C_F$	coeficiente de resistência inercial, p. 13
$D$	operador de derivada material, p. 9
$Da$	número de Darcy, p. 13
$Fo$	número de Forchheimer, p. 13
$K$	coeficiente de permeabilidade, p. 12
$L$	comprimento característico, p. 6
$N$	função de forma, p. 24
$R^2$	dispersão dos valores, p. 78
$Re$	número de Reynolds, p. 6
$Re_p$	número de Reynolds poroso, p. 12
$U$	velocidade média do fluido, p. 6
$V$	volume, p. 6
$\Gamma$	contorno, p. 24
$\Omega$	domínio, p. 23
$\epsilon$	média percentual absoluta do erro, p. 34
$\epsilon$	termo de ativação poroso, p. 23
$\eta$	taxa de redução para o filtro, p. 77

$\frac{\partial}{\partial}$	operador de derivada parcial, p. 6
$\int$	integral, p. 23
<b>E</b>	matriz de ativação, p. 27
<b>G</b>	matriz do gradiente, p. 27
<b>I</b>	matriz identidade, p. 27
<b>K</b>	matriz de rigidez, p. 27
<b>M</b>	matriz de massa, p. 27
<b>U</b>	matriz do módulo de velocidades, p. 27
$\mu$	viscosidade dinâmica, p. 6
$\nabla \times$	operador rotacional, p. 11
$\nabla$	operador nabla, p. 8
$\nabla^2$	operador laplaciano, p. 10
$\nu$	viscosidade cinemática, p. 6
$\omega_z$	vorticidade, p. 11
$\psi$	função corrente, p. 11
$\rho$	massa específica, p. 6
$\sigma$	tensão normal, p. 10
$\sigma_{std}$	desvio padrão da média percentual absoluta do erro, p. 34
$\sum_e$	somatório dos elementos analisados, p. 25
$\tau$	tensão cisalhante, p. 10
$\tau_{xy}$	tensão cisalhante, p. 6
$\vec{\mathbf{F}}$	forças atuando na partícula, p. 9
$g_x$	componente da força gravitacional na direção x, p. 10

$g_y$	componente da força gravitacional na direção y, p. 10
$g_z$	componente da força gravitacional na direção z, p. 10
$m$	massa, p. 6
$p$	pressão, p. 12
$t$	tempo, p. 8
$u$	componente x da velocidade do fluido, p. 8
$v$	componente y da velocidade do fluido, p. 8
$w$	componente z da velocidade do fluido, p. 8
$w$	função de peso, p. 24
det	operador determinante, p. 30

# Lista de Abreviaturas

$CH_4$	metano, p. 1
$CO$	monóxido de carbono, p. 1
$CO_2$	dióxido de carbono, p. 1
BECCS	<i>Bioenergy with carbon capture and storage</i> , p. 1
MEF	método de elementos finitos, p. 2

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A evolução tecnológica dos últimos séculos expandiu a necessidade humana de geração e consumo de energia. Atualmente, a maior parte dessa energia é proveniente da queima de combustíveis fósseis como os derivados do petróleo, o gás natural e o carvão mineral.

Além de energia, a queima desses combustíveis gera gases prejudiciais ao meio ambiente e com alto potencial de intensificação do efeito-estufa, como o monóxido de carbono ( $CO$ ), o dióxido de carbono ( $CO_2$ ) e o metano ( $CH_4$ ) [6].

Nesse sentido, a expansão da participação das fontes alternativas de energia, como a eólica, solar e biocombustíveis, na geração de energia global se tornou essencial para a mitigação dos problemas ambientais provenientes da queima de combustíveis fósseis.

Existem diversos projetos de relevância comercial para a produção de biocombustíveis [7], utilizando diferentes métodos de produção e tipos de matéria-prima, além de iniciativas voltadas ao processamento dos gases de efeito estufa gerados por sua produção visando negatar as emissões de  $CO_2$ . Entre elas, pode-se destacar a Bioenergia e Armazenamento de Carbono (BECCS, do inglês: *Bioenergy with carbon capture and storage*) [1].

O BECCS se baseia na captura e armazenamento do  $CO_2$  produzido pela queima da biomassa. Como a biomassa é considerada um combustível neutro em carbono, esse processo resulta em uma emissão total negativa, que pode contribuir para di-

minuição do nível de gás carbônico presente na atmosfera [1] e [8].

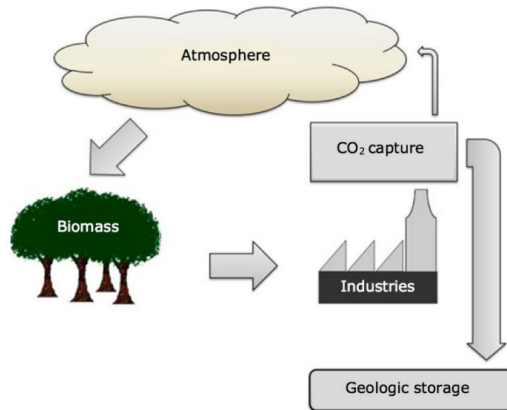


Figura 1.1: Ilustração do processo de BECCS. Fonte: GOUGH, C. AND UPHAM, P., 2013 [1]

No Brasil, a implementação e utilização desse tipo de tecnologia tem um enorme potencial [9]. Em 2020, o país apresentou 638 usinas de biogás em operação que produziram cerca de 5 milhões de metros cúbicos por dia desse biocombustível [10].

## 1.2 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo analisar numericamente o comportamento hidrodinâmico de um fluido em um filtro de biocombustíveis, utilizando o método de elementos finitos (MEF). O elemento filtrante será modelado como um meio poroso através da equação de Darcy. O foco do estudo será em analisar a influência dos parâmetros geométricos do meio poroso (largura e espessura) em um modelo de filtro em duas dimensões.

## 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho será dividido em 6 capítulos e um apêndice, descritos a seguir:

1. Introdução: Apresenta uma breve introdução acerca do escopo do trabalho.
2. Revisão de Conceitos Básicos: Apresenta a fundamentação teórica em mecânica dos fluidos, meios porosos e MEF.

3. Metodologia: Apresenta o modelo teórico utilizado para a resolução do problema, bem como a implementação do código computacional.
4. Verificação do Código Numérico: Apresenta a comparação entre os resultados encontrados e os resultados apresentados pela literatura.
5. Filtro de Biocombustível: Apresenta os resultados encontrados e a comparação entre eles.
6. Conclusão: Apresenta as conclusões acerca do trabalho desenvolvido.
7. Apêndice A: Apresenta os códigos desenvolvidos.

# Capítulo 2

## Revisão de Conceitos Básicos

### 2.1 Biocombustíveis

Os biocombustíveis são uma alternativa aos combustíveis fósseis que têm sido amplamente utilizados em todo o mundo. Eles são produzidos a partir de biomassa renovável, como plantas, culturas agrícolas e resíduos orgânicos, e oferecem uma alternativa sustentável aos combustíveis fósseis não renováveis, como o petróleo, o carvão e o gás natural.

Existem duas principais formas de produzir biocombustíveis: a primeira é por meio de processos biológicos, que utilizam microrganismos para converter a biomassa em biocombustíveis, como o bioetanol e o biodiesel. A segunda é por meio de processos termoquímicos, que utilizam calor e pressão para converter a biomassa em biocombustíveis, como o bio-óleo e o gás de síntese.

Esse tipo de combustível oferece uma série de benefícios em relação aos combustíveis fósseis. Em primeiro lugar, eles são renováveis e podem ser produzidos de forma sustentável, o que significa que não esgotam os recursos naturais da Terra. Além disso, eles têm um impacto ambiental muito menor do que os combustíveis fósseis, pois emitem menos gases de efeito estufa durante a produção e a queima. Isso pode ajudar a reduzir o aquecimento global e mitigar as mudanças climáticas.

Outra vantagem dos biocombustíveis é que eles podem ajudar a reduzir a dependência dos países em relação aos combustíveis fósseis importados. Muitos países dependem do petróleo importado para atender às suas necessidades energéticas, o que pode criar vulnerabilidades econômicas e de segurança. Os biocombustíveis, por

outro lado, podem ser produzidos localmente, ajudando a reduzir a dependência de fontes externas.

## 2.2 Mecânica de Fluidos

A mecânica dos fluidos pode ser definida como o estudo de fluidos em repouso ou em movimento. Essa área da ciência estuda os mais diversos tipos de problemas, de acordo com Fox e McDonald [2], “a mecânica dos fluidos é tradicionalmente aplicada em áreas tais como o projeto sistemas de canal, dique e represa, o projeto de bombas, compressores, tubulações e dutos usados nos sistemas de água e condicionamento de ar de casas e edifícios, assim como sistemas de bombeamento necessários na indústria química; as aerodinâmicas de automóveis e aviões sub e supersônicos; e o desenvolvimento de muitos diferentes medidores de vazão, tais como os medidores de bombas de gás”.

O conceito de fluido geralmente é definido em oposição ao conceito de sólido: fluidos tendem a escoar quando sofrem alguma interação, enquanto sólidos tendem a se deformar. Para a engenharia, um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial), não importando o quão pequeno seja o seu valor [2]. Dessa forma, fluidos podem ser considerados meios contínuos que, na natureza, se apresentam na forma de líquidos e gases.

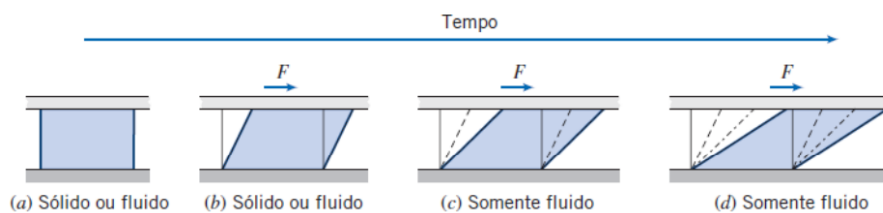


Figura 2.1: Ilustração do comportamento de um sólido e um fluido ao sofrer cisalhamento. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2]

A partir da definição de fluido, define-se a viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) como a relação entre a tensão cisalhante atuando no fluido e sua taxa de deformação, que é equivalente à taxa de variação da velocidade do fluido em relação à componente

tangencial à tensão de cisalhamento. Esta relação pode ser expressa por:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

Neste trabalho serão analisados somente fluidos de natureza newtoniana, isto é, em que a relação entre tensão cisalhante é diretamente proporcional ao gradiente de velocidade [2].

A massa específica ( $\rho$ ) de um fluido é definida como a quantidade de matéria por unidade de volume, expressa por:

$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V} \quad (2.2)$$

Onde  $\delta m$  é a quantidade de massa e  $\delta V$  é o volume.

Pode-se associar a viscosidade dinâmica com a massa específica através da seguinte relação:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.3)$$

Onde  $\nu$  é definida como a viscosidade cinemática do fluido.

Um escoamento de fluido é comumente caracterizado por uma grandeza adimensional que relaciona as forças inerciais com as forças viscosas, denominado número de Reynolds ( $Re$ ) [2]:

$$Re = \rho \frac{UL}{\mu} \quad (2.4)$$

Onde  $L$  é o comprimento característico do escoamento e  $U$  é a velocidade característica do escoamento.

O valor desta grandeza é fundamental para definir o comportamento do escoamento. Escoamentos com baixo número de Reynolds são denominados laminares, enquanto escoamentos com alto número de Reynolds são denominados [2]. No regime laminar as camadas de fluido escoam de maneira ordenada e sem se misturar, fator que torna o escoamento simples e que, conseqüentemente, pode ser facilmente descrito, já no regime turbulento essas camadas se misturam, gerando movimentos aleatórios e tornando o escoamento mais complexo e caótico [2]. Por esse motivo, este trabalho se limitará ao estudo de escoamentos laminares, com baixos número de Reynolds.

Outro tipo de caracterização do escoamento está relacionado à variação de massa específica do fluido ao longo do escoamento, escoamentos incompressíveis têm a variação de massa específica desprezível, enquanto escoamentos compressíveis levam em conta essa variação [2]. Neste trabalho serão estudados escoamentos de líquidos newtonianos a baixa pressão, logo, incompressíveis.

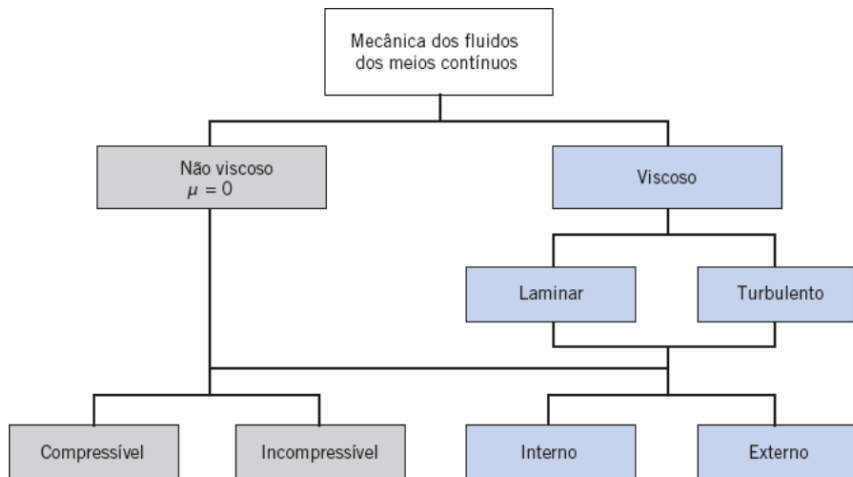


Figura 2.2: Classificação do escoamento dos fluidos. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2].

### 2.2.1 Equações de Governo

Existem diversas técnicas para descrever matematicamente o comportamento de um fluido, a técnica abordada neste trabalho utiliza a análise diferencial do movimento dos fluidos. O primeiro passo para esta análise é definir um volume infinitesimal de fluido (volume de controle), onde serão aplicados os 2 princípios fundamentais da mecânica dos fluidos: a conservação de massa e a conservação de movimento.

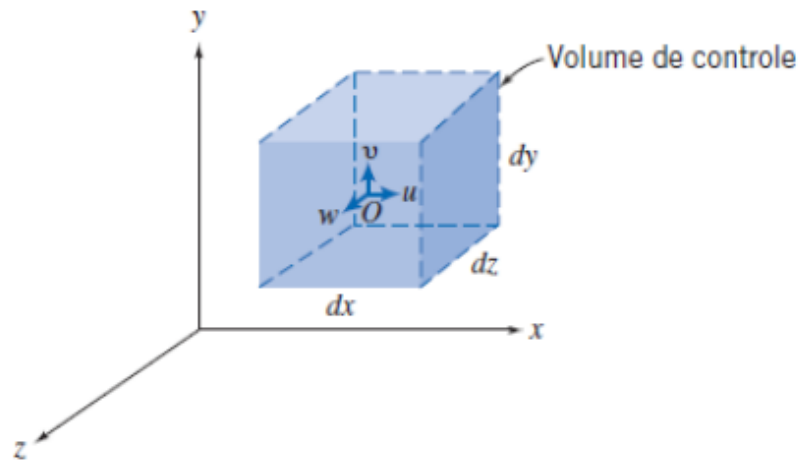


Figura 2.3: Volume de controle. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2]

O princípio da conservação de massa está relacionado à conservação de quantidade de matéria ao longo do escoamento. Esse princípio descreve que, dentro de um volume de controle a soma da taxa de acúmulo de massa dentro do volume de controle com o fluxo de massa que atravessa sua fronteira é nula [2].

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de massa} \\ \text{dentro do volume de controle.} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de massa} \\ \text{que cruza a fronteira.} \end{array} \right] = 0$$

Matematicamente, esse princípio é descrito através da equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

Onde  $u$ ,  $v$ ,  $w$  são as componentes da velocidade do fluido nas direções  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , respectivamente.

Utilizando o operador vetorial gradiente,  $\nabla$ , para coordenadas retangulares, descrito matematicamente por:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.6)$$

Pode-se escrever a equação de continuidade como:

$$\nabla \cdot \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.7)$$

Para fluidos incompressíveis, a massa específica não é função nem das coordenadas espaciais, nem do tempo, assim, a equação pode ser simplificada para:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.8)$$

O princípio da conservação da quantidade de movimento é o resultado da segunda Lei de Newton aplicada a um elemento diferencial de fluido balanceando, as forças de superfície e de campo que atuam neste elemento. Este princípio determina que a taxa de acúmulo de quantidade de movimento linear dentro do volume de controle mais o fluxo de quantidade de movimento linear que atravessa a fronteira do volume de controle é igual a soma das forças aplicadas à superfície da fronteira do volume de controle e as forças do volume.

A segunda lei de Newton na forma vetorial aplicada a um sistema infinitesimal é dada por:

$$d\vec{F} = dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = dm \left[ u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] \quad (2.9)$$

Onde  $\vec{F}$  são as forças atuando no sistema e  $dm$  é a massa infinitesimal.

As forças atuando sobre um elemento de fluido podem ser classificadas em forças de campo (força gravitacional) e forças de superfície (tensões atuantes).

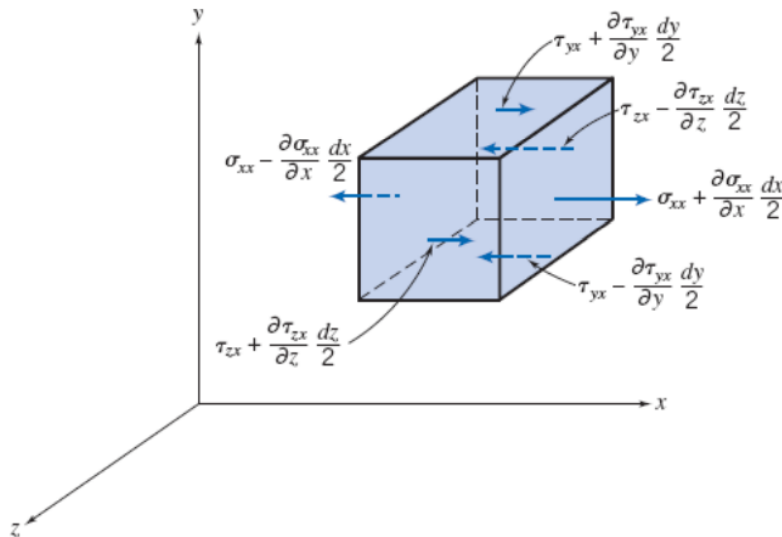


Figura 2.4: Forças atuando sobre uma partícula fluida. Fonte: Fox e McDonald, 2011 [2]

Realizando o somatório das forças nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , encontra-se:

$$dF_x = dF_{B_x} + dF_{S_x} = \left( \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.10)$$

$$dF_y = dF_{B_y} + dF_{S_y} = \left( \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.11)$$

$$dF_z = dF_{B_z} + dF_{S_z} = \left( \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.12)$$

Onde  $dF_B$  são as forças de campo,  $dF_s$  são as forças de superfície e  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zy}$  são as tensões atuando no elemento.

Substituindo as expressões 2.10, 2.11, 2.12 em 2.9 e aplicando as devidas simplificações para fluidos newtonianos, encontram-se as equações de Navier-Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.13)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.14)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.15)$$

Essas equações também podem ser representadas em sua forma vetorial, dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.16)$$

Onde o termo  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  é denominado transiente; o termo  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  refere-se ao termo convectivo; o termo  $-\frac{1}{\rho} \nabla p$  refere-se ao gradiente de pressão; o termo  $\mathbf{g}$  refere-se ao campo gravitacional; o termo  $\nu \nabla^2 \mathbf{v}$  refere-se à difusividade.

Além das duas leis fundamentais citadas, pode-se utilizar o conceito de função corrente para simplificar a análise de escoamentos bidimensionais. Esta função gera as linhas de corrente (linhas paralelas a velocidade do fluido), que descrevem completamente o deslocamento do fluido, e é dada por:

$$d\psi = u dy - v dx \quad (2.17)$$

Onde  $d\psi$  é o valor infinitesimal da função corrente.

A partir desta definição, pode-se definir os componentes da velocidade do fluido em função da função corrente:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (2.18)$$

Para a aplicação da formulação utilizada neste trabalho, também será utilizado o conceito de vorticidade. A vorticidade descreve a rotação local de um fluido em um determinado ponto. Ela está relacionada ao movimento de torção ou circulação das partículas fluidas em torno de um eixo. Em outras palavras, é a medida da tendência do fluido em girar em torno de um determinado ponto.

Quando a vorticidade é zero, as partículas fluidas dessa região não estão girando. Isso ocorre em fluxos denominados irrotacionais.

No entanto, quando a vorticidade é diferente de zero, indica que o fluido está girando localmente. Isso é comum em situações de escoamento turbulento, onde vórtices e redemoinhos são formados.

A vorticidade é definida como o rotacional do vetor velocidade do fluido, sua componente na direção  $\hat{k}$  é dada por:

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.19)$$

Substituindo as definições dos termos da velocidade do fluido em função da função corrente, é possível também escrever a vorticidade em função da função corrente.

$$w_z = -\nabla^2\psi \qquad (2.20)$$

## 2.3 Meio Poroso

Meios porosos são materiais que possuem um conjunto de poros, vazios entre os elementos sólidos de sua composição, por onde possa escoar um volume de fluido. Entre os diversos tipos de meios porosos, pode-se citar o solo (areia, argila, formações rochosas), algumas cerâmicas, filtros de papel, esponjas e outros. O fluido atravessa o meio poroso através dos vazios existentes entre as partículas (poros). O escoamento

através de um meio poroso depende, principalmente, das características do fluido, da razão entre o número de poros por área do meio poroso e da rugosidade da superfície do meio poroso [11].

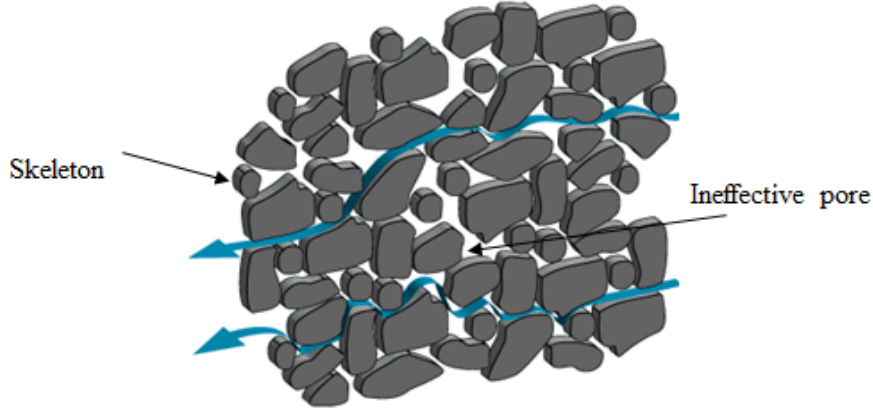


Figura 2.5: Desenho esquemático de um escoamento através de um meio poroso. Fonte: FrackOptima, 2023 [3].

Por conta da aleatoriedade da estrutura e disposição dos poros, uma análise microscópica do escoamento através do meio poroso é extremamente complexa, por conta desse fato, utilizam-se relações empíricas para modelar o comportamento macroscópico do fluido. Entre elas, pode-se destacar a lei de Darcy [11], que relaciona o gradiente de pressão à velocidade do fluido e é dada pela seguinte equação:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\mathbf{v} \quad (2.21)$$

Onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido e  $K$  é o coeficiente de permeabilidade, que é uma medida da capacidade de um material permitir a passagem de fluidos e depende tanto do meio poroso, quanto do escoamento. A lei de Darcy é geralmente utilizada em escoamentos onde o número de Reynolds poroso é menor que 1. Essa grandeza é definida através do tamanho médio dos poros ( $\delta$ ), e é dada pela seguinte equação [11]:

$$Re_p = \frac{\rho U \delta}{\mu} \quad (2.22)$$

Neste trabalho será utilizada uma generalização da lei de Darcy denominada equação de Brinkman-Forchheimer [11]. Nesta equação há a adição de um termo

não-linear ( $|\mathbf{v}|\mathbf{v}$ ) e adição de um termo difusivo ( $\nabla^2\mathbf{v}$ ) à equação de Darcy, resultando na seguinte expressão:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{K}\mathbf{v} - \frac{\rho C_F}{K}|\mathbf{v}|\mathbf{v} + \mu\nabla^2\mathbf{v} \quad (2.23)$$

Onde  $C_F$  é o coeficiente de resistência inercial, que é um parâmetro experimental utilizado para descrever a resistência experimentada por um objeto em movimento em um fluido. O termo  $|\mathbf{v}|\mathbf{v}$  representa o vetor velocidade multiplicado pelo seu módulo.

Além do número de Reynolds, é comum utilizar outras 2 grandezas adimensionais para caracterizar o escoamento através de um meio poroso. A primeira delas é o número de Darcy ( $Da$ ), que é definido como a relação entre a queda de pressão através de um meio poroso e a velocidade do fluido que flui através dele. A segunda delas é o número de Forchheimer ( $Fo$ ), que é uma medida da importância relativa dos termos de arrasto viscoso e arrasto inercial no fluxo do fluido. Eles são dados por:

$$Da = \frac{K}{L^2} \quad (2.24)$$

$$Fo = \frac{\rho C_F \sqrt{K} U}{\mu} \quad (2.25)$$

## 2.4 Adimensionalização

A adimensionalização é um processo fundamental na mecânica dos fluidos que envolve a conversão de grandezas físicas em valores adimensionais, ou seja, sem unidades [2]. Isso é feito através da escolha adequada de grandezas de referência, como comprimento característico, velocidade característica e densidade do fluido. O objetivo principal da adimensionalização é simplificar as equações que governam o comportamento dos fluidos, permitindo uma análise mais fácil e compreensão dos fenômenos em estudo.

Um dos principais benefícios da adimensionalização é a generalização das soluções. Ao remover as unidades de medida, as equações se tornam independentes do sistema de medição utilizado, permitindo que os resultados sejam aplicados em

diferentes escalas e contextos. Isso facilita a comparação entre diferentes experimentos e a aplicação dos resultados em problemas práticos.

Outra vantagem da adimensionalização é a simplificação das equações diferenciais. Ao transformar as grandezas físicas em valores adimensionais, muitas vezes é possível reduzir o número de termos nas equações e eliminar constantes físicas. Isso simplifica a matemática envolvida e torna as equações mais fáceis de resolver analiticamente ou numericamente.

Além disso, a adimensionalização permite identificar os parâmetros mais relevantes em um determinado problema. Através da análise dimensional, é possível determinar quais grandezas têm um impacto significativo no comportamento do fluido e quais podem ser negligenciadas. Essa seleção criteriosa de parâmetros adimensionais ajuda a simplificar o problema e a concentrar a atenção nos aspectos mais importantes.

A adimensionalização também facilita a interpretação física dos resultados. Ao trabalhar com grandezas adimensionais, é possível obter conclusões gerais sobre o comportamento dos fluidos, independentemente das unidades utilizadas. Isso permite uma compreensão mais profunda dos fenômenos físicos subjacentes e ajuda na formulação de teorias e modelos mais abrangentes.

Neste trabalho, serão utilizadas as versões adimensionais das equações 2.8, 2.16, 2.18, 2.19, 2.20 e 2.23. Para isto serão utilizadas as seguintes definições de grandezas adimensionais:

$$\begin{array}{llll} x = Lx^* & \mathbf{v} = U\mathbf{v}^* & t = \frac{L}{U}t^* & \rho = \rho_0\rho^* \\ \nu = \nu_0\nu^* & p = p_0p^* & \mathbf{g} = g_0\mathbf{g}^* & \nabla = \frac{1}{L}\nabla^* \end{array}$$

Aplicando estas definições na equação de conservação de massa, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{U}{L}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \tag{2.26}$$

Realizando o mesmo procedimento na equação de Navier-Stokes, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + g_0 \mathbf{g}^* + \frac{\nu_0 U}{L^2} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

Multiplicando ambos os lados da equação por  $\frac{L}{U^2}$  e definindo os valores adimensionais de  $\rho^*$  e  $\nu^*$  como a unidade, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* + \frac{\nu_0}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

Neste trabalho os efeitos gravitacionais sobre o fluido serão desprezados devido à baixa variação de altura no escoamento.

Finalmente, aplicando a definição de número de Reynolds, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad (2.27)$$

Por fim, realizando o mesmo procedimento para a equação de Brinkman-Forchheimer:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{\nu}{K} \mathbf{v} - \frac{C_F}{K} |\mathbf{v}| \mathbf{v} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* = -\frac{\nu_0 U}{K_0} \frac{\nu^*}{K^*} \mathbf{v}^* - \frac{C_{F0} U}{K_0} \frac{C_F^*}{K^*} |\mathbf{v}^*| \mathbf{v}^* + \frac{\nu_0 U}{L^2} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{v}^*$$

Multiplicando ambos os lados por  $\frac{L}{U^2}$ , definindo os valores adimensionais de  $\rho^*$ ,  $\nu^*$ ,  $C_F^*$  e  $K^*$  como a unidade e aplicando as definições do número de Reynolds, número de Darcy e número de Forchheimer, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* + \frac{1}{ReDa} (\mathbf{v}^* + Fo|\mathbf{v}^*| \mathbf{v}^*) = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* \quad (2.28)$$

Esta equação é chamada de equação de transporte de vorticidade para meios porosos.

## 2.5 Método de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica numérica amplamente utilizada para resolver problemas complexos de engenharia relacionados à mecânica dos fluidos. Ele é aplicado em diversas áreas, como aeronáutica, automotiva, naval e muitas outras. O MEF é uma ferramenta poderosa que permite simular e analisar o comportamento de fluidos em sistemas complexos, ajudando os engenheiros a projetar e otimizar seus projetos [12].

O MEF é baseado na subdivisão do domínio do problema em uma malha finita de elementos. Cada elemento é uma representação simplificada do domínio real e é definido por um conjunto de nós ou pontos de controle. Esses elementos estão conectados uns aos outros através de nós compartilhados, formando uma malha que representa o domínio de estudo.

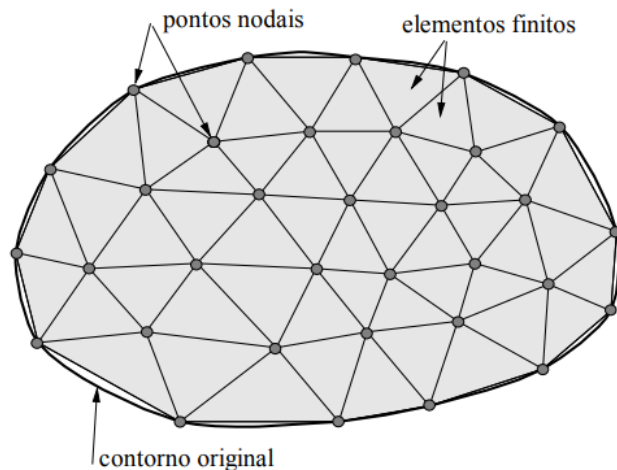


Figura 2.6: Malha de elementos finitos em 2 dimensões. Fonte: DE SOUZA, R. M., 2003 [4].

O processo de aplicação do MEF envolve a formulação de equações matemáticas que descrevem o comportamento do fluido dentro de cada elemento. Essas equações são derivadas a partir de leis fundamentais da física, como a conservação de massa e momento. Uma vez formuladas as equações, elas são combinadas em um sistema de equações que representa o problema global.

Para resolver esse sistema de equações, o MEF utiliza métodos numéricos, como a discretização por diferenças finitas, para aproximar as soluções em cada elemento.

Essas soluções aproximadas são então combinadas para obter a solução global do problema. Esse processo é repetido iterativamente até que uma solução satisfatória seja alcançada.

O MEF é necessário em problemas de mecânica dos fluidos porque muitas vezes não é possível obter soluções analíticas exatas para sistemas complexos. Além disso, o MEF permite levar em consideração fenômenos físicos não-lineares, como turbulência e interações fluido-estrutura, que são de extrema importância em muitas aplicações práticas. Ele também oferece uma maneira eficiente e precisa de modelar e simular o comportamento de fluidos em diferentes condições de contorno e geometrias.

A precisão e convergência deste método está diretamente relacionada ao refino da malha utilizada (número de nós e número de elementos). Em geral, quando o número de elementos tende ao infinito, a solução aproximada tende a solução exata do problema [13]. Vale ressaltar que o tamanho do sistema linear a ser resolvido é diretamente proporcional ao número de nós da malha, logo uma malha mais refinada tem um custo computacional maior, fator que deve ser levado em conta devido às limitações de hardware da máquina onde as análises estão sendo realizadas.

### **2.5.1 Formulação Forte**

No método dos elementos finitos (MEF), a formulação forte, também conhecida como forma forte, é uma etapa fundamental para a resolução de problemas. Ela consiste em estabelecer as equações governantes que descrevem o comportamento do sistema em análise. A forma forte é obtida a partir do equacionamento das leis fundamentais da física que regem o problema em questão [12].

A partir dessas equações, podemos obter uma representação matemática precisa do comportamento do fluido em cada elemento da malha do MEF. Essas equações são expressas em termos das incógnitas do problema.

No entanto, para resolver o sistema de equações resultante, é necessário estabelecer condições de contorno adequadas. Essas condições definem os valores conhecidos das incógnitas nas fronteiras do domínio. Por exemplo, pode-se especificar uma velocidade prescrita em uma determinada região em um problema de mecânica dos fluidos.

Uma vez estabelecidas as equações governantes e as condições de contorno, o MEF utiliza métodos numéricos para aproximar as soluções em cada elemento da malha. Essas soluções aproximadas são combinadas para formar um sistema global de equações, que é resolvido para obter a solução final do problema.

## 2.5.2 Formulação Variacional

Outra formulação deste método é a formulação variacional, também conhecida como forma fraca, é uma abordagem alternativa à forma forte para a resolução de problemas. Ela é particularmente útil quando se trabalha com equações diferenciais parciais (EDPs) de segunda ordem, que é fazem parte do objeto de estudo deste trabalho.

A forma fraca é obtida a partir da multiplicação das equações governantes por funções de teste apropriadas e, em seguida, a integração dessas equações ao longo do domínio do problema [12]. Essa abordagem visa transformar as equações diferenciais em um problema de otimização, no qual o objetivo é encontrar a solução que minimize uma função de erro.

Esta formulação leva em consideração o princípio do trabalho virtual ou princípio dos mínimos potenciais. Isso significa que a solução do problema deve satisfazer as equações governantes para qualquer função de peso admissível. Essas funções de peso são geralmente escolhidas para serem diferenciáveis e satisfazerem certas condições de contorno.

A principal vantagem da forma fraca em elementos finitos é que ela permite a utilização de funções de peso mais suaves do que as funções usadas na forma forte. Isso resulta em um sistema de equações mais suave e de melhor comportamento numérico. Além disso, a forma fraca também proporciona uma abordagem natural para a imposição de condições de contorno essenciais e naturais.

Uma característica importante da função de peso é que ela assume o valor zero para os pontos de contorno onde é prescrita uma condição de Dirichlet [14]. Nos casos estudados neste trabalho só serão aplicadas condições de Dirichlet, desta forma, as equações desenvolvidas poderão ser simplificadas.

Uma vez obtida a forma fraca, o próximo passo é discretizar o domínio do problema em uma malha de elementos finitos. Cada elemento é definido por nós ou

pontos de controle e possui funções de interpolação associadas, também chamadas de funções de forma. Essas funções de interpolação são utilizadas para aproximar a solução dentro de cada elemento em termos de valores nodais.

Substituindo as funções de teste e a solução aproximada nas equações fracas, obtém-se um sistema de equações algébricas que representa o problema discretizado. Esse sistema pode ser resolvido numericamente para obter a solução aproximada do problema original.

# Capítulo 3

## Metodologia

### 3.1 Formulação Corrente-Vorticidade

A formulação corrente-vorticidade é uma abordagem alternativa para a resolução da equação de Navier-Stokes. Ela é baseada na decomposição do campo de velocidade utilizando a formulação corrente-vorticidade [15].

Ao utilizar a formulação corrente-vorticidade, é possível simplificar o sistema de equações e obter soluções mais eficientes e precisas para determinados tipos de problemas em mecânica dos fluidos. No entanto, é importante ressaltar que essa abordagem é adequada apenas para certos tipos de escoamentos e não é aplicável em todos os casos. A escolha da formulação mais adequada depende das características específicas do problema em estudo.

As equações 2.18 e 2.20 já representam 2 equações necessárias para a resolução do problema. Entretanto, para encontrar a solução para as 3 incógnitas do problema (velocidade, função corrente e vorticidade), é necessário acrescentar uma nova equação ao sistema. Esta equação é resultado da manipulação da equação de Navier-Stokes, para meios não porosos, e da equação de Brinkman-Forchheimer, para meios porosos.

#### 3.1.1 Meios não porosos

Para meios não porosos, a formulação corrente-vorticidade pode ser utilizada diretamente na equação 2.27. Para tal, é necessário aplicar o operador rotacional a ambos os lados da equação:

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \times \left( -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \right) \quad (3.1)$$

O termo  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  pode ser reescrito como  $\nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ , logo a equação fica da seguinte forma:

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right) = \nabla \times \left( -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \right) \quad (3.2)$$

O operador rotacional é linear, logo a propriedade distributiva pode ser aplicada a cada termo da equação:

$$\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.3)$$

Utilizando a definição de vorticidade:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega_z) = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.4)$$

O produto  $\nabla \times \nabla$  é igual a 0, logo os termos  $\nabla \times \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2}$  e  $-\nabla \times \nabla p$  desaparecem da equação:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega_z) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.5)$$

O termo  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \omega_z)$  pode ser reescrito com  $\mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z - \omega_z \cdot \nabla \mathbf{v}$ , logo a equação fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z - \omega_z \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.6)$$

Para o caso bidimensional, o termo  $-\omega_z \cdot \nabla \mathbf{v}$  é igual a 0, logo a forma final da equação de Navier-Stokes adimensional para a formulação corrente-vorticidade é dada por:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.7)$$

Esta equação é denominada de equação de transporte de vorticidade. O termo  $\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z$  é denominado derivada material de  $\omega_z$  e pode ser escrito como  $\frac{D\omega_z}{Dt}$ .

### 3.1.2 Meios porosos

Para meios porosos, a formulação corrente-vorticidade pode ser utilizada diretamente na equação 2.28. Para tal, é necessário aplicar o operador rotacional a ambos os lados da equação:

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{ReDa} (\mathbf{v} + Fo|\mathbf{v}|\mathbf{v}) \right) = \nabla \times \left( -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \right) \quad (3.8)$$

Assim como na formulação para meios não porosos, o termo  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  pode ser reescrito como  $\nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ , logo a equação fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \frac{1}{ReDa} (\mathbf{v} + Fo|\mathbf{v}|\mathbf{v}) \right) \\ = \nabla \times \left( -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

O operador rotacional é linear, logo a propriedade distributiva pode ser aplicada a cada termo da equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \nabla \times (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})) \\ + \frac{1}{ReDa} (\nabla \times \mathbf{v} + Fo|\mathbf{v}|\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \nabla \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Utilizando a definição de vorticidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega_z) \\ + \frac{1}{ReDa} (\omega_z + Fo|\mathbf{v}|\omega_z) = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \end{aligned} \quad (3.11)$$

O produto  $\nabla \times \nabla$  é igual a 0, logo os termos  $\nabla \times \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2}$  e  $-\nabla \times \nabla p$  desaparecem da equação:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega_z) + \frac{1}{ReDa} (\omega_z + Fo|\mathbf{v}|\omega_z) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.12)$$

O termo  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \omega_z)$  pode ser reescrito com  $\mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z - \omega_z \cdot \nabla \mathbf{v}$ , logo a equação fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z - \omega_z \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{ReDa} (\omega_z + Fo|\mathbf{v}|\omega_z) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.13)$$

Para o caso bidimensional, o termo  $-\omega_z \cdot \nabla \mathbf{v}$  é igual a 0, logo a forma final da equação de Brinkman-Forchheimer adimensional para a formulação corrente-vorticidade é dada por:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z + \frac{1}{ReDa} (\omega_z + Fo|\mathbf{v}|\omega_z) = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \quad (3.14)$$

### 3.1.3 Equação de transporte de vorticidade generalizada

Nota-se que a equação 3.14 e a equação 3.7 podem ser unificadas em uma só equação com a adição de um termo de ativação  $\epsilon$ , que é igual a unidade para meios porosos e igual a zero para meios não porosos. Assim, a forma generalizada da equação de transporte de vorticidade é dada por:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z + \frac{1}{ReDa} (\omega_z + Fo|\mathbf{v}|\omega_z) \epsilon = \frac{1}{Re} \nu \nabla^2 \omega_z \quad (3.15)$$

## 3.2 Método Numérico

As equações 2.18, 2.19, 2.19, 2.20 e 3.15 se encontram na formulação forte. Para a utilização do método dos elementos finitos neste trabalho, elas deverão ser transformadas na formulação fraca através dos passos citados anteriormente.

### 3.2.1 Formulação fraca da equação de transporte de vorticidade generalizada

O primeiro passo a ser realizado é igualar a equação 3.15 a 0, aplicar a função peso  $w(x, y)$  e realizar a integração por todo o domínio ( $\Omega$ ). Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} w \left( \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z + \frac{1}{ReDa} (\omega_z + Fo|\mathbf{v}|\omega_z) \epsilon - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z \right) d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

Aplicando a propriedade distributiva da função peso e separando cada termo da integral tem-se:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \omega_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{1}{ReDa} \omega_z \epsilon d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{1}{ReDa} F_o |\mathbf{v}| \omega_z \epsilon d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

O termo  $-\int_{\Omega} w \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega_z d\Omega$  pode ter sua ordem reduzida a partir da utilização do teorema de Green [16], desta forma, integra-se este termo por partes e ele é dividido em uma integral no domínio ( $\Omega$ ) e uma integral no contorno ( $\Gamma$ ). Logo a equação fica da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \omega_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{1}{ReDa} \omega_z \epsilon d\Omega + \int_{\Omega} w \frac{1}{ReDa} F_o |\mathbf{v}| \omega_z \epsilon d\Omega - \int_{\Gamma} w \frac{1}{Re} \nabla \omega_z d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \frac{1}{Re} \nabla \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

O próximo passo é definir a função peso ( $w(x, y)$ ) e a função vorticidade ( $\omega_z(x, y)$ ) como combinações lineares das funções de interpolação (funções de forma), de modo que:

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(x, y) w_i(t) \quad (3.19)$$

$$\omega_z(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} N_j(x, y) \omega_{z_j}(t) \quad (3.20)$$

$N_i$  e  $N_j$  são as funções de forma e  $w_i$  e  $\omega_{z_j}$  são constantes espaciais a serem determinadas pelo método de interpolação. O próximo passo é discretizar o domínio e, conseqüentemente, as equações 3.19 e 3.20. Neste momento as igualdades deixam de ser válidas e as equações se tornam aproximações, onde o limite superior dos somatórios é o número de nós da malha ( $n$ ). Este passo explicita a relação entre o refino da malha (número de elementos e nós) e a convergência da solução encontrada. As equações 3.19 e 3.20 tornam-se:

$$w(x, y) \approx \sum_{i=0}^n N_i(x, y) w_i \quad (3.21)$$

$$\omega_z(x, y) \approx \sum_{j=0}^n N_j(x, y)\omega_{z_j} \quad (3.22)$$

Aplicando as definições de 3.21 e 3.22 em 3.18, tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n N_j w_i \frac{\partial N_i \omega_{z_i}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n N_j w_i \mathbf{v} \cdot \nabla (N_i \omega_{z_i}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n N_j w_i \frac{1}{ReDa} N_i \omega_{z_i} \epsilon d\Omega + \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n N_j w_i \frac{1}{ReDa} F_o |\mathbf{v}| N_i \omega_{z_i} \epsilon d\Omega \\ & - \int_{\Gamma} \sum_i^n \sum_j^n (N_j w_i) \frac{1}{Re} \nabla (N_i \omega_{z_i}) d\Gamma + \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n \nabla (N_j w_i) \cdot \frac{1}{Re} \nabla (N_i \omega_{z_i}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Neste momento, utiliza-se o método de Galerkin para definir as funções de forma. Neste método a função  $N_i$  é definida como igual a função  $N_j$ , assim os somatórios  $\sum_{j=0}^n$  e  $\sum_{i=0}^n$  da equação 3.23 podem ser unidos e substituídos por um somatório dos elementos analisados ( $\sum_e$ ). Além disso, pode-se dividir ambos os lados da equação pela função peso ( $w_i$ ) e retirar as constantes das integrais. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_e \frac{\partial \omega_{z_i}}{\partial t} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_e \omega_{z_i} \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega} N_j \nabla N_i d\Omega \\ & + \sum_e \frac{1}{ReDa} \omega_{z_i} \epsilon \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_e \frac{1}{ReDa} F_o |\mathbf{v}| \omega_{z_i} \epsilon \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \\ & - \sum_e \frac{1}{Re} \omega_{z_i} \int_{\Gamma} N_j \nabla N_i d\Gamma + \sum_e \frac{1}{Re} \omega_{z_i} \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como as condições de contorno impostas aos sistemas estudados se limitarão a condições de Dirichlet, conforme explicado em 2.5.2, o termo onde aparece a integral de contorno assume o valor de zero, visto que  $w_j = 0$ . Desta forma, a equação fica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \sum_e \frac{\partial \omega_{z_i}}{\partial t} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_e \omega_{z_i} \mathbf{v} \cdot \int_{\Omega} N_j \nabla N_i d\Omega \\ & + \sum_e \frac{1}{ReDa} \omega_{z_i} \epsilon \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_e \frac{1}{ReDa} F_o |\mathbf{v}| \omega_{z_i} \epsilon \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \\ & + \sum_e \frac{1}{Re} \omega_{z_i} \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

De forma a simplificar as equações, são aplicadas as seguintes definições de elementos finitos:

$$m_{i,j}^e = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (3.26)$$

$$g_{i,j}^e = \int_{\Omega} N_j \nabla N_i d\Omega \quad (3.27)$$

$$k_{i,j}^e = \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega \quad (3.28)$$

Onde  $m_{i,j}^e$ ,  $g_{i,j}^e$  e  $k_{i,j}^e$  são os valores de cada elemento das matrizes globais  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{K}$ , respectivamente. A matriz  $\mathbf{M}$  é conhecida como matriz de massa; a matriz  $\mathbf{G}$  é conhecida como matriz do gradiente; a matriz  $\mathbf{K}$  é conhecida como matriz de rigidez ou matriz de viscosidade. O desenvolvimento numérico destas matrizes para a malha utilizada será explicado posteriormente em 3.2.6.

Substituindo as definições 3.26, 3.27 e 3.28 em 3.25 e omitindo os somatórios, tem-se a equação de transporte de vorticidade para cada elemento:

$$\frac{\partial \omega_{z_i}}{\partial t} m_{i,j}^e + \omega_{z_i} \mathbf{v} \cdot g_{i,j}^e + \frac{1}{ReDa} (\omega_{z_i} \epsilon m_{i,j}^e + F_o |\mathbf{v}| \omega_{z_i} \epsilon m_{i,j}^e) + \frac{1}{Re} \omega_{z_i} k_{i,j}^e = 0 \quad (3.29)$$

A derivada temporal de  $\omega_{z_i}$  pode ser discretizada através do método das diferenças progressivas [17]:

$$\frac{\partial \omega_{z_i}}{\partial t} = \frac{\omega_{z_i}^{n+1} - \omega_{z_i}^n}{\Delta t} \quad (3.30)$$

Deste modo, a equação 3.29 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left( m_{i,j}^e + \omega_{z_i} \mathbf{v} \cdot g_{i,j}^e + \frac{1}{ReDa} (\epsilon m_{i,j}^e + F_o |\mathbf{v}| \epsilon m_{i,j}^e) + \frac{1}{Re} k_{i,j}^e \right) \omega_{z_i}^{n+1} = \frac{\omega_{z_i}^n}{\Delta t} m_{i,j}^e \quad (3.31)$$

Esta formulação de diferenças finitas é chamada de formulação implícita, ela relaciona os valores futuros da função com os valores presentes e outras variáveis. Ela possui uma maior estabilidade numérica em comparação com a forma explícita, permitindo intervalos de discretização maiores sem comprometer a precisão [5].

A equação 3.31 é a equação para um único elemento do domínio. Uma equação global pode ser escrita de forma matricial utilizando os conceitos de matrizes globais e aplicando as condições de contorno:

$$\left( \mathbf{M} + \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} + \frac{1}{ReDa} (\mathbf{E}\mathbf{M} + F_o \mathbf{U}_i \mathbf{E}\mathbf{M}) + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \right) \omega_{z_i}^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_{z_i}^n + c.c \quad (3.32)$$

O vetor  $\mathbf{E}$  é uma matriz diagonal de dimensão  $n \times n$  onde os elementos da diagonal principal são iguais a unidade para as linhas referentes a elementos do domínio poroso e iguais a zero para as linhas referentes a elementos do domínio não poroso. O vetor  $\mathbf{U}$  é uma matriz diagonal de dimensão  $n \times n$  onde os elementos da diagonal principal são iguais ao módulo da velocidade do elemento referente a sua linha.

O termo de convecção  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}$  pode ainda ser expandido para identificação das matrizes do gradiente nas direções x e y:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{G} = v_{x_i} \mathbf{I}\mathbf{G}_x + v_{y_i} \mathbf{I}\mathbf{G}_y \quad (3.33)$$

A matriz  $\mathbf{I}$  representa a matriz identidade, com isso tornando  $v_x$  e  $v_y$  matrizes diagonais.

Desta forma, a equação de transporte de vorticidade generalizada para o MEF fica da seguinte maneira:

$$\left( \mathbf{M} + v_{x_i} \mathbf{I}\mathbf{G}_x + v_{y_i} \mathbf{I}\mathbf{G}_y + \frac{1}{ReDa} (\mathbf{E}\mathbf{M} + F_o \mathbf{U}_i \mathbf{E}\mathbf{M}) + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \right) \omega_{z_i}^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_{z_i}^n + c.c \quad (3.34)$$

### 3.2.2 Formulação fraca da função corrente

De maneira análoga ao que foi feito para a equação de transporte de vorticidade, o primeiro passo a ser realizado é igualar a equação 2.20 a 0, aplicar a função peso  $w(x, y)$  e realizar a integração por todo o domínio ( $\Omega$ ). Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} w (\omega_z + \nabla^2 \psi) d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

Aplicando todos os passos seguidos no desenvolvimento anterior, a equação para cada elemento é dada por:

$$-k_{i,j}^e \psi_i + m_{i,j}^e \omega_{z_i} = 0 \quad (3.36)$$

E a equação global é dada por:

$$\mathbf{K}\psi_i = \mathbf{M}\omega_{z_i} + c.c \quad (3.37)$$

Nota-se que a equação não apresenta derivada temporal, logo ela é constante para cada passo de tempo da equação de transporte de vorticidade.

### 3.2.3 Formulação fraca das velocidades

De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, o primeiro passo a ser realizado é igualar as equações 2.18 a 0, aplicar a função peso  $w(x, y)$  e realizar a integração por todo o domínio ( $\Omega$ ). Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega} w \left( v_x - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} w \left( v_y + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) d\Omega = 0 \quad (3.38)$$

Aplicando todos os passos seguidos nos desenvolvimentos anteriores, as equações para cada elemento são dadas por:

$$m_{i,j}^e v_x - g_{y_{i,j}}^e \psi_i = 0 \quad \text{e} \quad m_{i,j}^e v_y + g_{x_{i,j}}^e \psi_i = 0 \quad (3.39)$$

E a equação global é dada por:

$$\mathbf{M}v_{x_i} = \mathbf{G}_y \psi_i + c.c. \quad \text{e} \quad \mathbf{M}v_{y_i} = -\mathbf{G}_x \psi_i + c.c. \quad (3.40)$$

### 3.2.4 Formulação fraca da condição de contorno de vorticidade

A condição de contorno de vorticidade varia para cada passo de tempo e é calculada a partir dos campos de velocidade, de acordo com a equação 2.19. De maneira

análoga ao que foi feito anteriormente, o primeiro passo a ser realizado é igualar a equação 2.19 a 0, aplicar a função peso  $w(x, y)$  e realizar a integração por todo o domínio ( $\Omega$ ). Assim, tem-se:

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (3.41)$$

Aplicando todos os passos seguidos nos desenvolvimentos anteriores, a equação para cada elemento é dada por:

$$m_{i,j}^e \omega_{z_i}^{c.c.} - g_{x_{i,j}}^e v_{y_i} + g_{y_{i,j}}^e v_{x_i} = 0 \quad (3.42)$$

E a equação global é dada por:

$$\mathbf{M}\omega_{z_i}^{c.c.} = \mathbf{G}_x v_{y_i} - \mathbf{G}_y v_{x_i} \quad (3.43)$$

### 3.2.5 Sistema de equações completo

Com as equações desenvolvidas anteriormente, tem-se o sistema de equações numéricas acopladas a ser solucionado:

- Equação de Transporte de Vorticidade Generalizada

$$\left( \mathbf{M} + v_{x_i} \mathbf{I} \mathbf{G}_x + v_{y_i} \mathbf{I} \mathbf{G}_y + \frac{1}{ReDa} (\mathbf{E} \mathbf{M} + F_o \mathbf{U}_i \mathbf{E} \mathbf{M}) + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \right) \omega_{z_i}^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega_{z_i}^n + c.c$$

- Corrente-Vorticidade

$$\mathbf{K} \psi_i = \mathbf{M} \omega_{z_i} + c.c$$

- Campo de Velocidade

$$\mathbf{M} v_{x_i} = \mathbf{G}_y \psi_i + c.c. \quad \text{e} \quad \mathbf{M} v_{y_i} = -\mathbf{G}_x \psi_i + c.c.$$

- Condição de contorno para a vorticidade

$$\mathbf{M}\omega_{z_i}^{c.c.} = \mathbf{G}_x v_{y_i} - \mathbf{G}_y v_{x_i}$$

### 3.2.6 Matrizes globais do MEF

As matrizes globais utilizadas nas equações desenvolvidas anteriormente dependem das funções de forma, que serão diferentes para cada tipo de malha. Neste trabalho, será utilizada uma malha triangular não estruturada com aproximação linear.

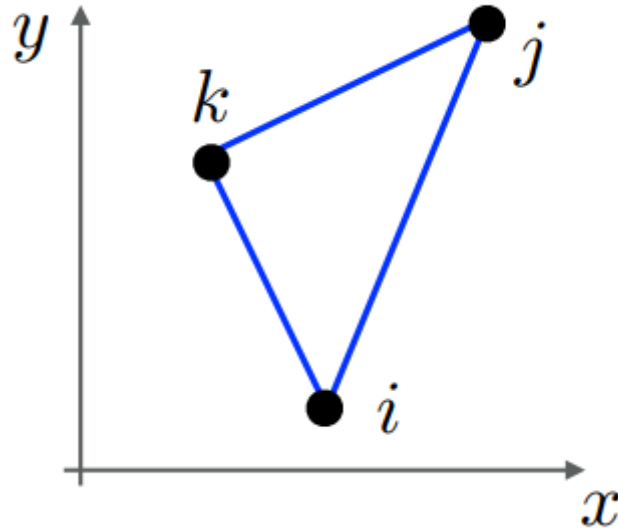


Figura 3.1: Elemento triangular genérico. Fonte: GUSTAVO, R. A., 2019 [5]

Para este tipo de elemento, as funções de forma podem ser escrita da seguinte maneira:

$$N(x, y) = [N_i, N_j, N_k] \quad (3.44)$$

Uma função de forma  $N_p$ , onde  $p$  representa um índice qualquer, pode ser expressa por:

$$N_p = \frac{1}{2A}(a_p + b_px + c_py) \quad (3.45)$$

A é a área do elemento e é expressa por:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Para as funções  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  os termos  $a_p$ ,  $b_p$  e  $c_p$  são dados por:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & b_i &= y_j - y_k & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k & b_j &= y_k - y_i & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i & b_k &= y_i - y_j & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

A partir destas definições, as matrizes globais do sistema ( $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G}_x$  e  $\mathbf{G}_y$ ) podem ser calculadas. A matriz de massa para cada elemento é dada por:

$$\mathbf{m}^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

As componentes  $x$  e  $y$  da matriz do gradiente para cada elemento são dados por:

$$\mathbf{g}_x^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}_y^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

E a matriz de elasticidade para cada elemento é dada por:

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_x^e + \mathbf{k}_y^e \quad (3.49)$$

Os termos  $\mathbf{k}_x^e$  e  $\mathbf{k}_y^e$  são dados por:

$$\mathbf{k}_x^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_y^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Com as definições acima é possível montar as matrizes globais do sistema e resolver o sistema linear de equações para cada passo de tempo do problema.

### 3.3 Gerador de malhas

Para gerar todas as malhas estudadas neste trabalho foi utilizado o software **Gmsh 3.0.6**. Este software é livre, de código aberto e robusto, amplamente utilizado para geração de malhas, principalmente em aplicações de simulação numérica,

como elementos finitos, volumes finitos e diferenças finitas. Ele fornece uma interface gráfica amigável para a criação de geometrias complexas e a geração de malhas correspondentes.

O processo de criação de uma malha usando o **Gmsh** envolve as seguintes etapas principais:

1. Definição da geometria: O Gmsh permite criar ou importar geometrias complexas por meio de sua interface gráfica. Isso pode envolver a criação de pontos, linhas e superfícies ou a importação de geometrias de arquivos CAD. Além disso, ele permite a criação da geometria através de sua linguagem de programação sem intermédio da interface gráfica. Os códigos para a geração das malhas utilizadas estão disponíveis no Apêndice A.
2. Definição das propriedades da malha: Nesta etapa, você pode especificar os parâmetros relacionados à qualidade da malha, como tamanho máximo e mínimo de elementos, refinamento local, ordem dos elementos e outras configurações específicas.
3. Geração da malha: Com a geometria e as configurações definidas, você pode gerar a malha usando os algoritmos de geração de malha disponíveis no Gmsh. Ele suporta diferentes tipos de elementos, como elementos lineares, quadráticos ou cúbicos, e permite controlar o refinamento em áreas específicas.
4. Visualização e exportação: Após a geração da malha, você pode visualizá-la na interface gráfica do Gmsh para verificar sua qualidade e corrigir possíveis problemas. Em seguida, a malha pode ser exportada no formato `.msh`, para ser utilizada pelo solver desenvolvido em *Python*.

### 3.4 Código numérico

O código numérico para a leitura de malhas, aplicação e resolução do MEF foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação *Python* na versão 3.11, o código completo encontra-se disponível no Apêndice A.

O código foi dividido em quatro partes principais, sendo elas:

1. Leitura das malhas geradas:

Neste passo foi utilizada a biblioteca *meshio* para a leitura do arquivo de malha e extração das propriedades da malha: vetores de coordenadas X e Y, matriz de conectividade (IEN), pontos de contorno, matriz de conectividade de contorno e uma lista com a superfície de cada elemento.

2. Montagem das matrizes globais do sistema (*Assembly*):

Neste passo as matrizes globais do sistema ( $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G}_x$  e  $\mathbf{G}_y$ ) e a matriz de ativação do meio poroso  $\mathbf{E}$  são geradas.

3. Resolução dos sistemas de equações:

Neste passo o processo iterativo é realizado e os sistemas de equações do MEF são resolvidos para cada passo de tempo.

4. Exportação de resultados:

Por fim, os resultados são exportados em formato *.vtk* e podem ser visualizados e pós-processados através do software **ParaView**.

## 3.5 Análise de Resultados

Os resultados gerados pelo solver desenvolvido foram analisados através do software **ParaView**. Ele é um software de código aberto amplamente utilizado para visualização e pós-processamento de análises numéricas, incluindo dados provenientes de simulações baseadas em elementos finitos. Ele permite visualizar e analisar conjuntos de dados complexos em 2D e 3D, oferecendo uma ampla gama de recursos de renderização e análise.

O software **Excel** foi utilizado para a manipulação dos dados e para o cálculo do erro entre as análises.

# Capítulo 4

## Validação do Código Numérico

Neste capítulo a implementação do código numérico será validada a partir da comparação entre os resultados gerados para problemas com soluções conhecidas na literatura. Serão dois problemas analisados, o escoamento entre placas planas (escoamento de Poiseuille) e o escoamento entre placas planas com meio poroso.

Para a análise quantitativa entre os resultados, serão utilizados os conceitos de média percentual absoluta do erro ( $\bar{\epsilon}$ ) e desvio padrão da média percentual absoluta do erro ( $\sigma_{std}$ ), que mede a dispersão das medidas [18].

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \frac{|x_{ref} - x|}{x_{ref}} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{std} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^N (x_{ref} - \bar{\epsilon})^2}{N}} \quad (4.2)$$

A execução do código e a computação dos resultados foram realizados em um computador pessoal com as seguintes especificações:

- Dell Vosotro 15 3515 ;
- Processador AMD Ryzen 7 3700U Radeon Vega Mobile Gfx 2.30 GHz, com 8 núcleos;
- Memória RAM de 8 Gb;
- Sistema Operacional Microsoft Windows 11.

## 4.1 Escoamento de Poiseuille

O Escoamento de Poiseuille é um modelo teórico para descrever o fluxo de um fluido viscoso entre duas placas planas, sob condições de escoamento laminar [2]. É baseado nas equações de Navier-Stokes para um fluido incompressível e newtoniano. O modelo esquemático do escoamento, incluindo suas condições de contorno, é apresentado na figura 4.1.

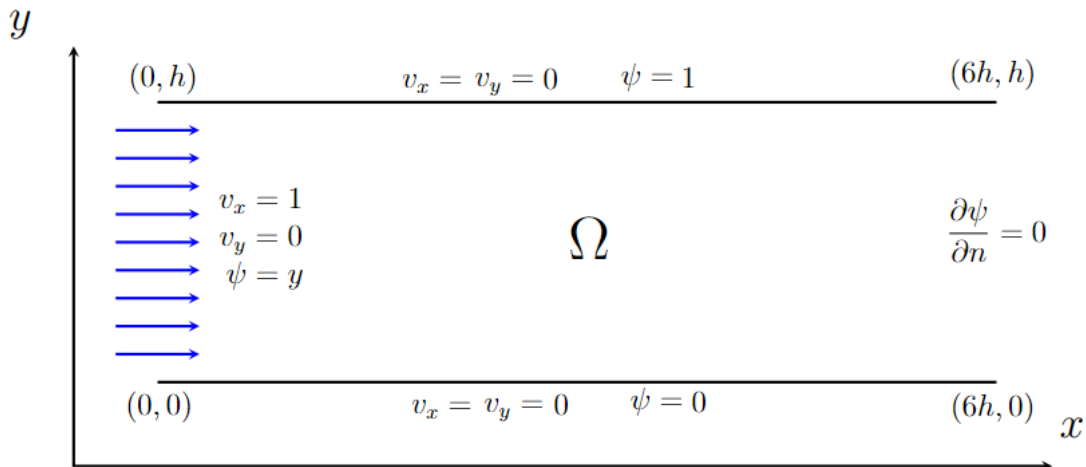


Figura 4.1: Condições de contorno escoamento de Poiseuille. Fonte: Autor.

A velocidade nas paredes do canal segue a condição de não escorregamento ( $v_x = v_y = 0$ ).

Por ser um escoamento simples, ele apresenta soluções analíticas para os campos de interesse. Em regime permanente e com o diâmetro da tubulação adimensionalizado igual a unidade ( $h = 1$ ), os campos de interesse podem ser descritos como uma função da coordenada  $y$  para qualquer coordenada  $x$  constante, e são dados pelas seguintes equações:

- Velocidade horizontal:  $v_x = 6y(1 - y)$
- Velocidade vertical:  $v_y = 0$
- Função corrente:  $\psi = y^2(3 - 2y)$
- Vorticidade:  $\omega_z = 6(2y - 1)$

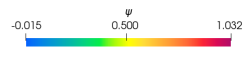
As equações acima serão utilizadas como critério de comparação com os resultados encontrados na análise utilizando o MEF.

A análise por elementos finitos foi feita utilizando um valor do número de Reynolds igual a 10, o passo de tempo ( $dt$ ) utilizado foi de 0.01 segundos e o total de iterações foi de 6000, resultando em uma simulação de 60 segundos de escoamento. Para testar a convergência da malha, foram utilizados diversos parâmetros de refino dos pontos (0.1, 0.08, 0.05 e 0.03), que influenciam diretamente na quantidade de nós e de elementos presentes na malha. A tabela 4.1 apresenta os parâmetros utilizados em cada simulação.

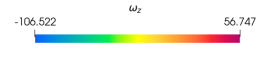
Simulação	Parâmetro de refino	Número de nós	Número de elementos	Tempo de execução [s]
1	0.1	859	1576	14231
2	0.08	1357	2536	14659
3	0.05	3274	6266	17361
4	0.03	9076	17682	18363

Tabela 4.1: Parâmetros das simulações do escoamento de Poiseuille.

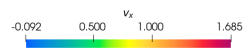
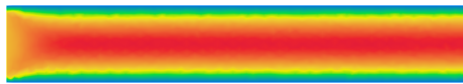
O resultado qualitativo de cada simulação é apresentado nas Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5.



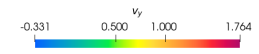
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )

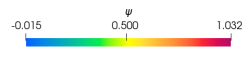


Velocidade horizontal ( $v_x$ )

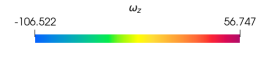


Velocidade vertical ( $v_y$ )

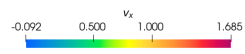
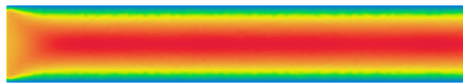
Figura 4.2: Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refino = 0.1.



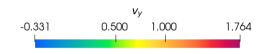
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )

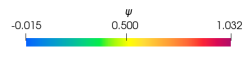


Velocidade horizontal ( $v_x$ )

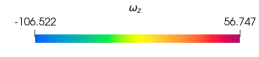


Velocidade vertical ( $v_y$ )

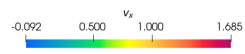
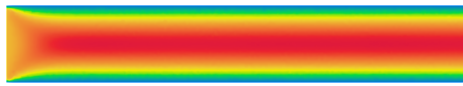
Figura 4.3: Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refinamento = 0.08.



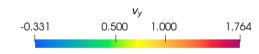
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )



Velocidade vertical ( $v_y$ )

Figura 4.4: Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refino = 0.05.



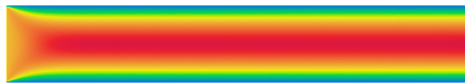
$\psi$   
-0.015 0.500 1.032

Função corrente ( $\psi$ )



$\omega_z$   
-106.522 56.747

Vorticidade ( $\omega_z$ )



$v_x$   
-0.092 0.500 1.000 1.685

Velocidade horizontal ( $v_x$ )



$v_y$   
-0.331 0.500 1.000 1.764

Velocidade vertical ( $v_y$ )

Figura 4.5: Escoamento de Poiseuille: Parâmetro de refino = 0.03.

Para uma análise quantitativa dos resultados, foram extraídos os resultados para cada variável no meio da tubulação ( $x = 3$ ), com um incremento de 0.01 em  $y$ , e comparados com a solução analítica para os mesmos valores de  $y$ . As Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 mostram a comparação dos resultados.

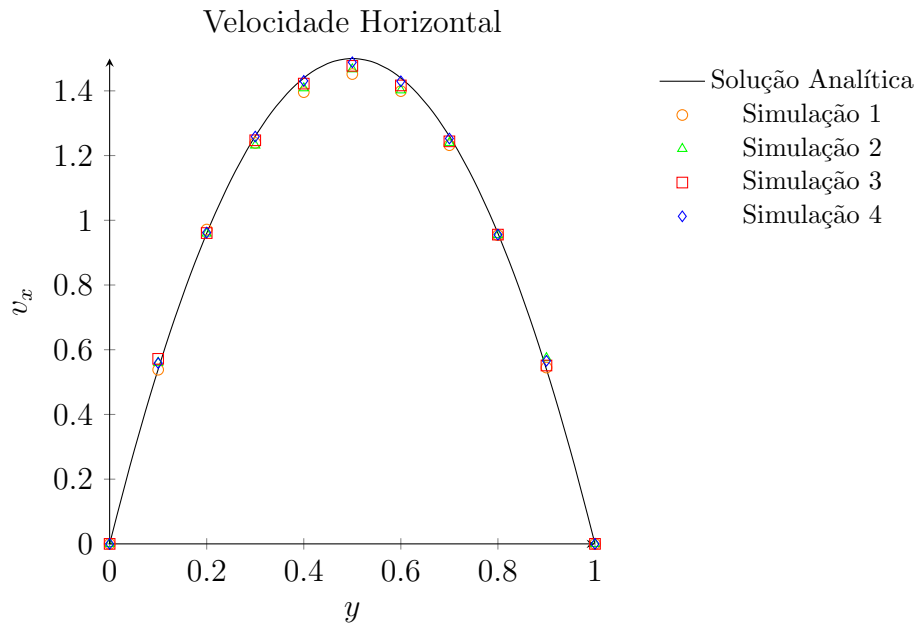


Figura 4.6: Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a velocidade horizontal no escoamento de Poiseuille

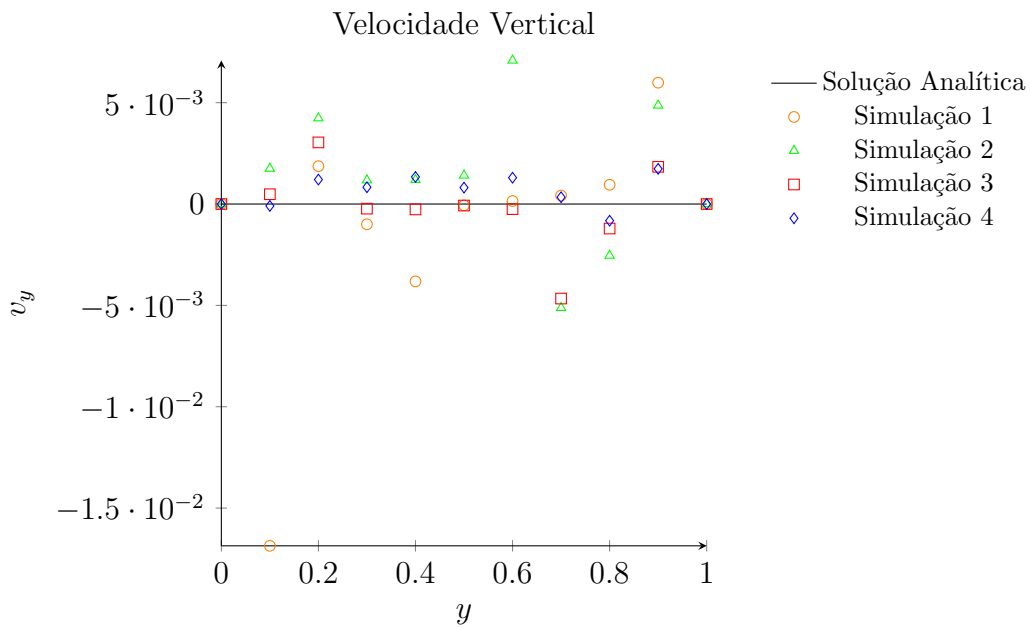


Figura 4.7: Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a velocidade vertical no escoamento de Poiseuille

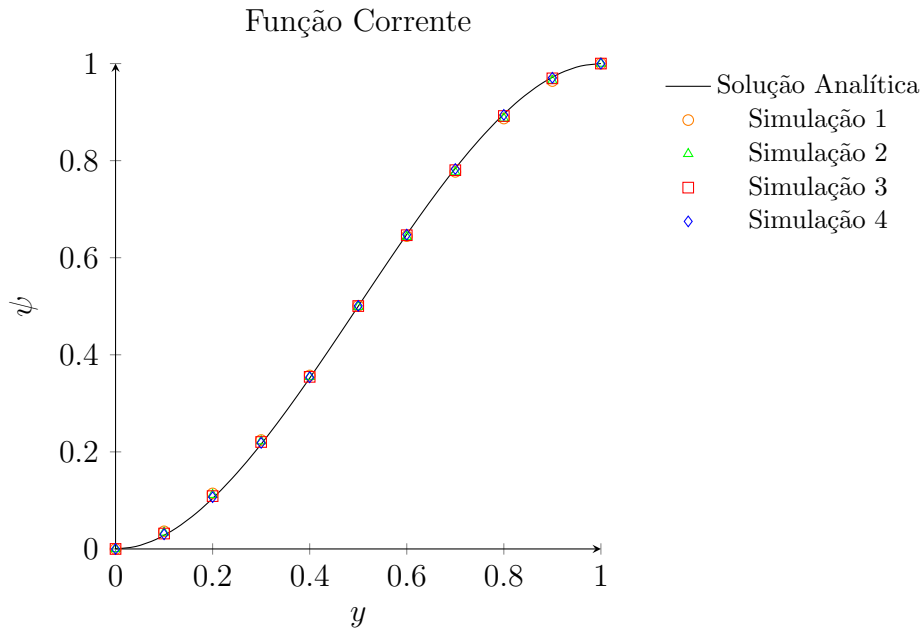


Figura 4.8: Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a função corrente no escoamento de Poiseuille

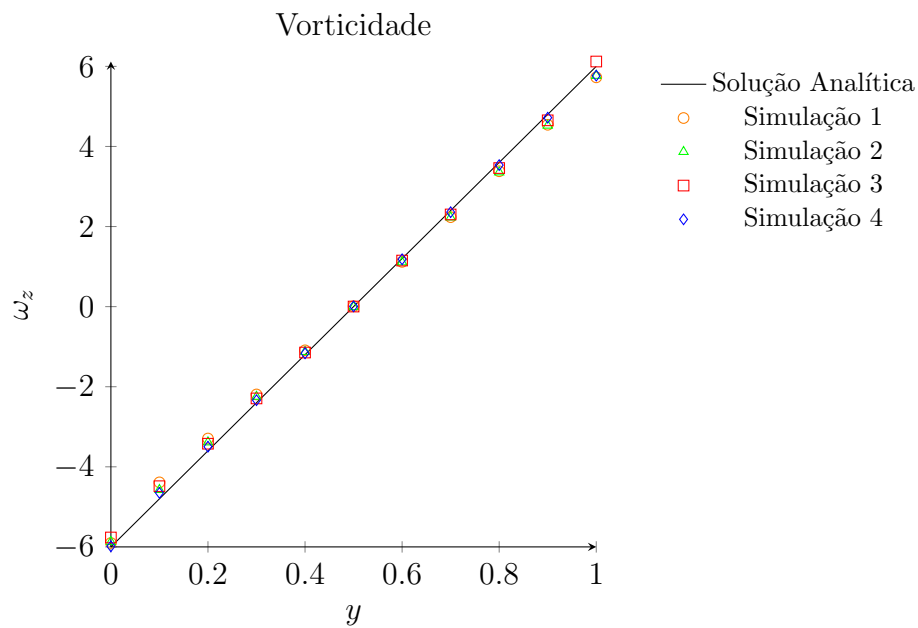


Figura 4.9: Comparação entre as soluções numéricas encontradas com a solução analítica para a vorticidade no escoamento de Poiseuille

Qualitativamente, os gráficos mostram uma convergência dos valores conforme o refino da malha aumenta. Para uma análise quantitativa concreta, foram utilizadas as equações 4.1 e 4.2. As Tabelas 4.2 e 4.3 apresentam os valores encontrados.

Simulação	$\bar{\epsilon}_{v_x}$ [%]	$\bar{\epsilon}_{v_y}$ [%]	$\bar{\epsilon}_{\psi}$ [%]	$\bar{\epsilon}_{\omega_z}$ [%]
1	2.14	0.00	3.89	8.09
2	2.06	0.00	2.55	6.81
3	1.19	0.00	1.80	4.41
4	0.64	0.00	1.03	2.70

Tabela 4.2: Média relativa do erro das simulações do escoamento de Poiseuille.

Simulação	$\sigma_{std_{v_x}}$ [%]	$\sigma_{std_{v_y}}$ [%]	$\sigma_{std_{\psi}}$ [%]	$\sigma_{std_{\omega_z}}$ [%]
1	1.99	3.89	6.15	6.71
2	1.26	2.55	3.70	5.67
3	0.99	1.80	2.79	2.85
4	0.69	1.03	1.61	1.12

Tabela 4.3: Desvio padrão da média relativa do erro das simulações do escoamento de Poiseuille.

Os resultados mostram uma clara convergência entre os valores das simulações numéricas e a solução analítica, validando parte da implementação do solver numérico. Além disso, eles demonstram a relação entre o refino da malha e o erro entre os resultados. Para obter resultados ainda mais acurados e precisos, seria possível refinar ainda mais a malha, porém, por conta das limitações de hardware e do aumento de tempo necessário para realizar cada análise, o parâmetro de refino da simulação 4 (0.03) se mostrou satisfatório e será utilizado nas próximas simulações numéricas deste trabalho, visto que esta simulação apresentou um erro percentual médio abaixo de 3% para todas as variáveis de interesse.

## 4.2 Escoamento de Poiseuille com meio poroso

O Escoamento de Poiseuille com meio poroso é parecido com o escoamento anterior, embora este escoamento apresente dois domínios distintos, sendo um não poroso ( $\Omega$ ) e um poroso ( $\Gamma$ ). O modelo esquemático do escoamento, incluindo suas

condições de contorno, é apresentado na figura 4.10.

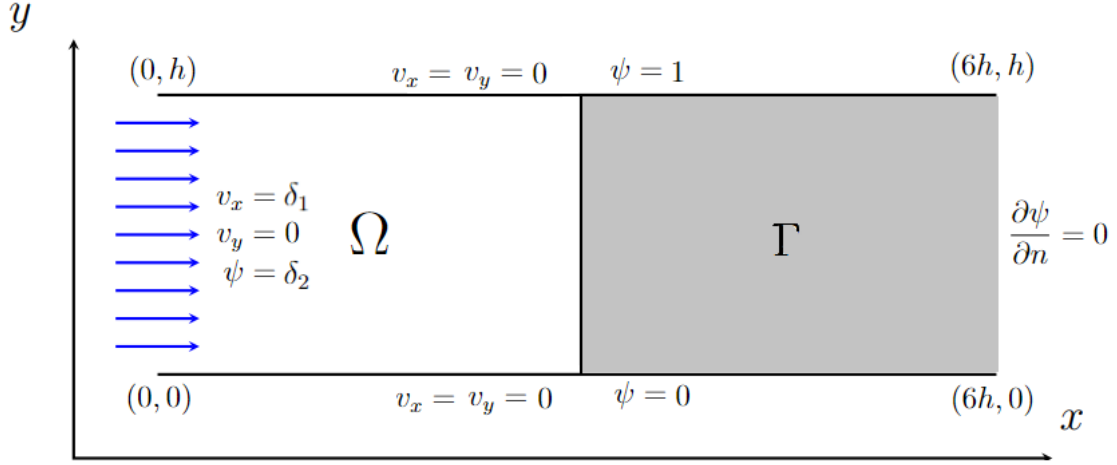


Figura 4.10: Condições de contorno escoamento de Poiseuille com meio poroso.  
Fonte: Autor.

A velocidade nas paredes do canal segue a condição de não escorregamento ( $v_x = v_y = 0$ ).

Os valores de  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são dados por:

$$\delta_1 = \frac{3U_0}{2} \left( 1 - \left[ \frac{2y-1}{h} \right]^2 \right) \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{3U_0}{2} \left( y - \frac{1}{h^2} \left[ \frac{4}{3}y^3 - 2y^2 + y \right] \right) \quad (4.3)$$

Onde  $U_0$  é a velocidade inicial do escoamento. Nota-se que este escoamento apresenta um perfil de velocidade quadrática na parede esquerda do domínio, isto reflete no valor da função corrente, que é dado através da equação 2.17.

Por ser um escoamento complexo, ele não apresenta soluções analíticas para os campos de interesse, desta forma, os resultados encontrados através das simulações numéricas para a velocidade horizontal foram comparados com resultados encontrados por [19]. A Tabela 4.4 apresenta os parâmetros físicos do problema para cada simulação.

Simulação	h	Re	Da	F <sub>o</sub>
1	1.0	100	0.025	2.0
2	1.0	100	0.0025	2.0
3	1.0	100	0.00025	2.0

Tabela 4.4: Parâmetros físicos do escoamento de Poiseuille com meio poroso.

Todas as simulações utilizaram a mesma malha, com 18037 nós e 35204 elementos, passo de tempo de 0.01s e tempo total de simulação de 60 segundos.

O resultado qualitativo de cada simulação é apresentado nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13.

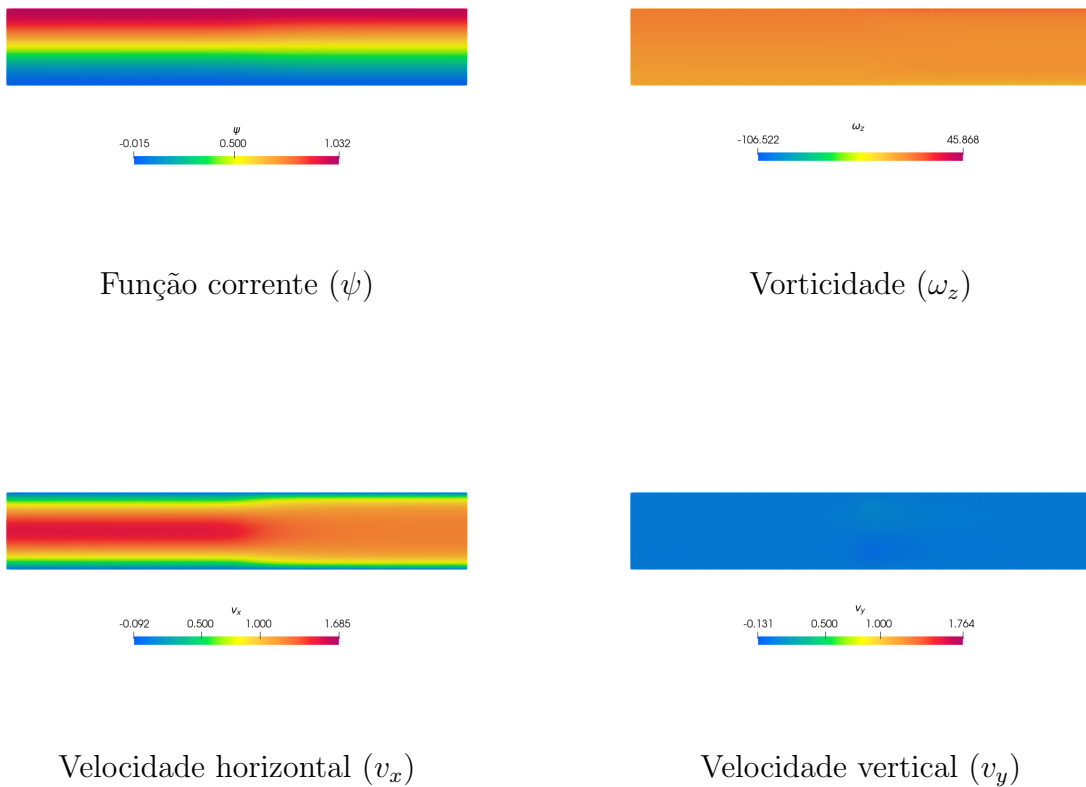
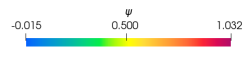
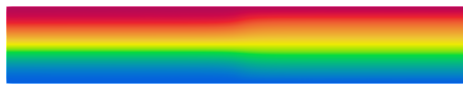
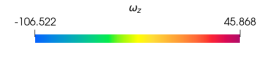


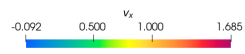
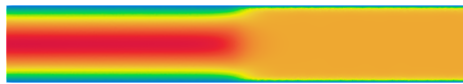
Figura 4.11: Escoamento de Poiseuille com meio poroso:  $Da = 0.025$ .



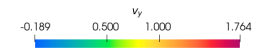
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )

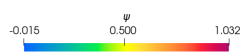
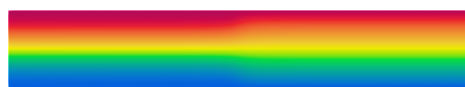


Velocidade horizontal ( $v_x$ )

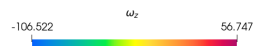


Velocidade vertical ( $v_y$ )

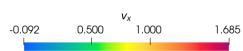
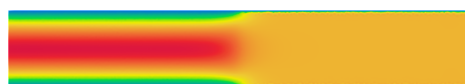
Figura 4.12: Escoamento de Poiseuille com meio poroso:  $Da = 0.0025$ .



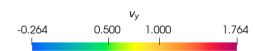
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )



Velocidade vertical ( $v_y$ )

Figura 4.13: Escoamento de Poiseuille com meio poroso:  $Da = 0.00025$ .

Para uma análise quantitativa dos resultados, foram extraídos os resultados para a velocidade horizontal no meio da tubulação ( $y = 0.5$ ), com um incremento de 0.01 em  $y$ , e comparados com os valores encontrados na literatura. A Figura 4.14 mostra a comparação dos resultados.

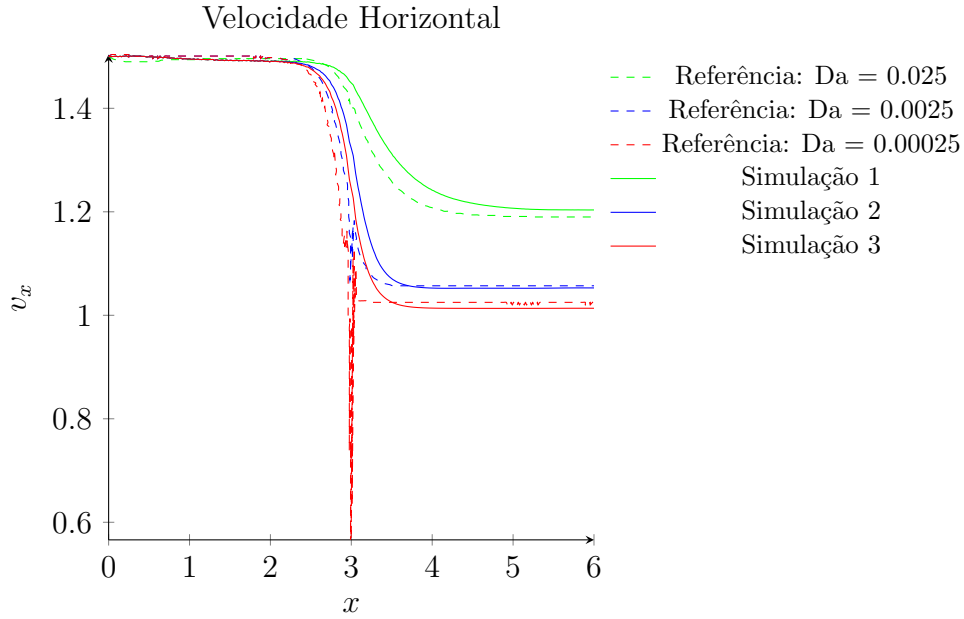


Figura 4.14: Comparação entre as soluções numéricas encontradas com as soluções encontradas na literatura para a velocidade horizontal no escoamento de Poiseuille com meio poroso

Qualitativamente, os gráficos mostram que há convergência entre os resultados na entrada e saída do escoamento, porém há uma clara divergência durante a transição entre o domínio não poroso e o domínio poroso ( $x = 2.5$  a  $x = 3.5$ ). Para uma análise quantitativa concreta, serão utilizadas as equações 4.1 e 4.2. A Tabela 4.5 apresenta os valores encontrados.

Simulação	$\bar{\epsilon}_{v_x}$ [%]	$\sigma_{std_{v_x}}$ [%]
1	1.63	0.02
2	3.61	0.32
3	19.76	7.74

Tabela 4.5: Média relativa e desvio padrão do erro das simulações do escoamento de Poiseuille com meio poroso.

Os resultados encontrados evidenciam a influência da divergência entre os valores encontrados na zona de transição, além disso, eles demonstram uma boa convergência entre os resultados para números de Darcy de ordem acima de  $10^{-4}$ . Para validar a influência do meio poroso na entrada e na saída do escoamento uma nova

análise foi realizada, excluindo os valores da zona de transição.

Simulação	$\bar{\epsilon}_{v_x}$ [%]	$\sigma_{std_{v_x}}$ [%]
1	1.27	0.01
2	0.37	0.11
3	0.66	3.65

Tabela 4.6: Média relativa e desvio padrão do erro das simulações do escoamento de Poiseuille com meio poroso ( $0 \leq x \leq 2.5$ ,  $3.5 \leq x \leq 6.0$ ).

Como este trabalho tem o intuito de avaliar a influência do meio poroso no escoamento como um todo, os resultados encontrados se mostraram satisfatórios, validando o método de análise utilizado. É importante ressaltar que a divergência nos resultados se deu por conta da limitação da formulação utilizada, frente à resolução das equações de Navier-Stokes realizada em [19]. É também importante ressaltar que, embora mais preciso, o modelo da literatura apresentou problemas de instabilidade numérica no ponto de transição entre os domínios ( $x = 3$ ) por conta da queda de pressão abrupta causada pelo meio poroso.

# Capítulo 5

## Filtro de Biocombustível

Existem diversos modelos de filtros disponíveis no mercado, com diversas geometrias diferentes.

Neste trabalho será utilizada uma geometria simplificada, onde os canais de entrada e saída do fluido são dispostos paralelamente, separados pelo meio poroso. O modelo esquemático do escoamento, incluindo suas condições de contorno, é apresentado na Figura 5.1.

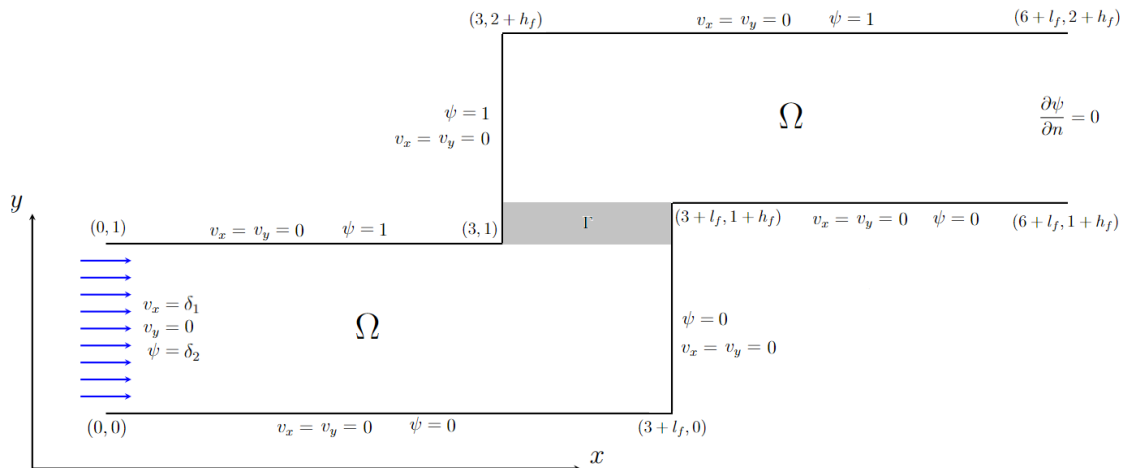


Figura 5.1: Condições de contorno para o escoamento no filtro de biocombustíveis.

Fonte: Autor.

Onde  $l_f$  e  $h_f$  são, respectivamente, a largura adimensional e a espessura adimensional do filtro.

A velocidade nas paredes do canal segue a condição de não escorregamento ( $v_x = v_y = 0$ ).

Os valores de  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são dados por:

$$\delta_1 = \frac{3U_0}{2} \left( 1 - \left[ \frac{2y-1}{h} \right]^2 \right) \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{3U_0}{2} \left( y - \frac{1}{h^2} \left[ \frac{4}{3}y^3 - 2y^2 + y \right] \right) \quad (5.1)$$

Onde  $U_0$  é a velocidade inicial do escoamento. Nota-se que este escoamento apresenta um perfil de velocidade quadrática na parede esquerda do domínio, isto reflete no valor da função corrente, que é dado através da equação 2.17.

Para entender a influência dos parâmetros geométricos do filtro no escoamento foram analisadas diversas simulações, variando tanto o comprimento do filtro, quanto sua altura. A Tabela 5.1 apresenta os parâmetros físicos do problema e os parâmetros da malha utilizada para cada simulação.

Tabela 5.1: Parâmetros físicos e da malha do escoamento no filtro de biocombustíveis.

Simulação	$l_f$	$h_f$	Número de nós	Número de elementos
1	1.0	0.05	15774	31512
2	1.0	0.075	15814	31592
3	1.0	0.1	15919	31802
4	1.0	0.125	15983	31930
5	1.0	0.15	16115	32194
6	1.5	0.05	18036	36036
7	1.5	0.075	18103	36170
8	1.5	0.1	18256	36476
9	1.5	0.125	18337	36638
10	1.5	0.15	18541	37046
11	2.0	0.05	20414	40792
12	2.0	0.075	20487	40938
13	2.0	0.1	20715	41394
14	2.0	0.125	20815	41594
15	2.0	0.15	21079	42122

Continua na próxima página.

**Tabela 5.1 – continuação da página anterior**

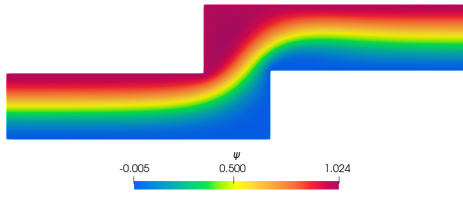
Simulação	$l_f$	$h_f$	Número de nós	Número de elementos
16	2.5	0.05	22712	45388
17	2.5	0.075	22801	45566
18	2.5	0.1	23077	46118
19	2.5	0.125	23219	46402
20	2.5	0.15	23536	47036
21	3.0	0.05	25007	49978
22	3.0	0.075	25132	50228
23	3.0	0.1	25444	50852
24	3.0	0.125	25609	51182
25	3.0	0.15	25989	51942

Todas as simulações utilizaram os valores de  $Re = 100$ ,  $Da = 0.05$ ,  $F_o = 2.0$ , passo de tempo igual a 0.01 segundos e tempo total de simulação igual a 30 segundos.

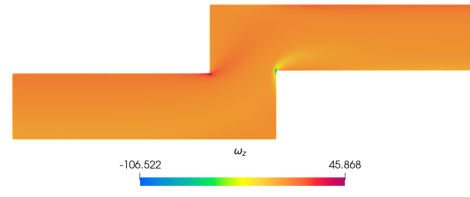
## 5.1 Resultados

### 5.1.1 Simulação 1

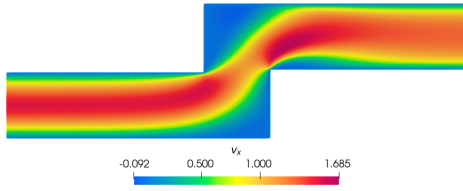
Conforme especificado na Tabela 5.1, a simulação 1 foi feita com um filtro de largura igual a 1.0 e espessura igual a 0.05. Os resultados da simulação estão na Figura 5.2.



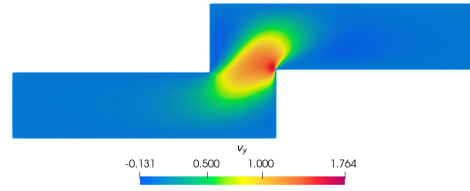
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

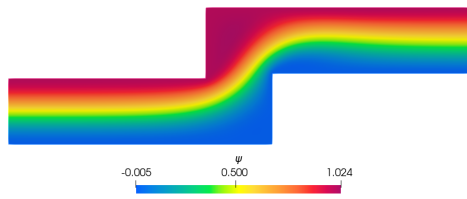


Velocidade vertical ( $v_y$ )

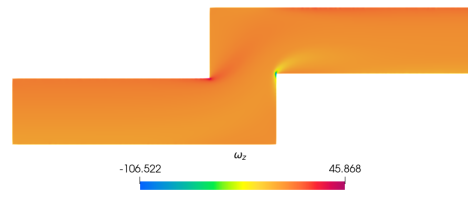
Figura 5.2: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.0$  e  $h_f = 0.05$

### 5.1.2 Simulação 2

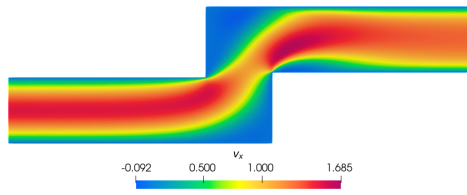
Conforme especificado na Tabela 5.1, a simulação 2 foi feita com um filtro de largura igual a 1.0 e espessura igual a 0.075. Os resultados da simulação estão na Figura 5.3.



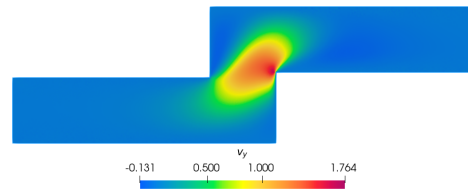
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

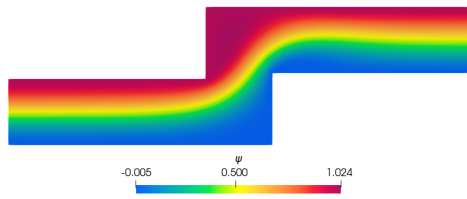


Velocidade vertical ( $v_y$ )

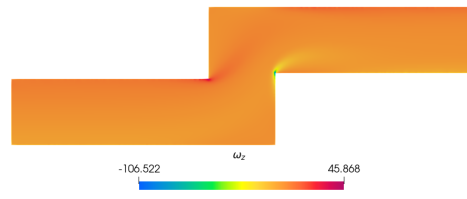
Figura 5.3: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.0$  e  $h_f = 0.075$

### 5.1.3 Simulação 3

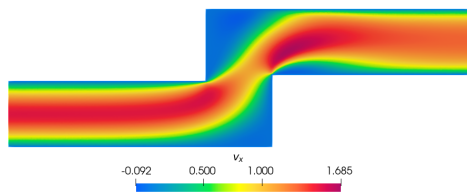
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 3 foi feita com um filtro de largura igual a 1.0 e espessura igual a 0.1. Os resultados da simulação estão na Figura 5.4.



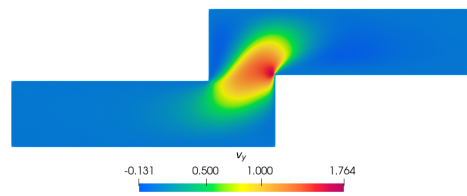
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

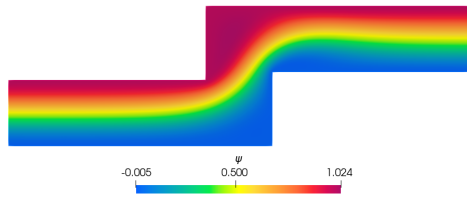


Velocidade vertical ( $v_y$ )

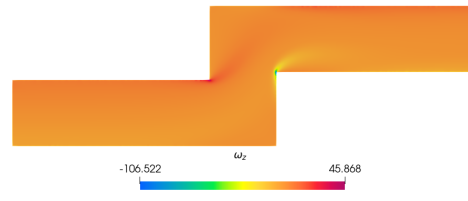
Figura 5.4: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.0$  e  $h_f = 0.1$

#### 5.1.4 Simulação 4

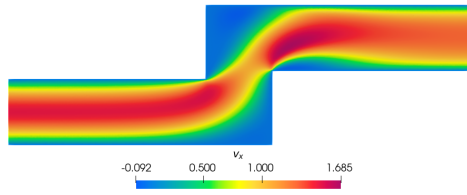
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 4 foi feita com um filtro de largura igual a 1.0 e espessura igual a 0.125. Os resultados da simulação estão na Figura 5.5.



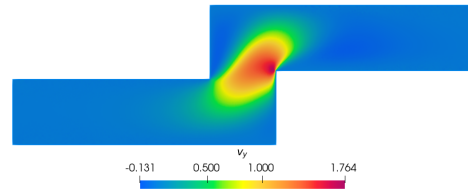
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

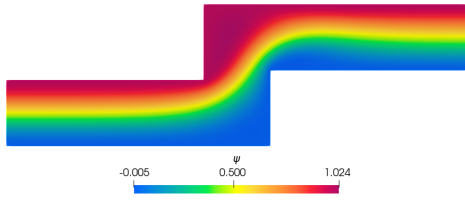


Velocidade vertical ( $v_y$ )

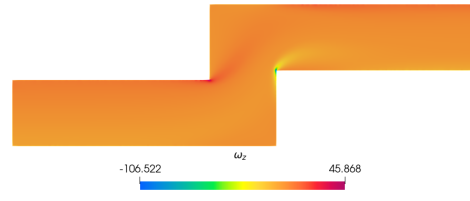
Figura 5.5: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.0$  e  $h_f = 0.125$

### 5.1.5 Simulação 5

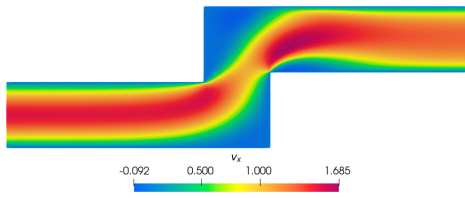
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 5 foi feita com um filtro de largura igual a 1.0 e espessura igual a 0.15. Os resultados da simulação estão na Figura 5.6.



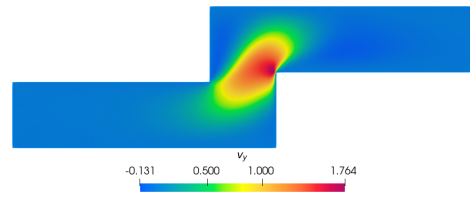
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

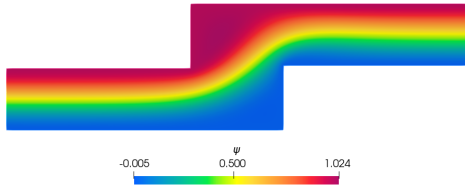


Velocidade vertical ( $v_y$ )

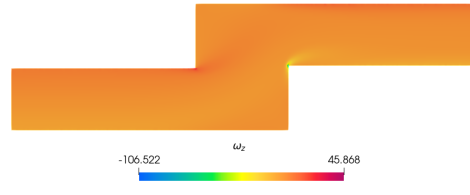
Figura 5.6: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.0$  e  $h_f = 0.15$

### 5.1.6 Simulação 6

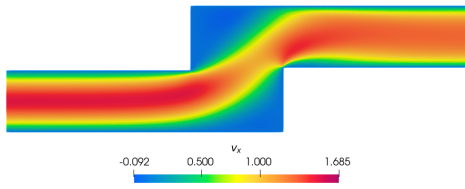
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 6 foi feita com um filtro de largura igual a 1.5 e espessura igual a 0.05. Os resultados da simulação estão na Figura 5.7.



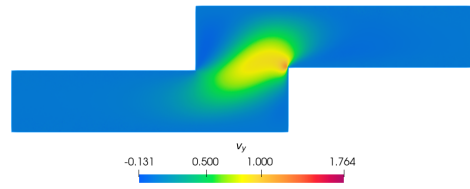
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

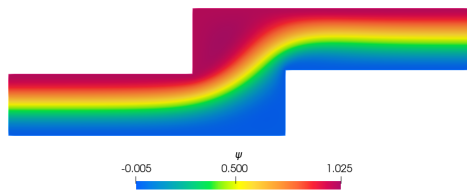


Velocidade vertical ( $v_y$ )

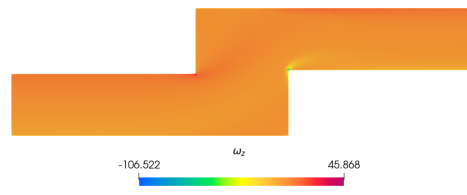
Figura 5.7: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.5$  e  $h_f = 0.05$

### 5.1.7 Simulação 7

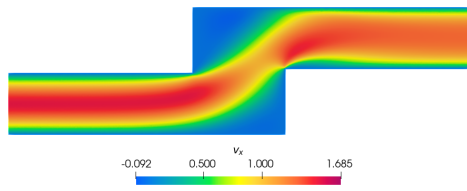
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 7 foi feita com um filtro de largura igual a 1.5 e espessura igual a 0.075. Os resultados da simulação estão na Figura 5.8.



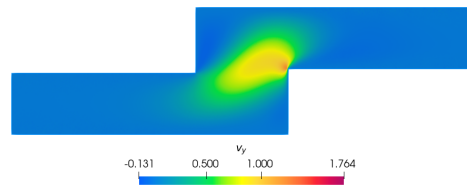
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

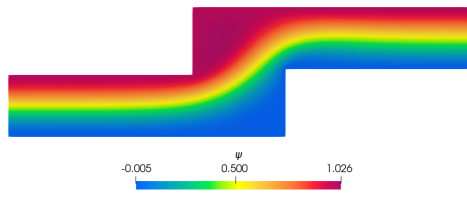


Velocidade vertical ( $v_y$ )

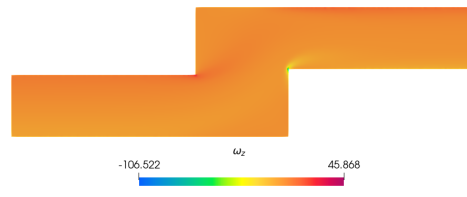
Figura 5.8: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.5$  e  $h_f = 0.075$

### 5.1.8 Simulação 8

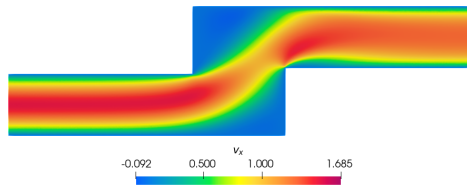
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 8 foi feita com um filtro de largura igual a 1.5 e espessura igual a 0.1. Os resultados da simulação estão na Figura 5.9.



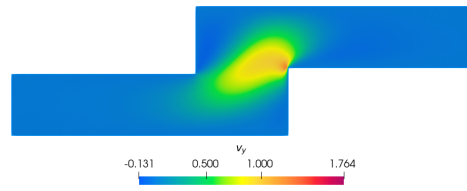
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

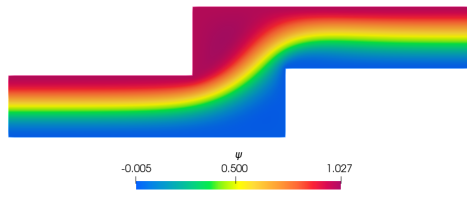


Velocidade vertical ( $v_y$ )

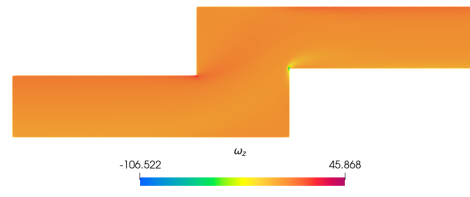
Figura 5.9: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.5$  e  $h_f = 0.1$

### 5.1.9 Simulação 9

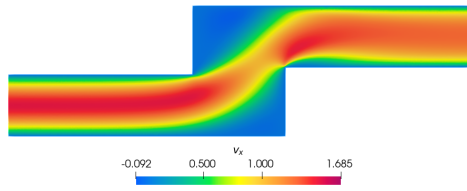
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 9 foi feita com um filtro de largura igual a 1.5 e espessura igual a 0.125. Os resultados da simulação estão na Figura 5.10.



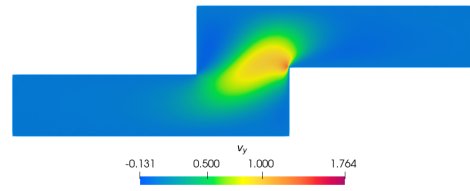
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

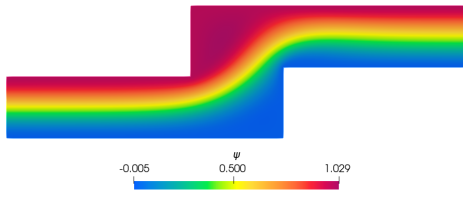


Velocidade vertical ( $v_y$ )

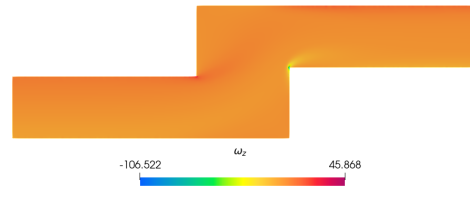
Figura 5.10: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.5$  e  $h_f = 0.125$

### 5.1.10 Simulação 10

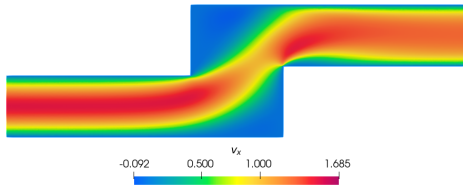
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 10 foi feita com um filtro de largura igual a 1.5 e espessura igual a 0.15. Os resultados da simulação estão na Figura 5.11.



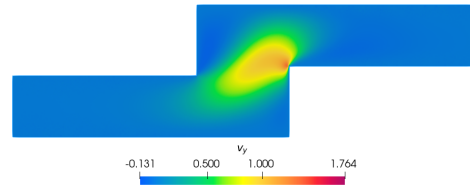
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

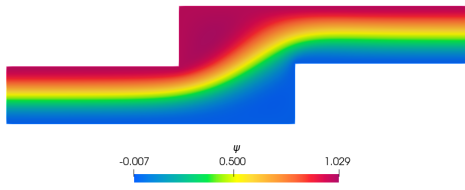


Velocidade vertical ( $v_y$ )

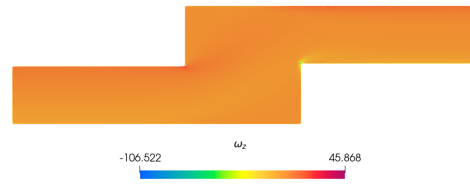
Figura 5.11: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 1.5$  e  $h_f = 0.15$

### 5.1.11 Simulação 11

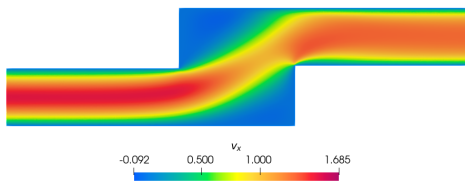
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 11 foi feita com um filtro de largura igual a 2.0 e espessura igual a 0.05. Os resultados da simulação estão na Figura 5.12.



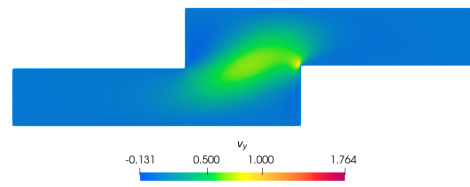
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

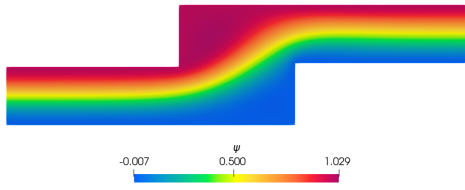


Velocidade vertical ( $v_y$ )

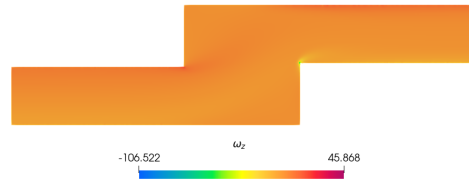
Figura 5.12: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.0$  e  $h_f = 0.05$

### 5.1.12 Simulação 12

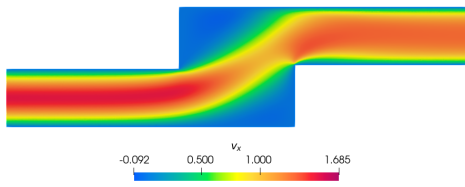
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 12 foi feita com um filtro de largura igual a 2.0 e espessura igual a 0.075. Os resultados da simulação estão na Figura 5.13.



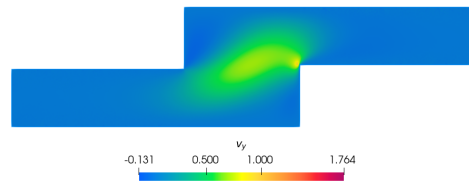
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

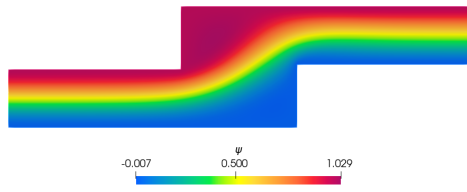


Velocidade vertical ( $v_y$ )

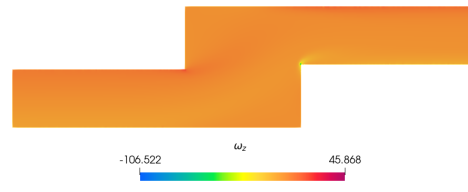
Figura 5.13: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.0$  e  $h_f = 0.075$

### 5.1.13 Simulação 13

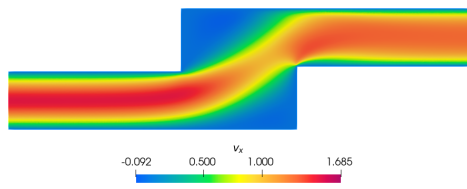
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 13 foi feita com um filtro de largura igual a 2.0 e espessura igual a 0.1. Os resultados da simulação estão na Figura 5.14.



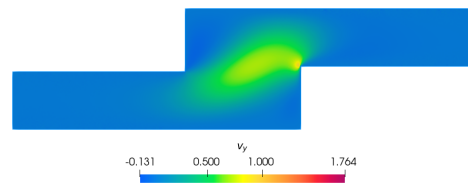
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

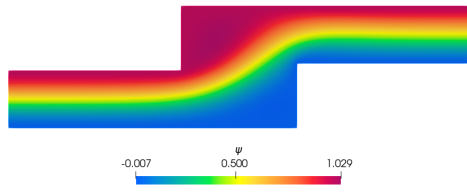


Velocidade vertical ( $v_y$ )

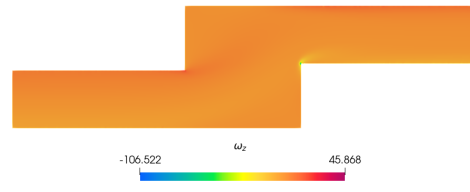
Figura 5.14: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.0$  e  $h_f = 0.1$

### 5.1.14 Simulação 14

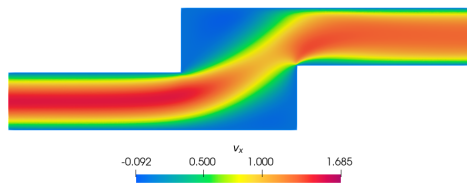
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 14 foi feita com um filtro de largura igual a 2.0 e espessura igual a 0.125. Os resultados da simulação estão na Figura 5.15.



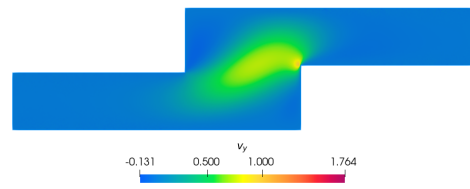
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

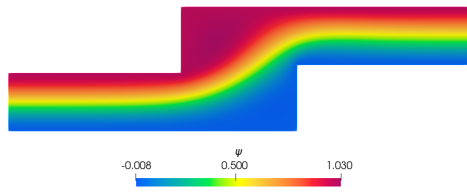


Velocidade vertical ( $v_y$ )

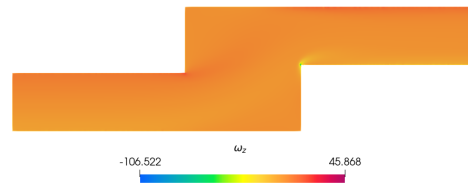
Figura 5.15: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.0$  e  $h_f = 0.125$

### 5.1.15 Simulação 15

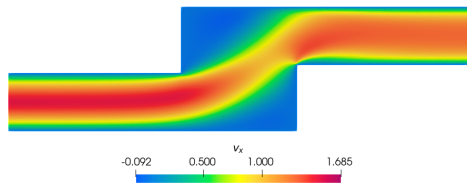
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 15 foi feita com um filtro de largura igual a 2.0 e espessura igual a 0.15. Os resultados da simulação estão na Figura 5.16.



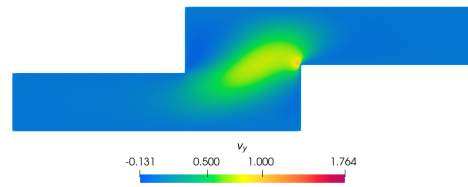
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

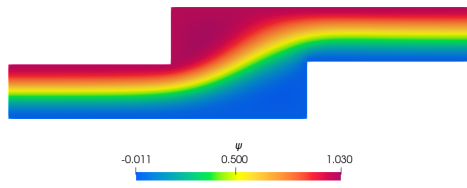


Velocidade vertical ( $v_y$ )

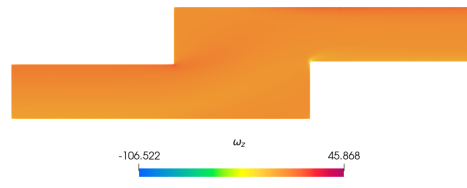
Figura 5.16: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.0$  e  $h_f = 0.15$

### 5.1.16 Simulação 16

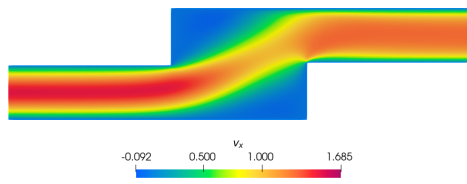
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 16 foi feita com um filtro de largura igual a 2.5 e espessura igual a 0.05. Os resultados da simulação estão na Figura 5.17.



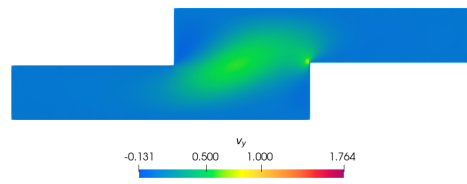
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

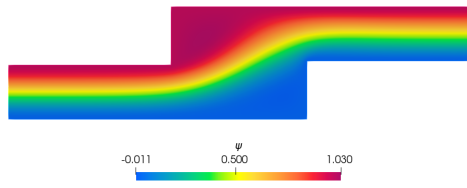


Velocidade vertical ( $v_y$ )

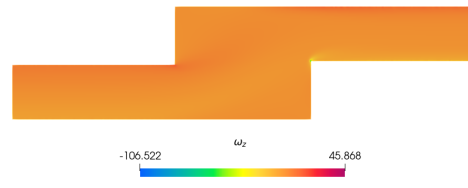
Figura 5.17: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.5$  e  $h_f = 0.05$

### 5.1.17 Simulação 17

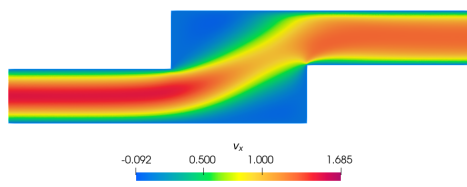
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 17 foi feita com um filtro de largura igual a 2.5 e espessura igual a 0.075. Os resultados da simulação estão na Figura 5.18.



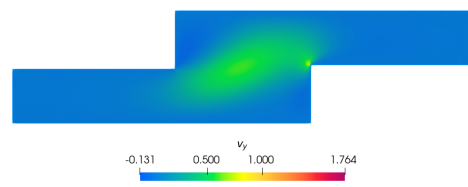
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

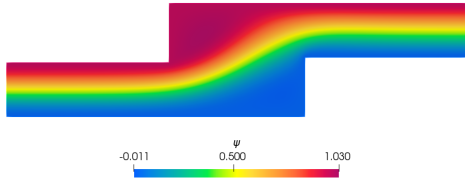


Velocidade vertical ( $v_y$ )

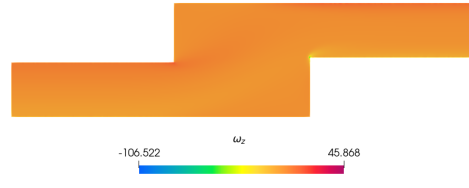
Figura 5.18: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.5$  e  $h_f = 0.075$

### 5.1.18 Simulação 18

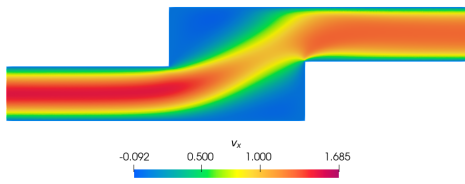
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 18 foi feita com um filtro de largura igual a 2.5 e espessura igual a 0.1. Os resultados da simulação estão na Figura 5.19.



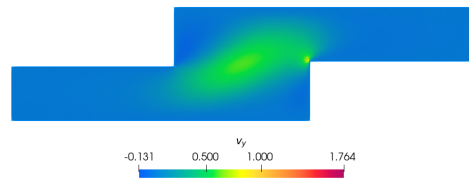
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

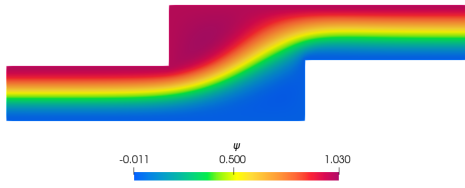


Velocidade vertical ( $v_y$ )

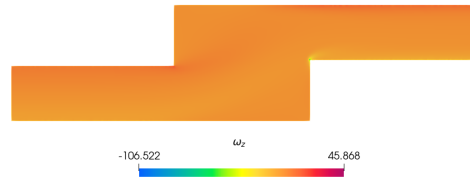
Figura 5.19: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.5$  e  $h_f = 0.1$

### 5.1.19 Simulação 19

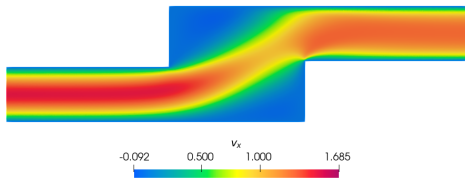
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 19 foi feita com um filtro de largura igual a 2.5 e espessura igual a 0.125. Os resultados da simulação estão na Figura 5.20.



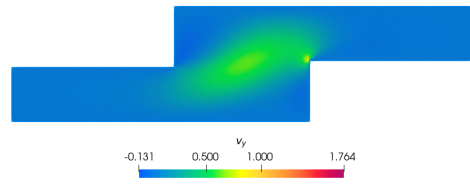
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

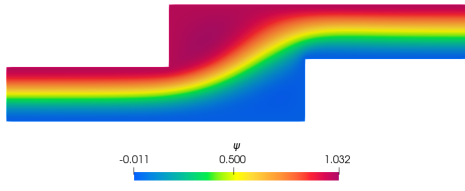


Velocidade vertical ( $v_y$ )

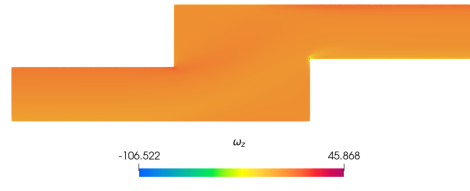
Figura 5.20: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.5$  e  $h_f = 0.125$

### 5.1.20 Simulação 20

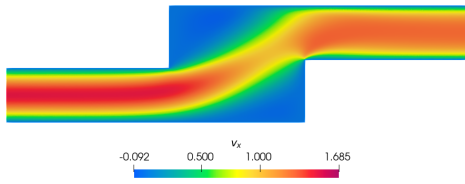
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 20 foi feita com um filtro de largura igual a 2.5 e espessura igual a 0.15. Os resultados da simulação estão na Figura 5.21.



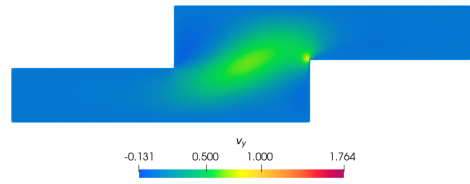
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

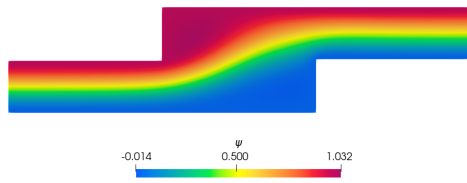


Velocidade vertical ( $v_y$ )

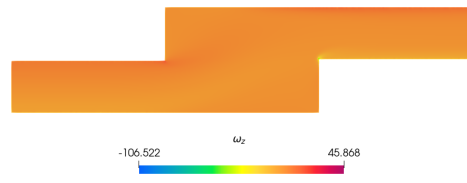
Figura 5.21: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 2.5$  e  $h_f = 0.15$

### 5.1.21 Simulação 21

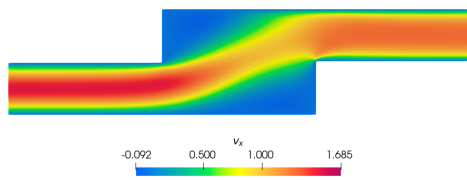
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 21 foi feita com um filtro de largura igual a 3.0 e espessura igual a 0.05. Os resultados da simulação estão na Figura 5.22.



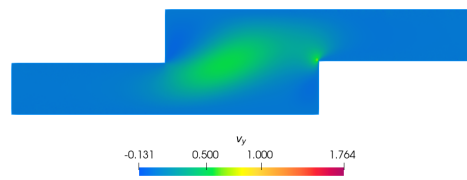
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

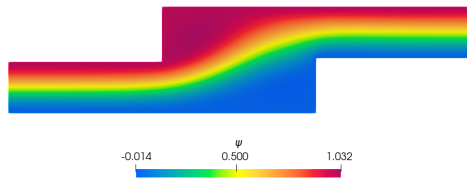


Velocidade vertical ( $v_y$ )

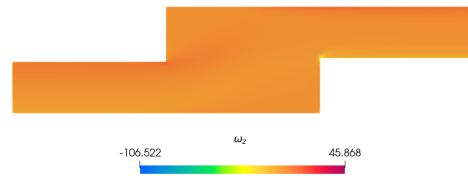
Figura 5.22: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 3.0$  e  $h_f = 0.05$

### 5.1.22 Simulação 22

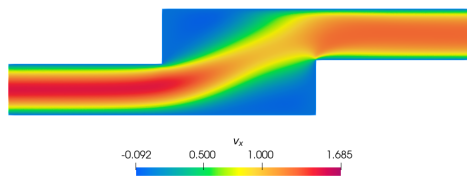
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 22 foi feita com um filtro de largura igual a 3.0 e espessura igual a 0.075. Os resultados da simulação estão na Figura 5.23.



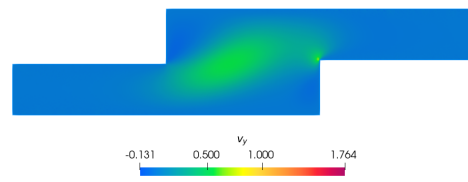
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )



Velocidade vertical ( $v_y$ )

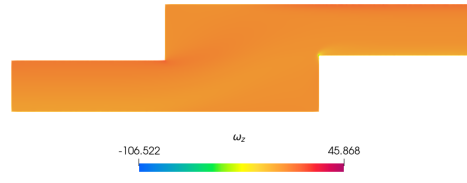
Figura 5.23: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 3.0$  e  $h_f = 0.075$

### 5.1.23 Simulação 23

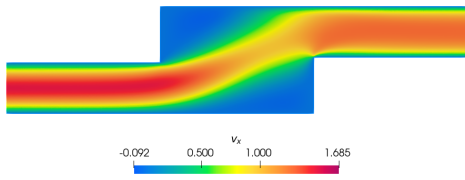
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 23 foi feita com um filtro de largura igual a 3.0 e espessura igual a 0.1. Os resultados da simulação estão na Figura 5.24.



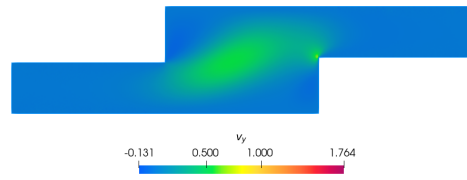
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

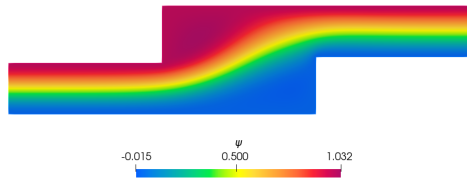


Velocidade vertical ( $v_y$ )

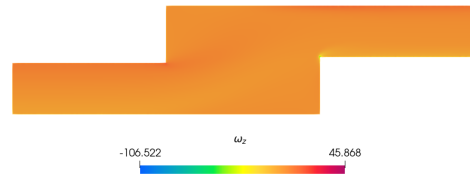
Figura 5.24: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 3.0$  e  $h_f = 0.1$

### 5.1.24 Simulação 24

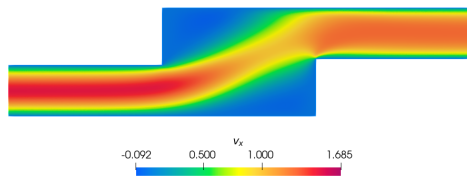
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 24 foi feita com um filtro de largura igual a 3.0 e espessura igual a 0.125. Os resultados da simulação estão na Figura 5.25.



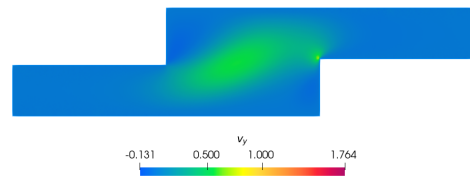
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )

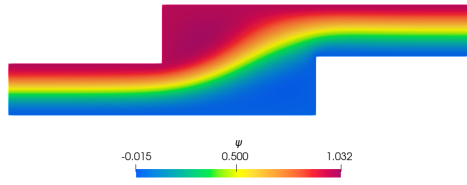


Velocidade vertical ( $v_y$ )

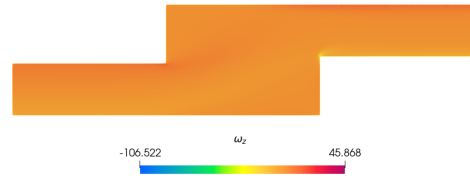
Figura 5.25: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 3.0$  e  $h_f = 0.125$

### 5.1.25 Simulação 25

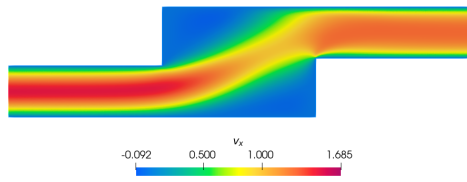
Conforme especificado na Tabela 5.1, a Simulação 25 foi feita com um filtro de largura igual a 3.0 e espessura igual a 0.15. Os resultados da simulação estão na Figura 5.26.



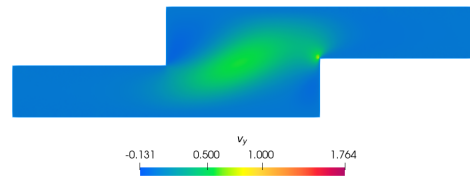
Função corrente ( $\psi$ )



Vorticidade ( $\omega_z$ )



Velocidade horizontal ( $v_x$ )



Velocidade vertical ( $v_y$ )

Figura 5.26: Visualização dos campos de interesse:  $l_f = 3.0$  e  $h_f = 0.15$

## 5.2 Comparação entre os resultados

Para analisar melhor os resultados, foi definido o conceito de taxa de redução para o filtro ( $\eta$ ). Este conceito é dado através da razão entre a velocidade máxima na entrada do escoamento ( $x = 1.5$ ) e a velocidade máxima na saída do escoamento ( $x = L_{total} - 1.5$ ).

$$\eta = \frac{v_{x_{saida}}^{max}}{v_{x_{entrada}}^{max}} \quad (5.2)$$

A partir do conceito de taxa de redução, foram realizados dois tipos de comparação. A primeira comparação foi feita entre  $\eta$  e a espessura do filtro, para cada valor de largura. A segunda comparação foi feita entre  $\eta$  e a largura do filtro, para cada valor de espessura.

O Gráfico 5.27 mostra a primeira comparação.

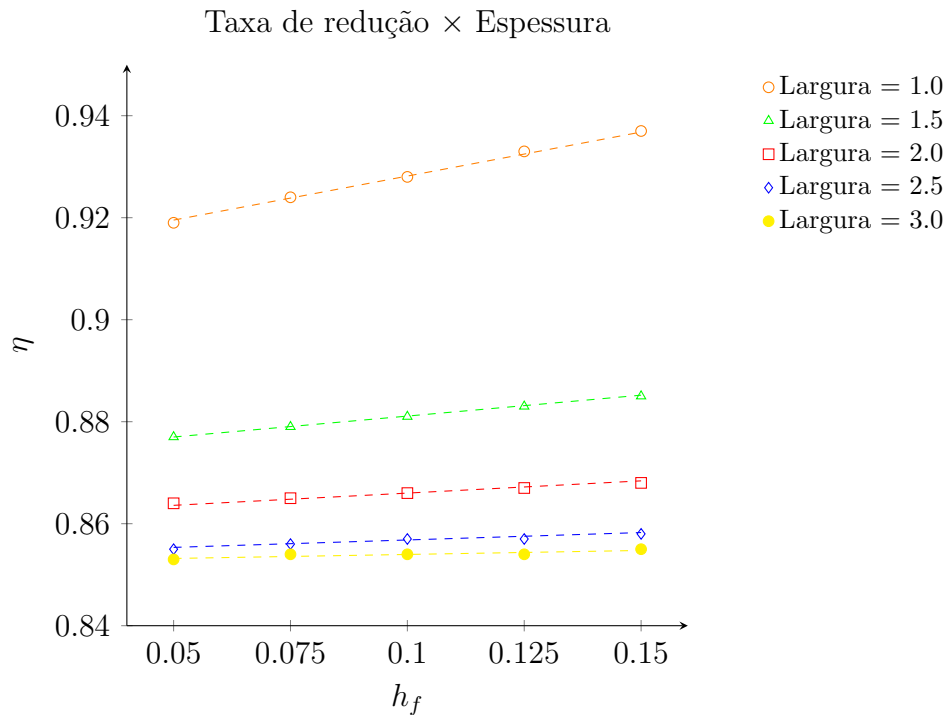


Figura 5.27: Comparação entre a taxa de redução de velocidade e a espessura do filtro

As linhas tracejadas foram feitas a partir da regressão linear dos valores para cada largura do filtro, elas são as linhas de tendência de cada gráfico [20]. A equação que gera cada linha de tendência se encontra abaixo:

$$y = ax + b \tag{5.3}$$

Os valores das constantes a e b para cada caso, junto à medida de  $R^2$  da regressão, podem ser visualizados na Tabela 5.2:

Largura ( $l_f$ )	a	b	$R^2$
1.0	0.173	0.911	0.998
1.5	0.082	0.873	0.995
2.0	0.048	0.861	0.999
2.5	0.029	0.854	0.998
3.0	0.016	0.852	0.996

Tabela 5.2: Constantes da regressão linear e o valor de  $R^2$ .

A partir dos dados encontrados, foi possível realizar as seguintes conclusões acerca da relação entre a espessura do filtro e a taxa de redução de velocidades:

1. Existe uma relação linear entre as duas grandezas;
2. A influência da variação de espessura do filtro diminui conforme a largura do filtro aumenta.

O Gráfico 5.28 mostra a segunda comparação.

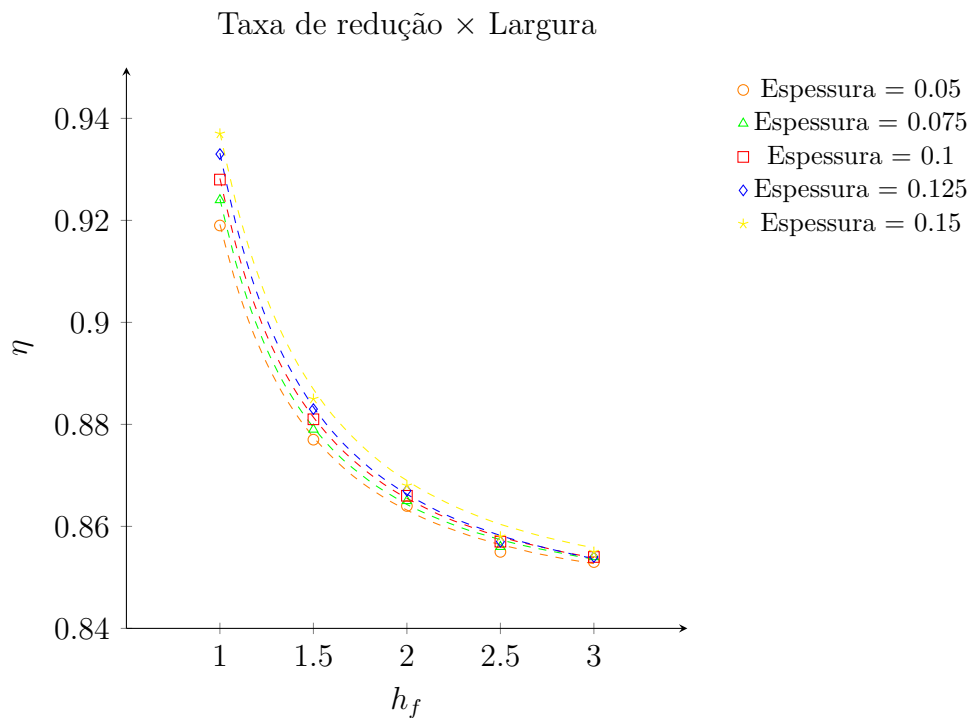


Figura 5.28: Comparação entre a taxa de redução de velocidade e a largura do filtro

As linhas tracejadas foram feitas a partir de uma regressão hiperbólica [21] para cada espessura do filtro. A equação que gera cada linha se encontra abaixo:

$$\frac{1}{y^a} + b\frac{1}{x^c} = d \quad (5.4)$$

Os valores das constantes a, b, c e d para cada caso, junto à medida de  $R^2$  da regressão, podem ser visualizados na Tabela 5.3:

Espessura ( $h_f$ )	a	b	c	d	$R^2$
0.050	5.063	0.865	1.570	2.399	0.999
0.075	1.269	0.134	1.904	1.239	0.999
0.100	4.110	0.670	1.618	2.030	1.000
0.125	3.320	0.520	1.632	1.779	1.000
0.150	-0.331	-0.033	1.967	0.945	1.000

Tabela 5.3: Constantes da regressão hiperbólica e o valor de  $R^2$ .

A partir dos dados encontrados, foi possível realizar as seguintes conclusões acerca da relação entre a largura do filtro e a taxa de redução de velocidades:

1. Existe uma relação não-linear entre as duas grandezas;
2. Conforme a largura do filtro aumenta,  $\eta$  tende a um valor mínimo assintótico.

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado uma breve revisão da literatura acerca da produção de biocombustíveis e das diversas formas de melhorar os impactos ambientais provocados pela queima de combustíveis fósseis, como a absorção e o armazenamento dos gases produzidos.

Em sequência, este trabalho apresentou uma revisão dos conceitos de mecânica dos fluidos, dos conceitos utilizados para a análise de escoamentos em meios porosos e do método de elementos finitos.

Adiante, foi apresentada a metodologia utilizada, contendo a formulação corrente-vorticidade da equação de Navier-Stokes generalizada para meios porosos e não-porosos, e sua transformação para a forma fraca para a utilização do método de elementos finitos.

Para validar o código computacional desenvolvido em *Python*, foram comparados os resultados de análises dos escoamentos de Hagen-Poiseuille com e sem meio poroso. O processo de validação demonstrou algumas limitações da formulação utilizada frente à formulação utilizada na literatura.

Após a validação, foi analisado o escoamento através de um modelo de filtro de biocombustível contendo um meio poroso com largura e espessura variável entre os canais de entrada e de saída. Para estas análises, foi observada a relação entre a taxa de redução da velocidade do escoamento com a variação de espessura para uma determinada largura do filtro, e a relação entre a taxa de redução de velocidade do escoamento com a variação de largura para uma determinada espessura do filtro.

Os resultados encontrados indicam uma relação linear entre a taxa de redução

da velocidade e a espessura do filtro, com uma redução gradual desta influência conforme a largura do filtro aumenta. Além disso, eles demonstram uma relação hiperbólica entre a taxa de redução da velocidade e a largura do filtro, com a taxa de redução tendendo a um limite assintótico conforme a largura do filtro aumenta. A partir destes resultados, é possível encontrar um valor ideal de um dos parâmetros geométricos de um novo filtro, dado um dos parâmetros e a taxa de redução desejada.

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos a partir deste. Entre as diversas possibilidades de estudos para trabalhos futuros a serem realizados, destaco os seguintes:

- Analisar a influência do número de Darcy nos escoamentos estudados;
- Analisar a influência do número de Reynolds nos escoamentos estudados;
- Analisar o escoamento sobre outras geometrias de filtro;
- Utilizar a formulação completa de Navier-Stokes para simular os escoamentos estudados;
- Analisar a influência da temperatura nos escoamentos realizados.

# Referências Bibliográficas

- [1] EDSTROM, E., OBERG, C., *Review of Bioenergy with Carbon Capture and Storage (BECCS) and Possibilities of Introducing a SmallScale Unit*, Master's Thesis, KTH School of Industrial Engineering and Management, 2013.
- [2] PRITCHARD, P. J., MITCHELL, J. W., *Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics*. 8th ed. John Wiley & Sons, 2011.
- [3] “Fluid Flow in Porous Medium”, Disponível em <http://www.frackoptima.com/userguide/theory/fluidflow-porousmedium-carter.html>, Acessado em 12/02/2023.
- [4] DE SOUZA, R. M., *O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor*. IFES: Brasil, 2003.
- [5] ANJOS, G. R., *Computação científica para engenheiros*. UFRJ: Brasil, 2019.
- [6] BARBIR, F., VERIZOGLU, T., PLASS, H., “Environmental damage due to fossil fuels use”, *Int. J. Hydrogen Energy*, v. 15, n. 10, pp. 739–749, 1990.
- [7] GUEDES, J. M., SANTOS, A. G. D., DOS SANTOS, H. S., “Uso da biomassa como fonte energética para produção de biocombustíveis.” In: *I Simpósio de Meio Ambiente e Energia (SiMAE)*, pp. 1–4, 2020.
- [8] GOUGH, C., UPHAM, P., “Biomass energy with carbon capture and storage (BECCS or Bio-CCS)”, *Greenhouse Gases: Science and Technology*, v. 1, n. 4, pp. 324–334, 2011.

- [9] MACHADO, C. X., E. A., *Potencial brasileiro para implementação de projetos de armazenamento geológico de carbono da biomassa a partir de usinas de álcool*, Master's Thesis, PUCRS, 2015.
- [10] VIDAL, M. F., “PRODUÇÃO E USO DE BIOCOMBUSTÍVEIS NO BRASIL”, *Caderno Setorial ETENE*, v. 6, n. 184, pp. 15, 2021.
- [11] CIMOLIN, F., DISCACCIATI, M., “Navier–Stokes/Forchheimer models for filtration through porous media”, *Applied Numerical Mathematics*, v. 72, pp. 205–224, 2013.
- [12] TEIXEIRA-DIAS, F., PINHO-DA-CRUZ, J., VALENTE, R. F., E. A., *Método dos Elementos Finitos. Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia*. 2nd ed. ETEP, 2018.
- [13] MELCONIAN, M. V., *Modelagem numérica e computacional com similitude e elementos finitos..* Edgard Blucher, 2014.
- [14] BAZILEVS, Y., HUGHES, T., “Weak imposition of Dirichlet boundary conditions in fluid mechanics”, *Computers & Fluids*, v. 36, pp. 12–26, 2007.
- [15] DA CUNHA, L. H. C., *Ale Finite Element Method for Simulating Flows with the Stream Function-Vorticity Formulation..*, Master's Thesis, UERJ, 2020.
- [16] SHEEN, D., “A generalized Green's theorem”, *Applied Mathematics Letters*, v. 5, n. 4, pp. 95–98, 1992.
- [17] BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., *Análise Numérica*. 8th ed. CENGAGE Learning, S.I.
- [18] DIXON, W. J., MASSEY, F. J., J., *Introduction to statistical analysis*. 2nd ed. McGraw-Hill, 1957.
- [19] SOUZA, J. P. I., *PARTICLE-LADEN MULTIPHASE FLOWS: A FINITE ELEMENT ANALYSIS ON BIOFUEL PARTICLE EMISSIONS*, Master's Thesis, UFRJ, 2021.
- [20] SU, X., YAN, X., TSAI, C., “Linear regression”, *Wires Computational Statistics*, v. 1, 2012.

- [21] XAVIER, V. L., “Hyperbolic regression: a new regression model with applications to the binary classification problem”, *Information Sciences*, v. 609, pp. 15–25, 2022.
- [22] GAZZONI, D. L., “Balanço de emissões de CO<sub>2</sub> por biocombustíveis no Brasil: histórico e perspectivas.” *Embrapa Soja-Livro técnico (INFOTECA-E)*, 2014.
- [23] A., E. Y., CIMBALA, J. M., *Mecânica dos Fluidos–Fundamentos e Aplicações*. McGraw-Hill, 2012.
- [24] CAMPOS, L. C., *Modelagem do escoamento de fluidos em meios porosos utilizando a estrutura de dados Autonomous Leaves Graph*, Master’s Thesis, UFMG, 2013.
- [25] WALKER, H., “Studies in the History of the Statistical Method.” *MD: Williams & Wilkins Co.*, v. 1, pp. 24–25, 1931.

# Apêndice A

## Códigos Fonte

### A.1 Script para a geração das malhas no Gmsh

```
1 //Definicao dos parametros de refino
2 res_in = 0.03;
3 res_porous = 0.02;
4 res_out = 0.03;
5
6 //Definicao dos parametros geometricos da malha
7 l_in = 3;
8 l_out = 3;
9 l_filter = 3;
10 h_in = 1;
11 h_out = 1;
12 h_filter = 0.15;
13 l_f = 0.5;
14
15 //Criacao dos pontos
16 Point(1) = {0, 0, 0, res_in};
17 Point(2) = {l_in + l_filter, 0, 0, res_in};
18 Point(3) = {l_in + l_filter, h_in, 0, res_porous};
19 Point(4) = {l_in + l_filter, h_in + h_filter, 0, res_porous};
20 Point(5) = {l_in + l_filter + l_out, h_in + h_filter, 0, res_out};
21 Point(6) = {l_in + l_filter + l_out, h_in + h_filter + h_out, 0, res_out};
22 Point(7) = {l_in, h_in + h_filter + h_out, 0, res_out};
23 Point(8) = {l_in, h_in + h_filter, 0, res_porous};
24 Point(9) = {l_in, h_in, 0, res_porous};
25 Point(10) = {0, h_in, 0, res_out};
26
27 //Criacao das retas ligando os pontos
28 Line(1) = {1, 2};
29 Line(2) = {2, 3};
30 Line(3) = {3, 4};
```

```

31 Line(4) = {4, 5};
32 Line(5) = {5, 6};
33 Line(6) = {6, 7};
34 Line(7) = {7, 8};
35 Line(8) = {8, 9};
36 Line(9) = {9, 10};
37 Line(10) = {10, 1};
38 Line(11) = {3, 9};
39 Line(12) = {4, 8};
40
41 //Criacao das superficies
42 Line Loop(1) = {1, 2, 11, 9, 10};
43 Plane Surface(1) = {1};
44
45 Line Loop(2) = {-11, 3, 12, 8};
46 Plane Surface(2) = {2};
47
48 Line Loop(3) = {-12, 4, 5, 6, 7};
49 Plane Surface(3) = {3};
50
51 //Nomeando retas e superficies
52 Physical Line("left") = {10};
53 Physical Line("bottom") = {1, 2, 3, 4};
54 Physical Line("top") = {6, 7, 8, 9};
55 Physical Surface("fluid") = {1, 3};
56 Physical Surface("porous") = {2};

```

## A.2 Script para a análise de elementos finitos em Python

```

1 #####
2 #IMPORTANDO BIBLIOTECAS UTILIZADAS
3 #####
4
5 import meshio
6 import numpy as np
7 import scipy as sp
8 import matplotlib.pyplot as plt
9 import matplotlib.tri as mtri
10 import os
11 import shutil
12 from pathlib import Path
13 import glob
14 from PIL import Image
15 from scipy.sparse import lil_matrix, csr_matrix, csc_matrix, diags

```

```

16 from scipy.sparse.linalg import spsolve
17 import time
18 from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable
19
20 #####
21 #DEFININDO FUNCAO QUE GERA A BARRA DE PROGRESSO DA SIMULACAO
22 #####
23
24 def progress_bar(progress, total):
25     percent = 100 * (progress/float(total))
26     bar = '▄' * int(percent) + '-' * (100 - int(percent))
27     print(f'\r|{bar}|▄|f"{percent:.2f}%" .1just(8)}|', end='\r')
28
29 #####
30 #PARAMETROS DA MALHA
31 #####
32
33 mesh_folder_name = '3-▄Filtro-▄Biocombustivel'
34 mesh_res = 'd=3.0'
35 hf = 0.15
36 mesh_name = f'filtro_biocombustivel_3_{hf}'
37 mode = 'save_png'
38 mode_2 = 'save_vtk'
39
40 #####
41 #PARAMETROS FISICOS DA SIMULACAO
42 #####
43
44 h = 1 #ALTURA DA TUBULACAO
45 L = 6*h #COMPRIMENTO DA TUBULACAO
46 L_0 = h #COMPRIMENTO CARACTERISTICO
47 U_0 = 1.0 #VELOCIDADE CARACTERISTICA
48 t_0 = U_0/L_0 #1/TEMPO CARACTERISTICO
49 Re = 100 #NUMERO DE REYNOLDS
50 Da = 0.05 #NUMERO DE DARCY
51 F_0 = 2.0 #NUMERO DE FORCHHEIMER
52 total_time = 30 * t_0 #TEMPO TOTAL
53 dt_ = 0.01 #PASSO DE TEMPO
54 dt = dt_ * t_0 #[s] #PASSO DE TEMPO ADMENSIONAL
55 nIter = int(total_time/dt) #NUMERO DE ITERACOES
56
57 print(f'{mesh_name}_{mesh_res}_{hf}_{dt_}_{nIter}')
58
59 #####
60 #LEITURA DE MALHA
61 #####
62
63 root_path = Path(__file__).parent.parent.parent
64 mesh_folder = f'{root_path}\\2-▄Malhas\\{mesh_folder_name}\\{mesh_res}'

```

```

65 mesh_path = f'{mesh_folder}\\{mesh_name}.msh'
66
67 image_folder = f'{root_path}\\3_Imagens\\{mesh_folder_name}\\{mesh_res}'
68 os.makedirs(image_folder, exist_ok=True)
69
70 msh = meshio.read(mesh_path) #LEITURA ARQUIVO .MSH
71
72 X = np.array(msh.points[:, 0])/L_0 #COORDENADAS X DOS PONTOS
73 Y = np.array(msh.points[:, 1])/L_0 #COORDENADAS Y DOS PONTOS
74 npoints = len(X) #NUMERO DE PONTOS
75
76 IEN = msh.cells_dict['triangle'] #MATRIZ DE CONECTIVIDADE
77 ne = len(IEN) #NUMERO DE ELEMENTOS
78
79 IENbound = msh.cells_dict['line'] #MATRIZ DE CONECTIVIDADE DO CONTORNO
80 IENboundTypeElem = list(msh.cell_data_dict['gmsh:physical']['line']) #TIPO
    ↪ ELEMENTO DE CONTORNO
81 boundNames = list(msh.field_data.keys()) #NOMES DOS CONTORNOS
82 IENboundElem = [boundNames[elem - 1] for elem in IENboundTypeElem]
83
84 #ASSOCIAR NOME DO CORTORNO AO ELEMENTO
85 cc = np.unique(IENbound.reshape(IENbound.size))
86 ccName = [[] for i in range(npoints)]
87
88 #PRIORIDADE 3
89 for elem in range(0, len(IENbound)):
90     if IENboundElem[elem] == 'left':
91         ccName[IENbound[elem][0]] = IENboundElem[elem]
92         ccName[IENbound[elem][1]] = IENboundElem[elem]
93
94 #PRIORIDADE 2
95 for elem in range(0, len(IENbound)):
96     if IENboundElem[elem] in ('bottom', 'bottom_fluid', 'bottom_porous'):
97         ccName[IENbound[elem][0]] = IENboundElem[elem]
98         ccName[IENbound[elem][1]] = IENboundElem[elem]
99
100 #PRIORIDADE 1
101 for elem in range(0, len(IENbound)):
102     if IENboundElem[elem] in ('top', 'top_fluid', 'top_porous'):
103         ccName[IENbound[elem][0]] = IENboundElem[elem]
104         ccName[IENbound[elem][1]] = IENboundElem[elem]
105
106 #REGIOES DO DOMINIO
107 regionsTypeElem = list(msh.cell_data_dict['gmsh:geometrical']['triangle'])
108 regionsNames = list(msh.field_data.keys())
109 n_regions = max(regionsTypeElem) + 1
110 regionsElem = [regionsNames[elem + len(regionsNames) - n_regions] for elem in
    ↪ regionsTypeElem]
111 with open(f'{mesh_folder}\\mesh_properties.txt', 'w+') as file:

```

```

112     file.write(f'NOs:_{npoints}\n')
113     file.write(f'Elementos:_{ne}\n')
114
115     #####
116     #ASSEMBLY DAS MATRIZES GLOBAIS
117     #####
118     assembly_start = time.time()
119
120     #INICIALIZACAO DOS CAMPOS DE CONTORNO PARA VX, VY E PSI
121     vx_cc = np.zeros((npoints), np.float64)
122     vy_cc = np.zeros((npoints), np.float64)
123     psi_cc = np.zeros((npoints), np.float64)
124
125     for i in cc:
126         if ccName[i] in ('bottom', 'bottom_fluid', 'bottom_porous'):
127             vx_cc[i] = 0.0
128             vy_cc[i] = 0.0
129             psi_cc[i] = 0.0
130         if ccName[i] in ('top', 'top_fluid', 'top_porous'):
131             vx_cc[i] = 0.0
132             vy_cc[i] = 0.0
133             psi_cc[i] = 1.0
134         if ccName[i] in ('left', 'left_fluid'):
135             vx_cc[i] = 3/2 * U_0 * (1 - (2*(Y[i] - 0.5)/h)**2)#1.0
136             vy_cc[i] = 0.0
137             psi_cc[i] = (3/2*U_0)*(Y[i] - (1/h**2)*(4/3*Y[i]**3 - 2*Y[i]**2 + Y
138                 ↪ [i]))
139
140     epsilon = np.zeros((len(IEN)), dtype=np.float64)           #VETOR DE ATIVACAO POROSO
141
142     K = np.zeros((npoints, npoints), dtype=np.float64)       #MATRIZ DE RIGIDEZ
143     M_porous = np.zeros((npoints, npoints), dtype=np.float64) #MATRIZ DE MASSA
144     ↪ POROSA
145     M = np.zeros((npoints, npoints), dtype=np.float64)       #MATRIZ DE MASSA
146     Gx = np.zeros((npoints, npoints), dtype=np.float64)     #MATRIZ DO GRADIENTE EM X
147     Gy = np.zeros((npoints, npoints), dtype=np.float64)     #MATRIZ DO GRADIENTE EM Y
148
149     for index, (elem, region) in enumerate(zip(IEN, regionsElem)):
150
151         v1, v2, v3 = elem
152         xi, yi = X[v1], Y[v1]
153         xj, yj = X[v2], Y[v2]
154         xk, yk = X[v3], Y[v3]
155         ai = xj*yk - xk*yj
156         aj = xk*yi - xi*yk
157         ak = xi*yj - xj*yi
158         bi = yj - yk
159         bj = yk - yi
160         bk = yi - yj

```

```

159     ci = xk - xj
160     cj = xi - xk
161     ck = xj - xi
162
163     vxi, vyi = vx_cc[v1], vy_cc[v1]
164     vxj, vyj = vx_cc[v2], vy_cc[v2]
165     vxk, vyk = vx_cc[v3], vy_cc[v3]
166
167     vx_m = (vxi + vxj + vxk) / 3.0
168     vy_m = (vyi + vyj + vyk) / 3.0
169
170     if region.find('fluid') != -1:
171         epsilon[index] = 0
172
173     if region.find('porous') != -1:
174         epsilon[index] = 1
175
176     area = 0.5*np.linalg.det([[1, xi, yi], [1, xj, yj], [1, xk, yk]])
177
178     ke_x = (1/(4.0*area))*np.array([[bi**2, bi*bj, bi*bk], [bj*bi, bj**2, bj*bk
179         ↪ ], [bk*bi, bk*bj, bk**2]])
180
181     ke_y = (1/(4.0*area))*np.array([[ci**2, ci*cj, ci*ck], [cj*ci, cj**2, cj*ck
182         ↪ ], [ck*ci, ck*cj, ck**2]])
183
184     ke = ke_x + ke_y
185
186     me = (area/12.0)*np.array([[2.0, 1.0, 1.0], [1.0, 2.0, 1.0], [1.0, 1.0,
187         ↪ 2.0]])
188
189     ge_x = (1/6.0)*np.array([[bi, bj, bk], [bi, bj, bk], [bi, bj, bk]])
190
191     ge_y = (1/6.0)*np.array([[ci, cj, ck], [ci, cj, ck], [ci, cj, ck]])
192
193     for i_loc in range(0,3):
194         i_glb = IEN[index, i_loc]
195         for j_loc in range(0,3):
196             j_glb = IEN[index, j_loc]
197             K[i_glb, j_glb] += ke[i_loc, j_loc]
198             M[i_glb, j_glb] += me[i_loc, j_loc]
199             M_porous[i_glb, j_glb] += epsilon[index]*me[i_loc, j_loc]
200             Gx[i_glb, j_glb] += ge_x[i_loc, j_loc]
201             Gy[i_glb, j_glb] += ge_y[i_loc, j_loc]
202
203 K = csc_matrix(K, shape=(npoints, npoints), dtype=np.float64)
204 M_porous = csc_matrix(M_porous, shape=(npoints, npoints), dtype=np.float64)
205 M = csc_matrix(M, shape=(npoints, npoints), dtype=np.float64)
206 Gx = csc_matrix(Gx, shape=(npoints, npoints), dtype=np.float64)

```

```

205 Gy = csc_matrix(Gy, shape=(npoints, npoints), dtype=np.float64)
206
207 print('Done assembly')
208 assembly_end = time.time()
209 print(f'Assembly Time: {round(assembly_end - assembly_start, 2)}s')
210
211 #####
212 #RESOLUCAO DO MEF
213 #####
214
215 simulation_start = time.time()
216
217 #INICIALIZACAO DO CAMPO DE VORTICIDADE
218 w_zcc = spsolve(M, (Gx@vy_cc - Gy@vx_cc))
219
220 #SALVANDO VTK E PNG
221 point_data = {'vx': vx_cc}
222 data_vy = {'vy': vy_cc}
223 data_psi = {'psi': psi_cc}
224 data_wz = {'wz': w_zcc}
225
226 point_data.update(data_vy)
227 point_data.update(data_psi)
228 point_data.update(data_wz)
229
230 vtk_folder = f'{image_folder}\\vtk_files\\{mesh_res}_{dt}_{Re}_{Da*1000}'
231 shutil.rmtree(vtk_folder, ignore_errors=True)
232 os.makedirs(vtk_folder, exist_ok=True)
233
234 meshio.write_points_cells(f'{vtk_folder}\\{mesh_res}_{dt}_{Re}_0.vtk', msh.points,
    ↪ msh.cells, point_data=point_data)
235
236 contour_resolution = 150
237 fig = plt.figure(figsize=(9, 11))
238 triang = mtri.Triangulation(X,Y,IEN)
239
240 ax1 = fig.add_subplot(2,2,1)
241 ax1.set_aspect('equal')
242 f1 = ax1.tricontourf(triang, psi_cc, contour_resolution, cmap='jet')
243 divider1 = make_axes_locatable(ax1)
244 cax1 = divider1.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
245
246 fig.colorbar(f1, cax=cax1)
247 ax1.set_title('\u03A8')
248 ax1.set_xlabel('x')
249 ax1.set_ylabel('y')
250 ax1.triplot(X,Y,IEN, 'k-', linewidth=0.1)
251
252 ax2 = fig.add_subplot(2,2,3)

```

```

253 ax2.set_aspect('equal')
254 f2 = ax2.tricontourf(triang, w_zcc, contour_resolution, cmap='jet')
255 divider2 = make_axes_locatable(ax2)
256 cax2 = divider2.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
257
258 fig.colorbar(f2, cax=cax2)
259 ax2.set_title('\u03C9')
260 ax2.set_xlabel('x')
261 ax2.set_ylabel('y')
262 ax2.triplot(X,Y,IEN,'k-',linewidth=0.1)
263
264 ax3 = fig.add_subplot(2,2,2)
265 ax3.set_aspect('equal')
266 f3 = ax3.tricontourf(triang, vx_cc, contour_resolution, cmap='jet')
267 divider3 = make_axes_locatable(ax3)
268 cax3 = divider3.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
269
270 fig.colorbar(f3, cax=cax3)
271 ax3.set_title('Vx')
272 ax3.set_xlabel('x')
273 ax3.set_ylabel('y')
274 ax3.triplot(X,Y,IEN,'k-',linewidth=0.1)
275
276 ax4 = fig.add_subplot(2,2,4)
277 ax4.set_aspect('equal')
278 f4 = ax4.tricontourf(triang, vy_cc, contour_resolution, cmap='jet')
279 divider4 = make_axes_locatable(ax4)
280 cax4 = divider4.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
281
282 fig.colorbar(f4, cax=cax4)
283 ax4.set_title('Vy')
284 ax4.set_xlabel('x')
285 ax4.set_ylabel('y')
286 ax4.triplot(X,Y,IEN,'k-',linewidth=0.1)
287
288 plt.savefig(os.path.join(vtk_folder, f'{mesh_res}_{dt}_{Re}_0.png'), bbox_inches='
    ↪ tight')
289 plt.close('all')
290
291 #INICIALIZACAO DOS OUTROS CAMPOS
292 vx = np.zeros((npoints), dtype = np.float64)
293 vy = np.zeros((npoints), dtype = np.float64)
294 psi = np.zeros((npoints), dtype = np.float64)
295
296 for i in cc:
297     vx[i] = vx_cc[i]
298     vy[i] = vy_cc[i]
299     psi[i] = psi_cc[i]
300

```

```

301 w_z = w_zcc.copy()
302
303 progress_bar(0, nIter + 1)
304
305 #CALCULO DO VETOR DO MODULO DA VELOCIDADE DOS ELEMENTOS
306 U = diags([np.sqrt(vx_i**2 + vy_i**2) for vx_i, vy_i in zip(vx, vy)])
307
308 I = np.identity(npoints)
309
310 for n in range(nIter):
311
312     #VORTICIDADE
313
314     w_zcc = spsolve(M, (Gx@vy - Gy@vx))
315
316     A_wz = lil_matrix(M/dt + K/Re + diags(vx)@Gx + diags(vy)@Gy + M_porous/(Re*
317         ↪ Da) + (M_porous/(Re*Da))@(F_0*U))
318     b_wz = (M/dt) @ w_z
319
320     for i in cc:
321         A_wz[i, :] = 0.0
322         A_wz[i, i] = 1.0
323         b_wz[i] = w_zcc[i]
324
325     w_z = spsolve(csc_matrix(A_wz), b_wz)
326
327     #FUNCAO CORRENTE
328
329     A_psi = lil_matrix(K)
330     b_psi = M @ w_z
331
332     for i in cc:
333         A_psi[i, :] = 0.0
334         A_psi[i, i] = 1.0
335         b_psi[i] = psi_cc[i]
336
337     psi = spsolve(csc_matrix(A_psi), b_psi)
338
339     #VELOCIDADES
340
341     Avx = lil_matrix(M)
342     Avy = lil_matrix(M)
343
344     b_vx = Gy@psi
345     b_vy = - Gx@psi
346
347     vx = spsolve(csc_matrix(Avx), b_vx)
348     vy = spsolve(csc_matrix(Avy), b_vy)

```

```

349     for i in cc:
350         vx[i] = vx_cc[i]
351         vy[i] = vy_cc[i]
352
353     U = diags([np.sqrt(vx_i**2 + vy_i**2) for vx_i, vy_i in zip(vx, vy)])
354
355     X *= L_0
356     Y *= L_0
357     vx *= U_0
358     vy *= U_0
359     psi *= (L_0*U_0)
360     w_z *= (U_0/L_0)
361
362     point_data = {'vx': vx}
363     data_vy = {'vy': vy}
364     data_psi = {'psi': psi}
365     data_wz = {'wz': w_z}
366
367     point_data.update(data_vy)
368     point_data.update(data_psi)
369     point_data.update(data_wz)
370
371     meshio.write_points_cells(f'vtk_folder\\{mesh_res}_{dt}_{Re}_{Da*1000}_{
372         ↪ n_u+u1}.vtk', msh.points, msh.cells, point_data=point_data)
373
374     if mode == 'save_png' or n == nIter - 1:
375         contour_resolution = 150
376         fig = plt.figure(figsize=(9, 11))
377         triang = mtri.Triangulation(X,Y,IEN)
378
379         ax1 = fig.add_subplot(2,2,1)
380         ax1.set_aspect('equal')
381         f1 = ax1.tricontourf(triang, psi, contour_resolution, cmap='jet')
382         divider1 = make_axes_locatable(ax1)
383         cax1 = divider1.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
384
385         fig.colorbar(f1, cax=cax1)
386         ax1.set_title('\u03A8')
387         ax1.set_xlabel('x')
388         ax1.set_ylabel('y')
389         ax1.triplot(X,Y,IEN,'k-',linewidth=0.1)
390
391         ax2 = fig.add_subplot(2,2,3)
392         ax2.set_aspect('equal')
393         f2 = ax2.tricontourf(triang, w_z, contour_resolution, cmap='jet')
394         divider2 = make_axes_locatable(ax2)
395         cax2 = divider2.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
396
397         fig.colorbar(f2, cax=cax2)

```

```

397         ax2.set_title('\u03C9')
398         ax2.set_xlabel('x')
399         ax2.set_ylabel('y')
400         ax2.triplot(X,Y,IEN,'k-',linewidth=0.1)
401
402         ax3 = fig.add_subplot(2,2,2)
403         ax3.set_aspect('equal')
404         f3 = ax3.tricontourf(triang, vx, contour_resolution, cmap='jet')
405         divider3 = make_axes_locatable(ax3)
406         cax3 = divider3.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
407
408         fig.colorbar(f3, cax=cax3)
409         ax3.set_title('Vx')
410         ax3.set_xlabel('x')
411         ax3.set_ylabel('y')
412         ax3.triplot(X,Y,IEN,'k-',linewidth=0.1)
413
414         ax4 = fig.add_subplot(2,2,4)
415         ax4.set_aspect('equal')
416         f4 = ax4.tricontourf(triang, vy, contour_resolution, cmap='jet')
417         divider4 = make_axes_locatable(ax4)
418         cax4 = divider4.append_axes("right", size="5%", pad=0.05)
419
420         fig.colorbar(f4, cax=cax4)
421         ax4.set_title('Vy')
422         ax4.set_xlabel('x')
423         ax4.set_ylabel('y')
424         ax4.triplot(X,Y,IEN,'k-',linewidth=0.1)
425
426         plt.savefig(os.path.join(vtk_folder, f'{mesh_res}_{dt}_{Re}_{n_u+u
         ↪ 1}.png'), bbox_inches='tight')
427         plt.close('all')
428
429         X /= L_0
430         Y /= L_0
431         vx /= U_0
432         vy /= U_0
433         psi /= (L_0*U_0)
434         w_z /= (U_0/L_0)
435
436         progress_bar(n + 1 , nIter + 1)
437
438     point_data = {'vx': vx}
439     data_vy = {'vy': vy}
440     data_psi = {'psi': psi}
441     data_wz = {'wz': w_z}
442
443     point_data.update(data_vy)
444     point_data.update(data_psi)

```

```

445 point_data.update(data_wz)
446
447 meshio.write_points_cells(f'{vtk_folder}\\{mesh_res}_{hf}_{dt}_{Re}_{Da*1000}_{n+
    ↪ _1}.vtk', msh.points, msh.cells, point_data=point_data)
448
449 progress_bar(nIter + 1, nIter + 1)
450
451 simulation_end = time.time()
452 print(f'\nSimulation Time: {round(simulation_end - simulation_start, 2)}s')
453
454 with open(f'{mesh_folder}\\mesh_properties.txt', 'a') as file:
455     file.write(f'Analysis Time: {round(simulation_end - simulation_start, 2)}s
    ↪ ')
456
457 fp_in = f"{vtk_folder}\\/*.png"
458 fp_out = f"{vtk_folder}\\simulacao.gif"
459
460 img, *imgs = [Image.open(f) for f in sorted(glob.glob(fp_in))]
461 img.save(fp=fp_out, format='GIF', append_images=imgs,
462         save_all=True, duration=dt*nIter*10, loop=0)

```