

CORREÇÃO DO MODELO SPALART-ALLMARAS POR ASSIMILAÇÃO DE  
DADOS PARA INSTABILIDADES AEROELÁSTICAS TRANSITÓRIAS

Pedro Morel Rosa

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro

Março de 2026



*UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO*

**Politécnica**  
UFRJ

**Escola Politécnica**

Departamento de Engenharia Mecânica

CORREÇÃO DO MODELO SPALART-ALLMARAS POR ASSIMILAÇÃO DE  
DADOS PARA INSTABILIDADES AEROELÁSTICAS TRANSITÓRIAS

Pedro Morel Rosa

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO  
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

---

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, D.Sc.

---

Prof. Fabio da Costa Figueiredo, D.Sc.

---

Prof. Daniel Onofre de Almeida Cruz , D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2026

Morel Rosa, Pedro

Correção do Modelo Spalart-Allmaras por Assimilação de Dados para Instabilidades Aeroelásticas Transitórias/  
Pedro Morel Rosa. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2026.

XIII, 69 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/  
Curso de Engenharia Mecânica, 2026.

Referências Bibliográficas: p. 68 – 70.

1. Aerodinâmica.      2. Elementos finitos.      3.  
Modelagem.      4. Fluidodinâmica Computacional.      I.  
Rabello dos Anjos, Gustavo. II. Universidade Federal do  
Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica. III.  
Correção do Modelo Spalart-Allmaras por Assimilação de  
Dados para Instabilidades Aeroelásticas Transitórias.

# Agradecimentos

Este trabalho, assim como meus estudos no Brasil e na França, jamais seriam possíveis sem as pessoas que amo, cujo apoio incondicional é indiferente à distância.

Agradeço de coração a todos da minha família, aqueles que vivem e permanecem ao meu lado, e aqueles que já não estão mais aqui, mas cujos ensinamentos e memórias levarei para sempre comigo.

Também agradeço aos meus amigos no Rio e em Paris, sem os quais o dia a dia seria menos leve. A todos, merci, obrigado.

Sou grato ao meu orientador da UFRJ Gustavo Rabello, que nunca faltou com solicitude em me ajudar nesta etapa final da minha formação.

Expresso minha gratidão aos meus orientadores de pesquisa na ONERA, Vincent Mons, Pedro Volpiani e Olivier Marquet, obrigado pela oportunidade e orientação.

A cada professor que tive na vida, desde o início da minha educação até agora, não tenho palavras para agradecer o suficiente.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Nuclear

## CORREÇÃO DO MODELO SPALART-ALLMARAS POR ASSIMILAÇÃO DE DADOS PARA INSTABILIDADES AEROELÁSTICAS TRANSITÓRIAS

Pedro Morel Rosa

Março/2026

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Departamento: Engenharia Mecânica

Este trabalho investiga comparativamente diferentes ajustes no modelo de turbulência Spalart-Allmaras por meio de parâmetros de controle corretivos obtidos por técnicas baseadas em dados. Do ponto de vista físico, o principal objetivo é obter uma descrição precisa do fenômeno de *laminar separation flutter* (flutter por separação laminar), que não apresenta resultados satisfatórios quando simulado utilizando métodos e modelos de turbulência clássicos. A complexidade do fenômeno e seu caráter altamente localizado são utilizados para promover um estudo comparativo de configurações que diferem no tipo de modelagem e na natureza dos dados utilizados para correção (dados parietais ou dados de campo completo). Esta investigação demonstra que é possível obter um modelo corrigido para Spalart-Allmaras que fornece com precisão as forças aerodinâmicas intrínsecas ao fenômeno. No entanto, as escolhas dos dados e a natureza da correção não são triviais, e diferentes vantagens e limitações são exploradas até que uma configuração ideal seja alcançada. Para isso, análises de sensibilidade adjunta são constantemente utilizadas, a fim de fornecer diretrizes em termos de compreensão física sobre a precisão e a eficácia dos modelos obtidos.

**Palavras-chave:** modelagem de turbulência, métodos computacionais, otimização, inversão de campo, assimilação de dados, aprendizado de máquina, redes neurais.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Nuclear Engineer

DATA-DRIVEN SPALART-ALLMARAS MODEL CORRECTION FOR  
TRANSITIONAL AEROELASTIC INSTABILITIES

Pedro Morel Rosa

March/2026

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

This work comparatively investigates different adjustments to the Spalart-Almaras turbulence model through corrective control parameters obtained by data-driven techniques. From a physical perspective, the main objective is to obtain an accurate description of the *laminar separation flutter* phenomenon, which does not present satisfactory results when simulated using classical turbulence methods and models. The complexity of the phenomenon and its highly localized character are used in order to promote a comparative study of configurations that differ in the type of modeling and nature of the data used for correction (parietal data or full field data). This investigation shows that it is possible to obtain a corrected model for Spalart-Almaras that accurately provides the aerodynamic forces intrinsic to the phenomenon. However, the data choices and the nature of the correction are not trivial and different advantages and shortcomings are explored until an optimal configuration is obtained. To this end, adjoint sensitivity analyzes are constantly used, in order to provide guidelines in terms of physical understanding of the correctness and effectiveness of the models obtained.

**Keywords:** turbulence modeling, computational methods, optimization, field inversion, data assimilation, machine learning, neural networks.

# Lista de Figuras

2.1	Instabilidade estática e instabilidade dinâmica, respectivamente. Sabino et al. [1] . . . . .	5
2.2	Ilustração esquemática de uma separação de camada limite laminar bidimensional e de uma bolha de separação laminar, respectivamente. Busquet et al. [2] . . . . .	6
2.3	Uma bolha de separação laminar curta e uma longa, respectivamente. Xia et al. [3] . . . . .	7
2.4	À esquerda, evolução do coeficiente médio de arrasto com o ângulo de ataque para diferentes números de Reynolds, a partir dos experimentos de Ohtake et al. [4]. À direita, evolução do coeficiente médio de sustentação com o ângulo de ataque para $Re = 130000$ , a partir dos experimentos de Muller et al. [5] . . . . .	8
2.5	Comparação da velocidade horizontal para ângulo de ataque $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	11
2.6	Comparação da velocidade horizontal para ângulo de ataque $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	11
2.7	Velocidade horizontal para $\alpha = 2^\circ$ , indicando a Bolha de Separação Laminar. . . . .	12
2.8	Comparação do termo de flutuação na direção $z$ para diferentes ângulos. . . . .	12
2.9	Análise da validade da hipótese de Boussinesq para diferentes ângulos de ataque. . . . .	14
2.10	Produção de turbulência para diferentes ângulos de ataque. . . . .	15
2.11	Esforços aerodinâmicos globais para diferentes ângulos de ataque. . . . .	16
2.12	Coeficiente de atrito na superfície no extradorso para $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	17
3.1	Viscosidade turbulenta $\nu_t$ e viscosidade turbulenta modificada $\tilde{\nu}$ [6]. . . . .	25

4.1	Ilustração esquemática do domínio computacional para a simulação. Sabino et al. [1] . . . . .	37
4.2	Malha triangular bidimensional ao redor do aerofólio NACA0012, para $\alpha = 0^\circ$ . Sabino et al. [1] . . . . .	39
4.3	Elemento finito triangular Taylor–Hood $P_2/P_1$ . À esquerda, os 6 nós de interpolação da velocidade (vértices e pontos médios das arestas). À direita, os 3 nós de interpolação da pressão (vértices). . . . .	40
4.5	Subtração direta dos resultados de DNS e RANS-SA para a velocidade horizontal em $\alpha = 1^\circ$ . . . . .	42
4.6	Subtração direta dos resultados de DNS e RANS-SA para a velocidade horizontal em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	42
4.7	Esquema do algoritmo BFGS para um problema genérico, tendo $\mathbf{f}$ como parâmetro de controle e $\mathbf{q}$ como estado. A variável adjunta é denotada por $\mathbf{q}^\dagger$ . Franceschini et al. [7] . . . . .	45
4.8	Análise de sensibilidade usando dados parietais $C_f$ em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	46
4.9	Análise de sensibilidade usando dados parietais $C_m$ em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	46
4.10	Análise de sensibilidade usando dados de campo completo $UV$ em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	46
4.11	Análise da curva em L para assimilação realizada usando dados pari- etais $C_f$ para a correção do termo de produção $\beta_{prod}$ , em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	48
5.2	Coeficiente de momento extradorsal em $\alpha = 0.5^\circ$ , mostrando melhores resultados quando $\beta_{cross-diff}$ é utilizado. . . . .	54
5.3	Coeficiente de momento extradorsal em $\alpha = 2^\circ$ , mostrando melhores resultados quando $C_p$ é utilizado. . . . .	55
5.4	Coeficiente de momento intradorsal em $\alpha = 1^\circ$ utilizando dados pa- rietais combinados $C_p + C_f$ . . . . .	56
5.5	Coeficiente de momento intradorsal em $\alpha = 2^\circ$ comparando resultados de dados parietais e dados de campo completos. . . . .	58
5.6	Subtração direta entre os resultados DNS e os assimilados utilizando dados parietais $C_p$ para a velocidade horizontal em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	58
5.7	Subtração direta entre os resultados DNS e os assimilados utilizando dados de campo completo $UV$ para a velocidade horizontal em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	59

5.8	Análise adjunta de $\tilde{\nu}^\dagger$ em $\alpha = 0^\circ$ . . . . .	60
5.9	Coeficiente de momento extradorsal em $\alpha = 2^\circ$ utilizando dados parietais combinados e uma força adicional. . . . .	60
5.10	Coeficiente de momento intradorsal em $\alpha = 1^\circ$ utilizando dados parietais combinados e uma força adicional. . . . .	61

# Lista de Tabelas

5.1	Valores finais da função de custo (preto) e do erro de velocidade no campo sob a norma $L_2$ (vermelho) para cada observação e parâmetro de controle em $\alpha = 2^\circ$ , usando $\alpha_{pen} = 10^{-7}$ . . . . .	51
5.2	Valores finais para a função de custo em $\alpha = 1^\circ$ . . . . .	51
5.3	Valores finais para a função de custo (preto) e o erro de velocidade do campo sob a norma $L_2$ (vermelho) para $C_p$ e $C_f$ com o parâmetro de controle $\beta_{cross-diff}$ em todos os ângulos. . . . .	53
5.4	Valores finais para a função de custo (preto) e o erro de velocidade do campo sob a norma $L_2$ (vermelho) utilizando dados de campo e alguns resultados anteriores, em $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	57

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Revisão da Literatura</b>	<b>3</b>
2.1 Aeroelasticidade e Instabilidades . . . . .	3
2.1.1 Tipos de Instabilidades . . . . .	4
2.2 Regime de Escoamento Transicional . . . . .	5
2.3 Simulação Numérica Direta . . . . .	8
2.3.1 Propriedades Diretas . . . . .	11
2.3.2 Propriedades Processadas . . . . .	12
2.4 Coeficientes Aerodinâmicos . . . . .	15
<b>3 Modelagem do Fenômeno</b>	<b>18</b>
3.1 Hipóteses e Escopo da Modelagem . . . . .	18
3.1.1 Simplificações Adotadas . . . . .	19
3.1.2 Aspectos Preservados . . . . .	19
3.2 Equações RANS . . . . .	20
3.2.1 Introdução . . . . .	20
3.2.2 Derivação RANS . . . . .	21
3.2.3 Hipótese de Boussinesq . . . . .	23
3.3 Modelo de Spalart-Allmaras . . . . .	24
3.3.1 Viscosidade Turbulenta Modificada . . . . .	24
3.3.2 Construção da Equação . . . . .	25

3.3.3	Equação de Turbulência . . . . .	28
3.4	Modelo de Transição . . . . .	28
3.5	Assimilação de Dados . . . . .	30
3.5.1	Modelagem Modificada de Spalart-Allmaras . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Implementação Numérica</b>	<b>35</b>
4.1	Introdução . . . . .	35
4.2	Metodologia . . . . .	35
4.2.1	Domínio Numérico . . . . .	35
4.2.2	Formulação Fraca . . . . .	37
4.2.3	Geração de Malha . . . . .	38
4.2.4	Método dos Elementos Finitos . . . . .	39
4.3	Resultados Preliminares . . . . .	41
4.4	Assimilação Variacional de Dados . . . . .	42
4.4.1	Método BFGS . . . . .	44
4.4.2	Análise de Sensibilidade . . . . .	45
4.4.3	Curvas em L . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>49</b>
5.1	Cenário I: Dados Parietais com Parâmetros Multiplicativos . . . . .	49
5.1.1	Motivação . . . . .	49
5.1.2	Análise para $\alpha = 2^\circ$ . . . . .	50
5.1.3	Análise para $\alpha = 1^\circ$ . . . . .	51
5.1.4	Análise para Todos os Valores de $\alpha$ . . . . .	52
5.1.5	Estratégias Ampliadas . . . . .	55
5.2	Cenário II: Flexibilização da Modelagem . . . . .	56
5.2.1	Motivação . . . . .	56
5.2.2	Dados de Campo . . . . .	57
5.2.3	Força Adicional . . . . .	59
5.3	Discussão . . . . .	61
	<b>Conclusão</b>	<b>63</b>



# Capítulo 1

## Introdução

A compreensão dos fenômenos aeroelásticos é de suma importância para o progresso e evolução da tecnologia aeronáutica. Este ramo da aerodinâmica estuda particularmente a interação entre as forças aerodinâmicas e a resposta de uma estrutura submetida a um determinado escoamento. Avanços nessa área tornaram possível prevenir desastres e falhas causados por instabilidades aerodinâmicas, como o flutter. No entanto, ela ainda apresenta questões complexas em aberto, especialmente para regimes de Reynolds pouco explorados pela aviação clássica. Notavelmente, um novo tipo de instabilidade foi observado por Poirel et al. [8] em um regime de Reynolds transicional ( $Re\ 10^4 - 10^5$ ) para um aerofólio NACA0012 em baixas incidências. Esse fenômeno é caracterizado por uma oscilação sustentada do ângulo de ataque, causada pelo descolamento da camada limite inicialmente laminar, seguido por sua transição e posterior recolamento. Este fenômeno é denominado flutter por separação laminar. Este assunto é abordado com mais detalhes no Capítulo 2.

Este trabalho, entretanto, não tem como objetivo trazer contribuições do ponto de vista físico do fenômeno, como já foi feito em outros artigos ([1] [3] [4]). A contribuição deste trabalho reside na área de modelagem de turbulência: propõe-se a correção do modelo Spalart-Allmaras [9] por meio de assimilação de dados, utilizando dados de DNS fornecidos por Sabino [1] como referência de alta fidelidade. Especificamente, o autor deste trabalho implementou e realizou todas as simulações RANS, a formulação e resolução do problema de otimização adjunto, e a análise comparativa dos diferentes parâmetros de controle e fontes de dados. A relevância deste estudo é reiterada principalmente diante da incapacidade de prever corretamente o

flutter por separação laminar usando ferramentas clássicas, como simulações RANS complementadas por modelos de turbulência como o Spalart-Allmaras.

Com isso em mente, este trabalho propõe termos corretivos para o modelo de turbulência Spalart-Allmaras. Essa correção é alcançada pela técnica de assimilação de dados (ou inversão de campo), que aproveita dados de alta fidelidade obtidos por simulação numérica direta (DNS), fornecidos por Sabino [1], resolvendo um problema de otimização. O Capítulo 2 é dedicado à revisão da literatura, incluindo o fenômeno do flutter por separação laminar e a apresentação e análise dos dados de alta fidelidade usados neste trabalho. Consecutivamente, o arcabouço de modelagem será discutido no Capítulo 3, consistindo da modelagem RANS com a equação de turbulência Spalart-Allmaras, juntamente com o modelo de transição BCM. Nesse mesmo capítulo, serão apresentadas as diferentes propostas de correção por assimilação de dados, incluindo parâmetros multiplicativos e forças adicionais. O Capítulo 4 tratará da implementação numérica, apoiada pelo Método dos Elementos Finitos, além do formalismo da assimilação variacional de dados e do algoritmo de otimização BFGS. Uma comparação direta entre as simulações DNS e RANS será também realizada neste capítulo, evidenciando as limitações da modelagem clássica.

Por fim, o Capítulo 5 apresentará os resultados obtidos pela assimilação de dados. Diversos estudos já propuseram modelos semelhantes [10] [7], introduzindo uma correção multiplicativa aos termos de produção ou destruição na equação de turbulência. No entanto, poucos deles discutiram as escolhas ideais de modelagem. Entre essas questões, qual deve ser a forma desse termo corretivo? E como ele influencia o desempenho da correção? Além disso, diferentes dados físicos podem ser usados como referência para o problema de otimização. Como os dados influenciam as capacidades de previsão? Essas respostas são exploradas em profundidade por meio de análises de sensibilidade adjunta, além de um estudo comparativo detalhado dos resultados.

# Capítulo 2

## Revisão da Literatura

Este capítulo tem como objetivo apresentar os fundamentos teóricos e os dados de referência que sustentam este trabalho. Inicialmente, será contextualizado o fenômeno do flutter por separação laminar, incluindo conceitos de aeroelasticidade, instabilidades aeroelásticas e o regime de Reynolds transicional. Em seguida, serão apresentados os dados de alta fidelidade obtidos por Simulação Numérica Direta (DNS), realizados por Sabino [1], os quais servirão como referência para as técnicas de modelagem baseada em dados propostas neste trabalho.

### 2.1 Aeroelasticidade e Instabilidades

Pouco tempo após o primeiro voo oficialmente observado, realizado em Paris pelo engenheiro brasileiro Alberto Santos Dumont, iniciou-se uma era efervescente de evolução nos projetos de aeronaves. Os avanços desejados eram claros: maior manobrabilidade, taxa de subida e velocidade. No entanto, muitos desses aprimoramentos foram feitos às custas de construções estruturais sólidas, tornando as instabilidades aeroelásticas mais prováveis de ocorrer. Durante alguns anos, não havia explicações para algumas falhas observadas no mundo da aviação, e muito progresso foi realizado de maneira ad hoc, por tentativa e erro.

A solução para essas falhas surgiu apenas na década de 1930, com os trabalhos pioneiros de [11], [12] e [13]. A mudança de paradigma deve-se à compreensão de que os fenômenos aeroelásticos são uma interação entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais de um campo de escoamento atuando sobre uma estrutura.

As instabilidades surgem de um processo de retroalimentação: estruturas flexíveis sofrem deformações causadas por forças aerodinâmicas, e essas deformações, por sua vez, alteram a distribuição de carga aerodinâmica, resultando em uma interação contínua.

De maneira mais holística, uma ampla gama de domínios faz uso da interação fluido-estrutura, desde o estudo de aneurismas com modelagem de fluxo sanguíneo até a análise de estabilidade de pontes sob ação de ventos [ref IFS].

### 2.1.1 Tipos de Instabilidades

Existem duas categorias de instabilidades aerodinâmicas: instabilidades dinâmicas e instabilidades estáticas, definidas respectivamente com base no comportamento oscilatório, ou não, da estrutura. Ambas são ilustradas na Figura 2.1, comparadas a uma asa rígida montada em uma mola de torção.

Um exemplo clássico de instabilidade estática é a instabilidade por divergência. Esse fenômeno ocorre quando o momento aerodinâmico exercido pelo escoamento sobre a asa não pode ser contrabalançado pela rigidez elástica da estrutura, resultando em um desvio não oscilatório da incidência da asa em relação à sua posição de equilíbrio.

Entre os diferentes tipos de instabilidade aeroelástica dinâmica, o flutter é o exemplo mais clássico. Este fenômeno ocorre quando o amortecimento total da dinâmica é negativo, resultando na amplificação de certas perturbações. Em uma abordagem linear, é possível determinar a "velocidade reduzida crítica" de uma aeronave, que corresponde ao amortecimento líquido nulo e, portanto, ao início do flutter.

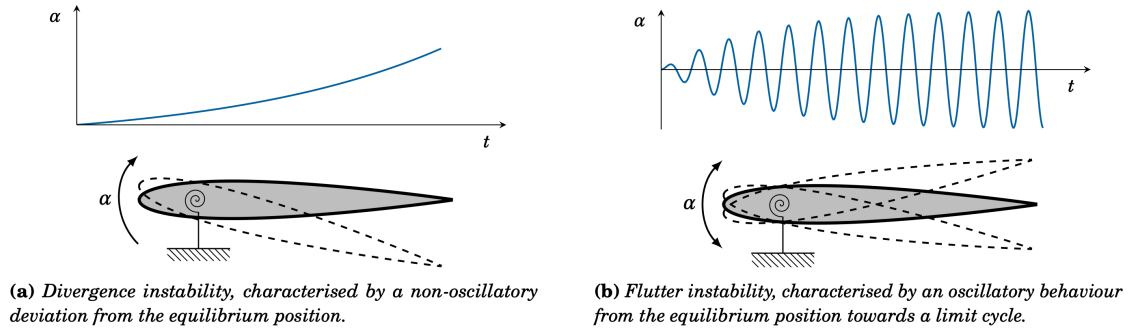


Figura 2.1: Instabilidade estática e instabilidade dinâmica, respectivamente. Sabino et al. [1]

Além disso, existem diversos tipos de flutter, como o flutter de modos acoplados, flutter transônico, flutter de estol e o flutter por separação laminar, que é o principal interesse deste trabalho e o menos compreendido. Para explicá-lo melhor, é necessário entender o contexto físico responsável por seu surgimento: escoamentos em regime transicional.

## 2.2 Regime de Escoamento Transicional

Para regimes de Reynolds elevados, o escoamento turbulento é rapidamente alcançado a partir do primeiro contato com a borda de ataque da asa. Este regime é característico de voos comerciais e leva ao acoplamento da camada limite turbulenta à superfície da asa para uma faixa relativamente ampla de ângulos de ataque. No entanto, para aeronaves de dimensões menores, como drones e planadores, o número de Reynolds está situado em um regime transicional  $Re \in (10^4, 10^6)$ , e a transição não ocorre prontamente na borda de ataque da asa. Dado isso, há uma coexistência de regiões laminares, transicionais e turbulentas, dando origem a dinâmicas não lineares e, conseqüentemente, a fenômenos viscosos complexos. A Figura 2.2 ilustra esquematicamente o processo de separação da camada limite laminar e a formação de uma bolha de separação laminar.

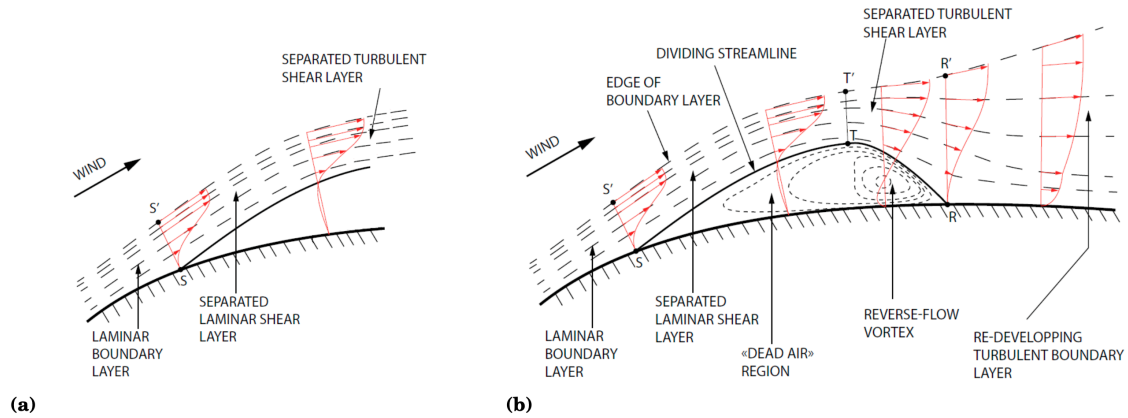


Figura 2.2: Ilustração esquemática de uma separação de camada limite laminar bidimensional e de uma bolha de separação laminar, respectivamente. Busquet et al. [2]

Além disso, o escoamento laminar pós-separação torna-se altamente sensível a perturbações, ficando suscetível à transição para turbulência. Com isso em mente, dois cenários podem ocorrer: o escoamento permanece separado por toda a superfície restante da asa, resultando em um rastro a jusante da borda de fuga, geralmente apresentando maior arrasto e possível perda de sustentação. Por outro lado, se os gradientes adversos de pressão forem suficientemente grandes, ocorrerá o recolamento, produzindo uma zona de recirculação comumente conhecida como bolha de separação laminar (LSB). Dentro da bolha, o escoamento pode estar circulando, e a velocidade próxima à superfície do aerofólio pode até mesmo ser oposta à velocidade do escoamento externo. Há quase nenhuma troca de energia com o escoamento externo, o que torna a LSB bastante estável. A Figura 2.3 apresenta as diferenças entre uma bolha de separação laminar curta e uma longa.

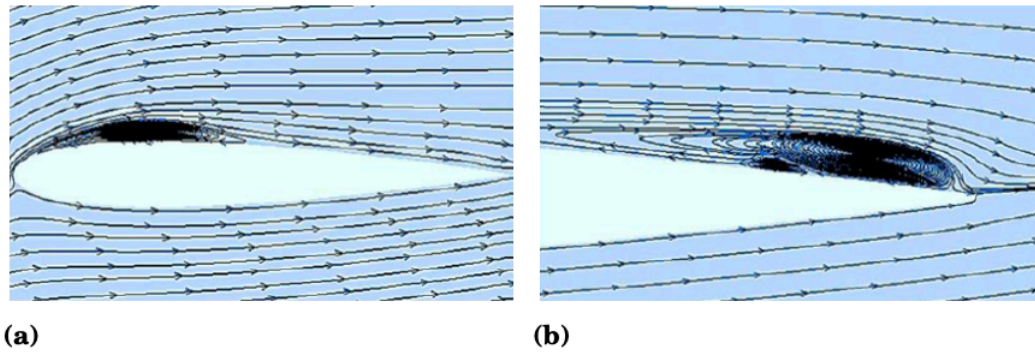


Figura 2.3: Uma bolha de separação laminar curta e uma longa, respectivamente. Xia et al. [3]

Os comentários e particularidades do regime de Reynolds transicional discutidos aqui foram feitos para o caso de um aerofólio fixo, no qual as dinâmicas estruturais não são levadas em conta. Agora, ainda neste contexto físico, uma investigação será realizada sob a perspectiva das instabilidades fluido-estrutura. O fenômeno de interesse deste trabalho é o flutter por separação laminar, no qual a LSB e o momento aerodinâmico negativo estão ligados às oscilações estruturais.

Como mencionado anteriormente, a complexidade desse fenômeno se manifesta por meio de um comportamento não linear de difícil previsão, especialmente para esforços aerodinâmicos. Muller et al. [5] foram os primeiros a relatar esse fato, indicando que para ângulos de ataque na faixa de  $0^\circ < \alpha < 3^\circ$ , o coeficiente de sustentação é negativo. Este estudo foi realizado para o aerofólio simétrico NACA66<sub>3</sub>-018, e este fenômeno é observado particularmente em  $Re = 130000$ . Abaixo e acima desse número de Reynolds, não se observa sustentação negativa. As mesmas observações foram descritas recentemente para um aerofólio NACA0012 por Ohtake et al. [4]. Eles observaram este fenômeno para números de Reynolds entre  $Re = 25000$  e  $70000$ , detectando a presença de um regime de baixo arrasto para ângulos de ataque na faixa de  $-11^\circ < \alpha < 11^\circ$ . A Figura 2.4 apresenta esses resultados experimentais, evidenciando o caráter não linear dos coeficientes aerodinâmicos no regime transicional.

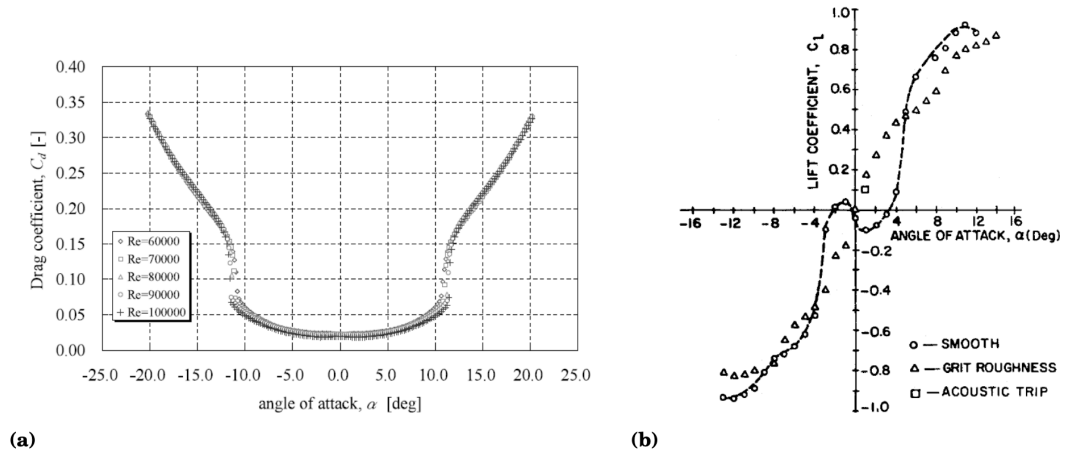


Figura 2.4: À esquerda, evolução do coeficiente médio de arrasto com o ângulo de ataque para diferentes números de Reynolds, a partir dos experimentos de Ohtake et al. [4]. À direita, evolução do coeficiente médio de sustentação com o ângulo de ataque para  $Re = 130000$ , a partir dos experimentos de Muller et al. [5]

## 2.3 Simulação Numérica Direta

As equações de Navier-Stokes são um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o movimento de substâncias fluídas viscosas. Para fluidos incompressíveis e newtonianos, as equações de conservação de massa e de momento podem ser declaradas, respectivamente, como

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \quad (2.2)$$

Essas equações são consideradas a representação matemática mais robusta para a descrição da dinâmica de fluidos e, para uma ampla gama de aplicações, são usadas para descrever fenômenos com precisão em diferentes condições físicas e geometrias.

Vale destacar que essas equações são adotadas neste trabalho sob as hipóteses de incompressibilidade ( $\rho = \text{const.}$ ), fluido Newtoniano e regime isotérmico, hipóteses estas que serão formalmente discutidas e justificadas no Capítulo 3. Os mesmos pressupostos sustentam o DNS de referência fornecido por Sabino [1], garantindo

a consistência da comparação entre as simulações de alta fidelidade e os resultados RANS apresentados nos capítulos seguintes.

Em 1970, o matemático Steven Orszag apresentou em seu artigo "Analytical Theories of Turbulence" duas principais abordagens para obter resultados teóricos relacionados à turbulência [14]. A primeira era por meio de teorias de turbulência, que buscavam fundamentar uma compreensão fenomenológica dos problemas que apresentavam turbulência. Alternativamente, poderia-se resolver *diretamente* as equações de Navier-Stokes por simulação numérica. O termo DNS tem sido usado recorrente desde então.

Formalmente, uma Simulação Numérica Direta consiste em resolver as Eqs. (2.1) e (2.2) sem nenhum modelo de turbulência adicional, capturando *todas* as escalas espaciais e temporais do escoamento — desde as escalas integrais, ditadas pela geometria, até as escalas dissipativas, onde a energia cinética turbulenta é convertida em calor pela viscosidade molecular. Essa exigência de resolução completa é o que distingue o DNS de outras abordagens, como a Simulação de Grandes Escalas (LES), na qual apenas as escalas maiores são resolvidas, ou a modelagem RANS adotada neste trabalho, na qual apenas o campo médio é resolvido e toda a dinâmica turbulenta é modelada.

No entanto, ao optar por esse tipo de solução, pode-se encontrar diversas adversidades de natureza numérica. Notavelmente, considerando a teoria clássica da turbulência, sabe-se que a energia de um escoamento dissipa-se apenas em dimensões espaciais que se encontram na escala de Kolmogorov:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.3)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\varepsilon$  é a taxa de dissipação de energia cinética. Para estimar como esta escala se comporta com o número de Reynolds, parte-se do equilíbrio entre produção e dissipação na escala integral  $L$ , onde  $\varepsilon \sim U^3/L$ , sendo  $U$  a velocidade característica. Substituindo essa estimativa em (2.3) e introduzindo a definição  $Re = UL/\nu$ , obtém-se:

$$\frac{\eta}{L} \sim Re^{-3/4}$$

Como o domínio computacional possui dimensão característica  $L$  em três direções

espaciais, e a malha deve ser refinada o suficiente para resolver a escala  $\eta$ , o número total de pontos de malha necessário escala como:

$$N \sim \left(\frac{L}{\eta}\right)^3 \sim Re^{9/4}$$

Adicionalmente, o passo de tempo deve ser pequeno o bastante para resolver os tempos característicos da escala dissipativa, o que adiciona um fator  $Re^{3/4}$  ao custo, totalizando uma dependência  $\sim Re^3$ .

Isso significa que, à medida que o escoamento se torna mais turbulento, a resolução espacial e temporal exigida cresce de forma extremamente rápida. Dada a natureza altamente não linear das equações de Navier-Stokes, isso apresenta um problema. Se essas escalas não forem resolvidas com precisão no nível numérico, o caráter não linear da equação aumentará exponencialmente os erros, podendo levar a soluções que divergem substancialmente da física.

O propósito dessa breve discussão sobre a natureza de uma simulação numérica direta é ressaltar que essa operação pode demandar alto poder computacional e tempo, restringindo seu uso a geometrias canônicas e regimes de Reynolds moderados. É por essa razão que modelos de turbulência foram desenvolvidos como alternativas ao DNS, situando-se em níveis hierárquicos distintos em termos de custo e fidelidade — DNS, LES e RANS. Neste trabalho, opta-se pela abordagem RANS, que resolve apenas o campo médio estacionário do escoamento, modelando integralmente as flutuações turbulentas. Esta escolha é justificada pelo foco no campo médio em equilíbrio e pelo custo computacional viável, em contraste com a inviabilidade de um DNS sobre o NACA0012 a  $Re = 50000$  para análises paramétricas extensivas. O modelo de turbulência adotado para o fechamento RANS, o de Spalart-Allmaras, será discutido no Capítulo 3.

Para este trabalho, dados de uma simulação numérica direta foram fornecidos por Sabino [1], que estudou em profundidade a estabilidade do fenômeno do flutter por separação laminar por meio de ferramentas teóricas e numéricas. Dados como  $U$ ,  $V$ ,  $W$  e  $P$  traduzem a dinâmica média do fenômeno em equilíbrio. Já as variáveis  $uu$ ,  $vv$ ,  $ww$ ,  $uv$ ,  $uw$  e  $vw$  representam as flutuações de velocidade presentes no contexto físico. Esses resultados foram obtidos para cinco ângulos de ataque:  $0^\circ$ ,  $0.5^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $1.5^\circ$  e  $2^\circ$ , todos em  $Re = 50000$  para um aerofólio NACA0012.

### 2.3.1 Propriedades Diretas

Neste primeiro momento, serão apresentadas análises baseadas em visualizações diretas das quantidades obtidas por DNS. Essa discussão reforçará os resultados qualitativos obtidos nos últimos anos sobre o flutter por separação laminar.

Iniciamos mostrando a velocidade horizontal do escoamento base ao redor do aerofólio NACA0012 (Figuras 2.5 e 2.6). A perda de simetria é facilmente notada à medida que o ângulo de ataque aumenta, assim como o avanço do ponto de separação da camada limite no extradorso.

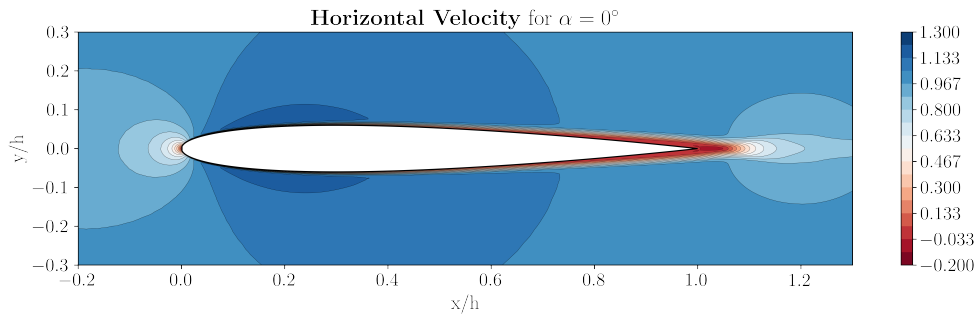


Figura 2.5: Comparação da velocidade horizontal para ângulo de ataque  $\alpha = 0^\circ$ .

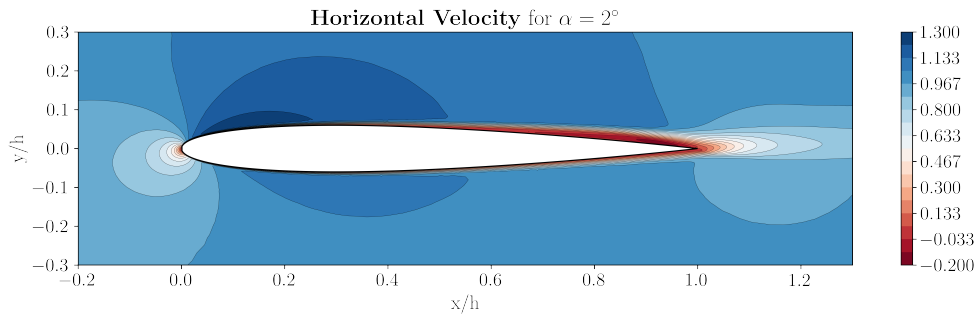


Figura 2.6: Comparação da velocidade horizontal para ângulo de ataque  $\alpha = 2^\circ$ .

Ao analisar cuidadosamente a Figura 2.6, pode-se perceber a bolha de separação laminar formada no extradorso, próximo à borda de fuga (Figura 2.7). As escalas dessa visualização foram adaptadas para facilitar a identificação da região onde a velocidade horizontal torna-se adversa.

Particularmente nessa região, pode-se notar a existência de uma fina camada de velocidade positiva em meio ao campo de velocidade adverso. Isso representa precisamente o contorno da bolha de separação laminar, contendo dentro de si uma zona de recirculação representada por tons de vermelho mais intenso.

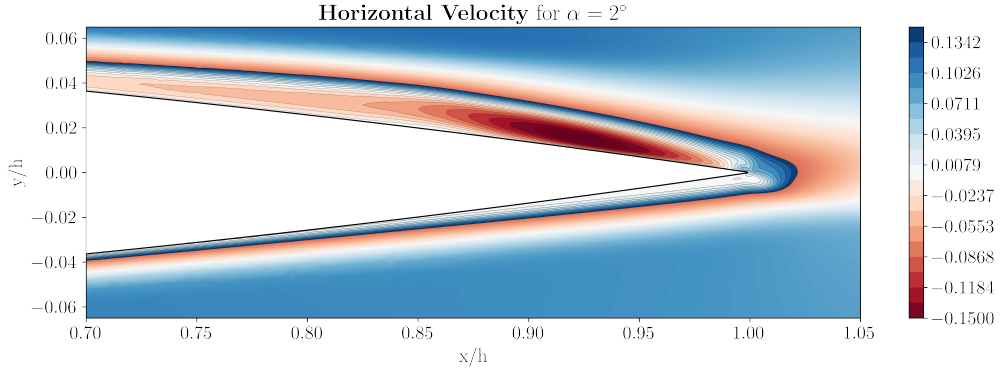


Figura 2.7: Velocidade horizontal para  $\alpha = 2^\circ$ , indicando a Bolha de Separação Laminar.

Finalmente, podemos verificar a evolução do termo de velocidade de perturbação no eixo-z (Figura 2.8). Essa quantidade física serve como métrica das variações tridimensionais ignoradas ao analisar apenas a superposição dessa dinâmica em 2D. Conclui-se que, ao nos aproximarmos de  $\alpha = 2^\circ$ , o fenômeno apresenta uma dinâmica mais complexa em diferentes planos ao longo do eixo-z.

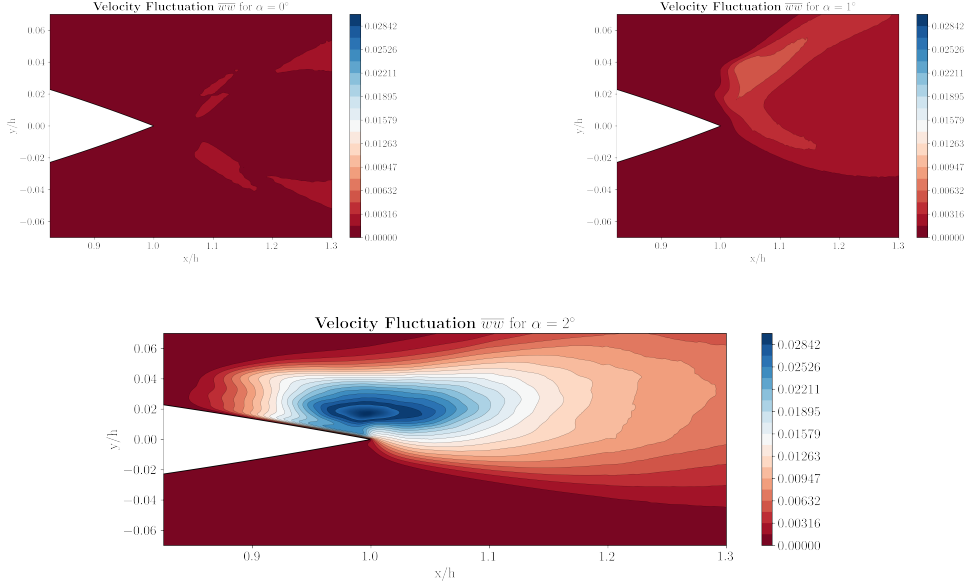


Figura 2.8: Comparação do termo de flutuação na direção z para diferentes ângulos.

### 2.3.2 Propriedades Processadas

Além das propriedades apresentadas anteriormente, há outras grandezas físicas de interesse para este trabalho que ajudarão a guiar os aspectos mais relacionados

à modelagem, os quais serão apresentados nos capítulos seguintes.

Seguindo essa linha, pode-se verificar a validade da hipótese de Boussinesq, que serve como base para inúmeros modelos RANS. Essencialmente, a hipótese de Boussinesq postula que os eixos principais das tensões de Reynolds coincidem com os do tensor de deformação média. Isso permite que o tensor de tensões de Reynolds seja modelado de forma análoga ao tensor de tensões clássico, introduzindo uma variável de viscosidade turbulenta.

$$\overline{u'_i u'_j} = 2\nu_t S_{ij} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$$

Onde  $\nu_t$  é a viscosidade turbulenta,  $k$  é a energia cinética turbulenta, e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Detalhes pertinentes à modelagem RANS serão formalmente apresentados no Capítulo 3.

Pode-se verificar a validade dessa hipótese com base nos dados de DNS, como ilustrado na Figura 2.9. Schmidt et al. [15] introduziram um indicador definido pelo produto interno entre o tensor de tensões sem traço (também chamado de tensor de tensões anisotrópicas)  $\mathbf{R} = \overline{u'_i u'_j} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$  e o tensor de taxa de deformação média  $\mathbf{S}$

$$\rho_{RS} = \frac{|\mathbf{R} : \mathbf{S}|}{\|\mathbf{R}\| \|\mathbf{S}\|} \quad (2.4)$$

Esse indicador mede a proporcionalidade entre esses dois tensores, sendo análogo ao cosseno do ângulo entre vetores. O valor da métrica varia entre 0 e 1, sendo que  $\rho_{RS} = 1$  indica que a aproximação de Boussinesq é completamente respeitada. Além disso, Schmidt et al. [15] estabeleceram (por meio de raciocínio geométrico) que, se  $\rho_{RS} > 0.86$ , faz sentido utilizar uma aproximação linear de viscosidade turbulenta.

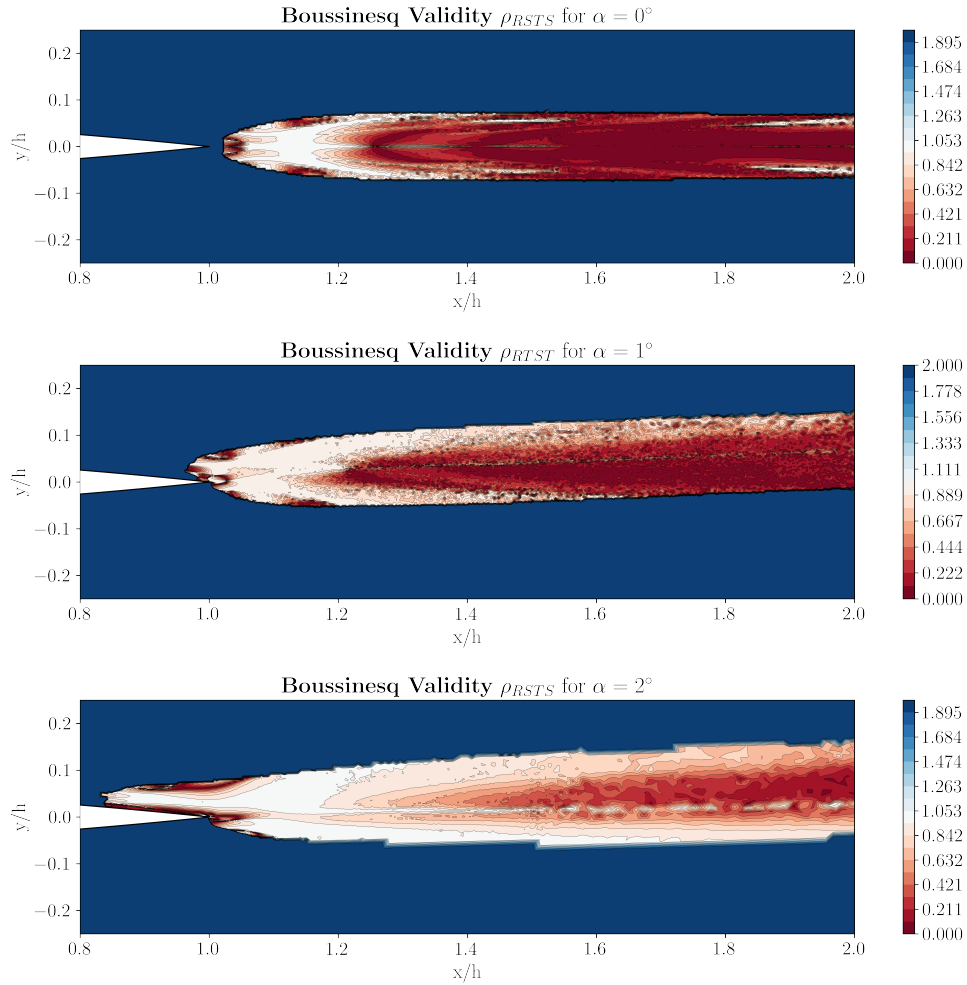


Figura 2.9: Análise da validade da hipótese de Boussinesq para diferentes ângulos de ataque.

Com base nesses resultados, observa-se que a estrutura linear de viscosidade turbulenta é sustentada na região da borda de fuga imediatamente após o perfil. Surpreendentemente, isso se mantém mesmo para ângulos de ataque superiores a  $1^\circ$ , nos quais a bolha de separação laminar já está formada. Por outro lado, conforme avançamos para regiões mais a jusante do perfil, a hipótese de Boussinesq perde sua validade. Essa discussão é de extrema relevância, pois este trabalho busca permanecer dentro de um arcabouço de modelagem sustentado pela hipótese de Boussinesq.

Adicionalmente, pode-se calcular o termo de produção de turbulência utilizando as quantidades fornecidas pelo DNS. Essa grandeza física é bastante relevante, pois será essencial para compreender a magnitude e a distribuição espacial dos aspectos turbulentos do fenômeno.

$$\text{Produção} = -\overline{uu} \frac{\partial U}{\partial x} - \overline{uv} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \overline{vv} \frac{\partial V}{\partial y}$$

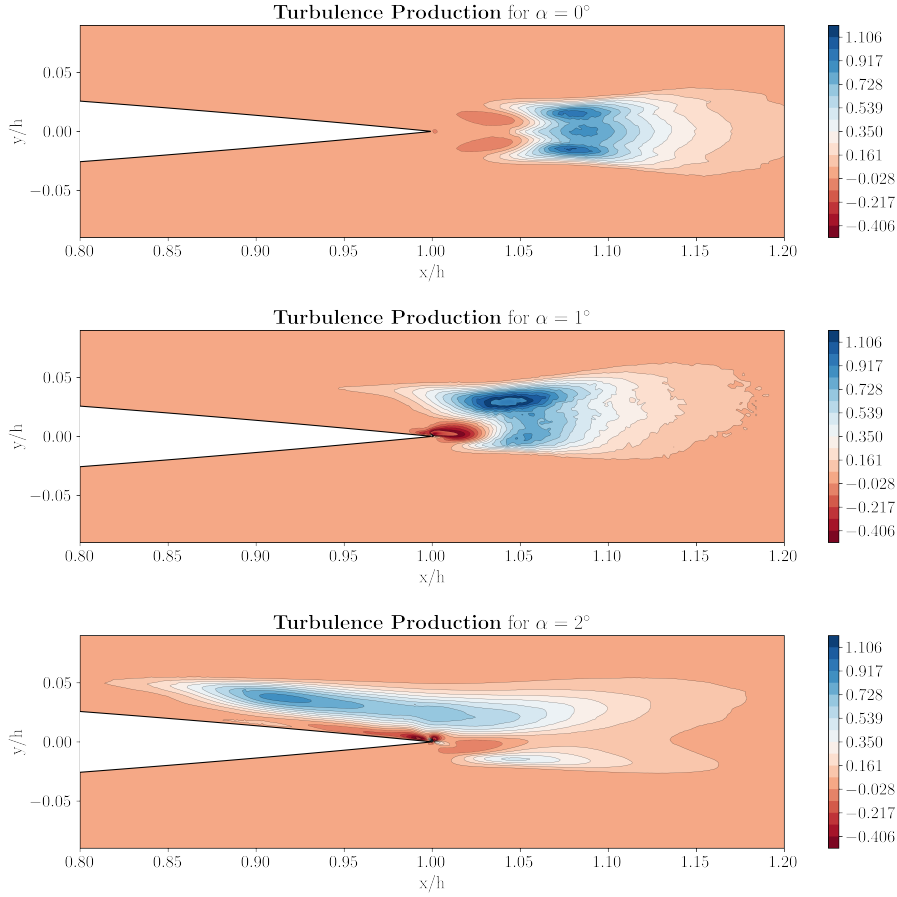


Figura 2.10: Produção de turbulência para diferentes ângulos de ataque.

Portanto, espera-se que o modelo de turbulência escolhido intervenha nas regiões mostradas na Figura 2.10. Reforça-se que, conforme o ângulo de ataque aumenta, uma região de alta complexidade dinâmica é formada próxima à borda de fuga no extradorso.

## 2.4 Coeficientes Aerodinâmicos

Uma análise final que pode ser facilmente obtida a partir dos dados de DNS é no escopo dos esforços aerodinâmicos que atuam sobre o aerofólio NACA0012. Nesse contexto, os coeficientes de pressão ( $C_p$ ), atrito na superfície ( $C_f$ ) e momento ( $C_m$ ) serão analisados.

Inicialmente, mostramos por meio da variação dos esforços globais que, de fato, a complexidade do fenômeno também se traduz nas forças aerodinâmicas que atuam no perfil. Notavelmente, deve-se destacar o aspecto altamente não linear relacionado à variação das forças à medida que variamos o ângulo de ataque. Isso também é reforçado por fatores qualitativos, já que a sustentação global permanece negativa até  $\alpha = 1^\circ$ , e o momento global passa de negativo para positivo para um ângulo entre  $\alpha = 1.5^\circ$  e  $\alpha = 2^\circ$ . Esses resultados são apresentados na Figura 2.11.

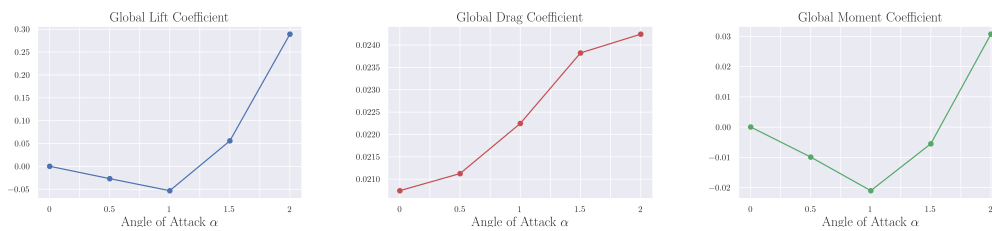


Figura 2.11: Esforços aerodinâmicos globais para diferentes ângulos de ataque.

Complementando essa análise, é possível estudar a influência local da bolha de separação laminar no aerofólio. Uma grandeza que melhor representa esses efeitos é o coeficiente de atrito na superfície no extradorso. Pode-se observar claramente que, para ângulos de incidência de  $1.5^\circ$  e  $2^\circ$ , o valor de  $C_f$  é negativo precisamente onde se espera encontrar a LSB, como pode ser observado na Figura 2.12.

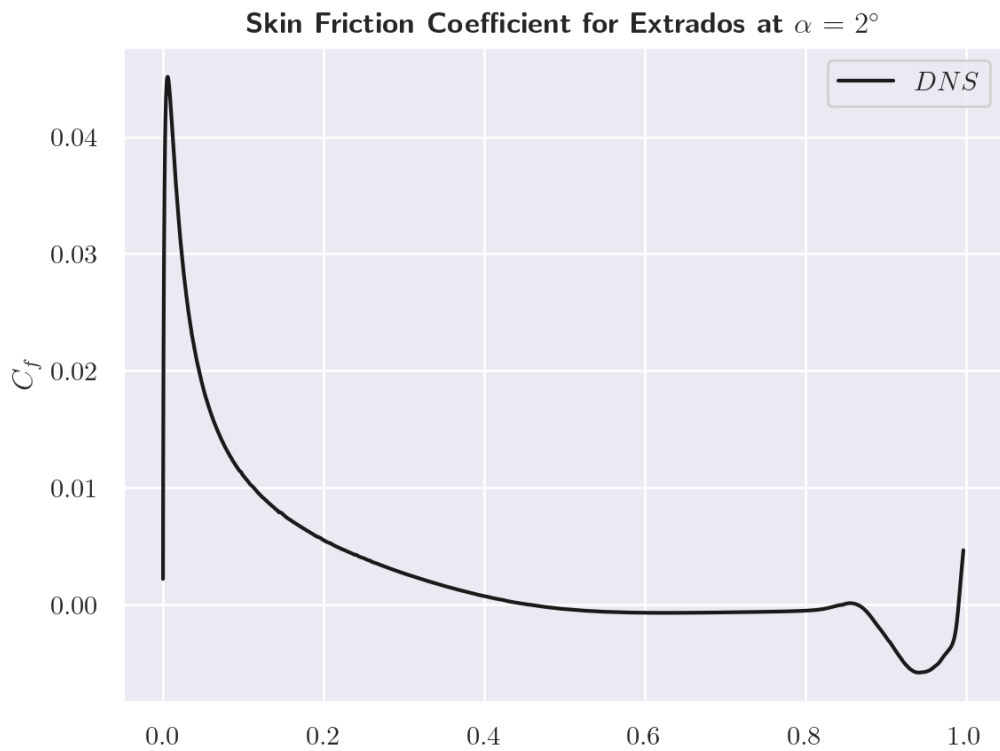


Figura 2.12: Coeficiente de atrito na superfície no extradorso para  $\alpha = 2^\circ$ .

As análises apresentadas neste capítulo fornecem uma compreensão detalhada dos dados de alta fidelidade e das propriedades físicas do fenômeno. Essas informações orientarão as decisões de modelagem apresentadas no próximo capítulo, que abordará o arcabouço RANS com o modelo de turbulência Spalart-Allmaras e as propostas de correção por assimilação de dados.

# Capítulo 3

## Modelagem do Fenômeno

Este capítulo é dedicado à apresentação formal do arcabouço de modelagem que será utilizado neste trabalho. Inicialmente, são explicitadas as hipóteses fundadoras que delimitam o escopo da modelagem. Em seguida, o processo de média e a decomposição de Reynolds das equações de Navier-Stokes serão discutidos, juntamente com os paradigmas associados à modelagem RANS. Posteriormente, o modelo de turbulência Spalart-Allmaras será discutido em detalhes. Esta etapa é de crucial importância, pois este trabalho busca obter modelos corrigidos de Spalart-Allmaras, sendo indispensável uma compreensão robusta do significado físico de cada termo do modelo. Por fim, será realizada uma discussão sobre o papel dos modelos de transição, que atuam de forma complementar e corrigem diversas deficiências da modelagem RANS clássica em regimes de transição.

### 3.1 Hipóteses e Escopo da Modelagem

Antes de prosseguir com a derivação formal das equações RANS e do modelo de turbulência, faz-se necessário explicitar o conjunto de hipóteses que sustenta toda a modelagem aqui adotada. Esse esclarecimento é importante por dois motivos: delimita o escopo de validade dos resultados obtidos e, simultaneamente, evidencia quais aspectos do fenômeno são preservados sem simplificação adicional, justificando a robustez das abordagens propostas.

### 3.1.1 Simplificações Adotadas

- **Incompressibilidade** – O número de Mach do escoamento estudado encontra-se em  $M \ll 0.3$ , condição na qual variações de massa específica induzidas pelo escoamento são desprezíveis. Adota-se, portanto,  $\rho = \text{const.}$ , o que reduz a equação de conservação de massa à forma  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (Eq. 2.1) e desacopla o problema térmico do dinâmico.
- **Fluido Newtoniano** – A relação entre o tensor de tensões viscosas e o tensor de taxa de deformação é considerada linear, com viscosidade cinemática  $\nu$  constante. Esta hipótese é compatível com o ar nas condições de operação consideradas.
- **Regime isotérmico** – Despreza-se a equação de conservação de energia, uma vez que o escoamento opera em condições subsônicas com baixa dissipação viscosa, sem fontes ou sumidouros de calor relevantes.
- **Ausência de forças de campo** – Os efeitos gravitacionais são desprezíveis frente às forças inerciais e viscosas (número de Froude elevado), justificando a ausência do termo  $\mathbf{g}$  nas equações de momento.
- **Bidimensionalidade** – A modelagem RANS é conduzida em domínio bidimensional. Esta escolha encontra suporte na análise dos dados de DNS apresentada no Capítulo 2, onde o termo de flutuação  $\overline{w\overline{w}}$  permanece de magnitude reduzida no regime de interesse, indicando que a dinâmica média do fenômeno é essencialmente bidimensional.
- **Regime estacionário** – Busca-se o campo médio em equilíbrio estatístico, anulando-se a derivada temporal nas equações RANS e na equação de transporte de  $\tilde{\nu}$ . Esta hipótese é coerente com a natureza estatisticamente estacionária dos dados de DNS de referência.

### 3.1.2 Aspectos Preservados

Em contraste com as simplificações listadas, certos elementos físicos centrais para o fenômeno são mantidos integralmente:

- **Termo convectivo não linear** – O termo  $(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}}$  é preservado em sua forma completa. Nenhuma linearização é introduzida, garantindo a captura dos efeitos não lineares responsáveis pela formação da bolha de separação laminar.
- **Viscosidade molecular** – Mesmo em presença do modelo de turbulência, a viscosidade cinemática molecular  $\nu$  é mantida nas equações, em conformidade com o regime de Reynolds transicional ( $Re = 50000$ ) onde efeitos viscosos são determinantes.
- **Geometria do aerofólio** – A geometria curva do NACA0012 é resolvida sem aproximações de pequena espessura ou linearização de placa plana.
- **Transição laminar-turbulenta** – A coexistência de regiões laminares, transicionais e turbulentas é explicitamente acomodada por meio do modelo de transição BCM, acoplado ao Spalart-Allmaras.
- **Anisotropia das tensões de Reynolds** – A hipótese de Boussinesq é adotada em sua forma generalizada por Kolmogorov (Eq. 3.5), preservando a contribuição isotrópica associada à energia cinética turbulenta. A validade local desta hipótese foi verificada nas regiões de interesse no Capítulo 2.

Estabelecido o escopo, prossegue-se com a derivação formal das equações governantes do modelo médio.

## 3.2 Equações RANS

### 3.2.1 Introdução

Como discutido no Capítulo 2, Claude-Louis Navier (1785-1836) e George G. Stokes (1819-1903) formularam o arcabouço matemático fundamental para a descrição dos escoamentos de fluidos newtonianos. Apesar da generalidade das equações de Navier-Stokes (2.1, 2.2), a diversidade de escalas presentes ainda hoje limita, em alguns casos, a simulação numérica direta de escoamentos turbulentos. Osborne Reynolds (1842-1912), entretanto, forneceu uma alternativa viável à solução clássica. Percebendo que as propriedades dos escoamentos turbulentos podem ser descritas

pela superposição de um termo flutuante a um valor médio, Reynolds sugeriu que os campos presentes nas equações governantes fossem divididos em componentes médias e flutuantes ou turbulentas [16].

O resultado formal desse procedimento é, naturalmente, uma nova equação em que os efeitos do campo turbulento são isolados dos termos descritivos do escoamento médio. Apesar de atraente, essa estratégia de solução apresenta um difícil obstáculo: sua aplicação leva ao surgimento de novas variáveis dinâmicas. Assim, a modelagem das propriedades dos escoamentos turbulentos em componentes médias e estocásticas dá origem a um número de variáveis dinâmicas independentes maior do que o número de equações governantes disponíveis. A estratégia de Reynolds, então, resulta em um problema matematicamente indeterminado, geralmente referido como o “problema de fechamento”.

De forma rigorosa, manipulações algébricas aplicadas às equações de Navier-Stokes fornecem equações adicionais, que, por sua vez, apresentam novas incógnitas de ordem superior. Tal comportamento é tipicamente observado em sistemas estocásticos não lineares.

Sob esse ponto de vista, um campo de velocidade turbulento é decomposto como:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \overline{u}_i(\mathbf{x}) + u'_i(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

onde  $\overline{u}_i(\mathbf{x})$  é a velocidade média (estatisticamente estacionária) e  $u'_i(\mathbf{x}, t)$  é o componente flutuante. A decomposição de Reynolds representa uma maneira de introduzir uma formulação estatística para a descrição das dinâmicas de escoamentos turbulentos, permitindo sua modelagem numérica. Contudo, como em todas as descrições estatísticas, há, necessariamente, uma perda de informações potenciais importantes ao adotar um número restrito de parâmetros.

### 3.2.2 Derivação RANS

Dadas as definições discutidas acima, pode-se iniciar o processo de decomposição e média pela equação de conservação de massa:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \longrightarrow \frac{\partial(\overline{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

Nas operações acima, assumiu-se que o valor médio da derivada espacial de uma quantidade é igual à derivada espacial do valor médio dessa mesma quantidade, e empregaram-se as duas propriedades fundamentais do operador de média de Reynolds:  $\overline{\overline{u}_i} = \overline{u}_i$  e  $\overline{u'_i} = 0$ , resultando na equação (3.2).

Para a equação de momento, parte-se da forma indicial da Eq. (2.2), reescrita em forma conservativa via a equação de continuidade:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Aplicando a decomposição de Reynolds (3.1) ao termo convectivo  $u_i u_j$  e tomando a média temporal, obtém-se:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u}_i + u'_i)(\overline{u}_j + u'_j)} = \overline{u}_i \overline{u}_j + \overline{u'_i u'_j}$$

onde os termos cruzados  $\overline{u_i u'_j}$  e  $\overline{u'_i u_j}$  se anulam, pois  $\overline{u'_i} = 0$  e o campo médio é determinístico. É precisamente neste passo que emerge o tensor  $\overline{u'_i u'_j}$ , responsável pelo problema de fechamento mencionado anteriormente.

Aplicando a média temporal à equação de momento por completo, descartando o termo  $\partial \overline{u}_i / \partial t$  por estacionariedade estatística e reorganizando o termo convectivo via continuidade ( $\partial \overline{u}_j / \partial x_j = 0$ ), obtém-se:

$$\rho \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [\overline{\sigma}_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j}] \quad (3.3)$$

onde  $\overline{\sigma}_{ij} = -\overline{p} \delta_{ij} + \mu (\partial \overline{u}_i / \partial x_j + \partial \overline{u}_j / \partial x_i)$  é o tensor de tensões viscoso aplicado ao campo médio. Cabe ressaltar que a substituição da média temporal pela média de ensemble está implícita nessa derivação e é justificada pela hipótese de ergodicidade, válida em regime estatisticamente estacionário.

As equações (3.3) são geralmente chamadas de equações de Navier-Stokes Promediadas de Reynolds (RANS). Observa-se que elas apresentam exatamente a mesma composição das equações de Navier-Stokes para escoamentos laminares e estacionários, Eq. (2.2), com exceção do último termo no lado direito, que representa a contribuição turbulenta para o escoamento médio.

### 3.2.3 Hipótese de Boussinesq

Como mostrado, a dedução das equações governantes por média temporal introduz novos termos desconhecidos contendo produtos das flutuações de velocidade  $-\overline{u'_i u'_j}$ . Esses termos representam fluxos de momento que atuam como tensões adicionais no escoamento, sendo chamados de “tensões turbulentas” ou “tensões de Reynolds”.

O primeiro modelo para a descrição matemática dos termos de tensões turbulentas foi apresentado por Boussinesq (1877) [15]. O autor propôs que a contribuição das tensões turbulentas para a transferência de momento fosse descrita de forma análoga à ação da viscosidade molecular do fluido, introduzindo assim o conceito de viscosidade turbulenta,  $\nu_t$ . Dessa forma, a hipótese de Boussinesq afirma que:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.4)$$

Há claramente uma analogia direta entre o modelo proposto por Boussinesq e o modelo de viscosidade molecular  $\nu$  para fluidos newtonianos. Contudo, ao contrário da viscosidade molecular, a viscosidade turbulenta não é uma propriedade do fluido, mas sim do escoamento, devendo incluir parâmetros que caracterizem adequadamente as tensões turbulentas em sua formulação.

Nos últimos anos, a hipótese de Boussinesq, em uma forma generalizada proposta por Kolmogorov (1942), tem sido amplamente utilizada para a modelagem de escoamentos turbulentos. De acordo com Kolmogorov, o tensor de Reynolds, em sua forma geral, é expresso por:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} \quad (3.5)$$

onde  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker e  $\kappa$  a energia cinética turbulenta por unidade de massa.

Dado este arcabouço proposto, o último passo para o fechamento definitivo das equações RANS é um modelo de turbulência que lide com a viscosidade turbulenta. Neste trabalho, será utilizado o modelo Spalart-Allmaras.

### 3.3 Modelo de Spalart-Allmaras

O primeiro modelo de turbulência amplamente utilizado com sucesso em diversas disciplinas de engenharia foi o modelo  $k - \epsilon$  (1973) [17]. No entanto, esse modelo não é preciso na previsão de escoamentos de camada limite com gradientes adversos de pressão, sendo particularmente desafiador para aerofólios e asas em altos ângulos de ataque, além de aplicações em turbomáquinas. Adicionalmente, o modelo  $k - \epsilon$  apresenta desempenho ainda pior na presença de choques, que amplificam os gradientes adversos de pressão.

Diante disso, modelos notáveis foram propostos para corrigir as deficiências do  $k - \epsilon$ , como o modelo  $k - \omega$  (1988) [18] e o modelo Spalart-Allmaras (1994) [9]. Por ser descrito por apenas uma equação — possibilitando um estudo mais aprofundado — este trabalho lida exclusivamente com o último.

#### 3.3.1 Viscosidade Turbulenta Modificada

A primeira característica notável do modelo Spalart-Allmaras é o tratamento cuidadoso das dinâmicas próximas à parede. Sabe-se que o valor de  $y^+$  varia linearmente com a viscosidade turbulenta  $\nu_t$  na região logarítmica ( $y^+ > 30$ ) (Fig. 3.1). Contudo, na subcamada viscosa ( $y^+ < 5$ ), esse perfil é quártico, ou seja,  $\nu_t \sim (y^+)^4$ . Esse comportamento exige uma discretização substancialmente mais refinada nas regiões próximas à parede.

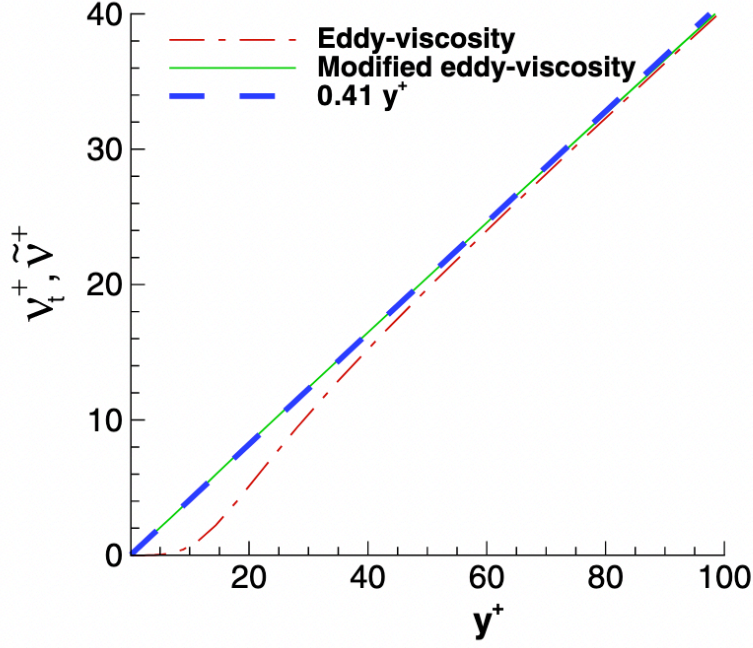


Figura 3.1: Viscosidade turbulenta  $\nu_t$  e viscosidade turbulenta modificada  $\tilde{\nu}$  [6].

Para lidar com essa questão, o modelo Spalart-Allmaras resolve uma equação para  $\tilde{\nu}$ , uma viscosidade turbulenta modificada, em vez de  $\nu_t$ . Essa abordagem lineariza o comportamento tanto na subcamada viscosa quanto na região logarítmica, oferecendo maior estabilidade numérica. A transformação é dada por:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1} \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \quad (3.6)$$

onde  $f_{v1}$  transmite um comportamento cúbico, incorporando efeitos de amortecimento viscoso.

### 3.3.2 Construção da Equação

Antes de apresentar a forma final do modelo, é instrutivo discutir como se chega à equação de transporte para  $\tilde{\nu}$  a partir do arcabouço RANS estabelecido. Essa derivação não segue uma dedução analítica fechada a partir das equações de Navier-Stokes — como ocorre, por exemplo, com a equação de transporte exata para a energia cinética turbulenta  $\kappa$ . Em vez disso, a equação de Spalart-Allmaras é *construída* de forma fenomenológica, combinando análise dimensional, princípios de invariância (galileana e tensorial) e calibração com escoamentos canônicos. Essa abordagem,

dita *de uma equação*, foi proposta por Spalart e Allmaras [9] como alternativa a modelos de duas equações como  $k - \epsilon$  e  $k - \omega$ , evitando a equação adicional para a escala dissipativa.

### Ponto de partida: fechamento via viscosidade turbulenta

A hipótese de Boussinesq (Eq. 3.5) reduz o fechamento das equações RANS à determinação de uma única quantidade escalar,  $\nu_t$ , com dimensão  $[L^2/T]$ . Postula-se, então, uma equação de transporte para uma variável de trabalho  $\tilde{\nu}$ , relacionada a  $\nu_t$  pela transformação (3.6), com a estrutura genérica:

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}}_{\text{Transporte material}} = \mathcal{P}(\tilde{\nu}) - \mathcal{D}(\tilde{\nu}) + \mathcal{T}(\tilde{\nu})$$

onde  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{T}$  representam, respectivamente, produção, destruição e difusão. Cada termo é construído individualmente a partir de argumentos físicos.

### Termo de produção

A produção de turbulência ocorre em regiões de cisalhamento. Por análise dimensional, busca-se um termo proporcional a  $\tilde{\nu}$  multiplicado por uma quantidade com dimensão  $[1/T]$  extraída do campo médio. Spalart e Allmaras adotaram a magnitude da vorticidade  $\bar{S} = \sqrt{2\bar{\Omega}_{ij}\bar{\Omega}_{ij}}$ , onde  $\bar{\Omega}_{ij}$  é a parte antissimétrica do gradiente de velocidade média. A escolha da vorticidade — em detrimento da taxa de deformação  $\sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$  usada em outros modelos — foi motivada pela observação de que, em camadas-limite de parede plana, a turbulência é gerada predominantemente pelo cisalhamento associado à vorticidade, garantindo o comportamento adequado em escoamentos com forte rotação. Disto resulta:

$$\mathcal{P}(\tilde{\nu}) = c_{b1}\bar{S}\tilde{\nu}$$

### Termo de destruição

Próximo à parede, a turbulência é amortecida por dois mecanismos: bloqueio inercial pela presença da superfície sólida e dissipação viscosa intensificada. Spalart e Allmaras impuseram que, na subcamada viscosa,  $\tilde{\nu}$  deve decair conforme  $\tilde{\nu} \propto d$ ,

com  $d$  sendo a distância à parede. Por análise dimensional, o termo de destruição mais simples compatível com este comportamento é da forma  $(\tilde{\nu}/d)^2$ , multiplicado por uma constante de calibração:

$$\mathcal{D}(\tilde{\nu}) = c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2$$

A função  $f_w$  é introduzida para corrigir o comportamento longe da parede, onde a dependência em  $1/d^2$  deixa de ser fisicamente justificável. Ela é construída de modo a tender à unidade em camadas-limite logarítmicas e a decair em escoamentos livres, evitando inconsistências matemáticas no limite  $d \rightarrow 0$ .

### Termo de difusão

O termo de difusão tem duas contribuições. A primeira é uma forma conservativa clássica, análoga à difusão laminar, que assegura o transporte espacial de  $\tilde{\nu}$  pela própria viscosidade efetiva  $(\nu + \tilde{\nu})$ . A segunda é uma contribuição não conservativa, proporcional ao quadrado do gradiente de  $\tilde{\nu}$ , calibrada para reproduzir corretamente o espalhamento de perfis de esteira na borda da região turbulenta:

$$\mathcal{T}(\tilde{\nu}) = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right]$$

A constante  $\sigma$  funciona como número de Prandtl turbulento para  $\tilde{\nu}$ .

### Calibração das constantes

As constantes  $c_{b1}$ ,  $c_{b2}$ ,  $c_{w1}$ ,  $c_{v1}$  e  $\sigma$  não são derivadas de primeiros princípios, mas calibradas a partir de soluções analíticas e experimentais em escoamentos canônicos: camada-limite turbulenta sobre placa plana (lei logarítmica), esteira livre, camada de mistura e escoamentos com gradiente de pressão adverso. Este caráter empírico é precisamente o que justifica, no Capítulo 5, a busca por correções baseadas em dados de alta fidelidade, especialmente em regimes — como o transicional aqui estudado — distantes daqueles utilizados na calibração original.

A combinação dos termos acima produz a equação de Spalart-Allmaras em sua forma final, apresentada na próxima subseção.

### 3.3.3 Equação de Turbulência

A equação de turbulência do modelo Spalart-Allmaras, em sua forma geral, é apresentada a seguir:

$$\underbrace{\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}}_{\text{Transporte}} = \underbrace{c_{b1} \overline{S} \tilde{\nu}}_{\text{Produção}} + \frac{1}{\sigma} \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right]}_{\text{Difusão}} - \underbrace{c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2}_{\text{Destruição}} \quad (3.7)$$

Neste trabalho, busca-se o campo médio estacionário do escoamento. Dessa forma, o termo de derivada temporal  $\partial \tilde{\nu} / \partial t$  é nulo, e a equação é resolvida em regime permanente.

- Transporte - O primeiro termo inclui o transporte convectivo, permitindo que  $\tilde{\nu}$  seja transportado no espaço pelo escoamento médio.
- Produção - O segundo termo gera turbulência em regiões de alto cisalhamento, assumindo que a geração é proporcional à taxa efetiva de cisalhamento  $\overline{S}$  no gradiente de velocidade média.
- Difusão - Este termo inclui um componente linear clássico e outro não linear, calibrado para modelar o espalhamento de perfis de esteira na borda da região turbulenta [9].
- Destruição - O termo de destruição atua principalmente perto da parede, onde a turbulência é eliminada por bloqueio inercial e amortecimento viscoso. A dependência de  $d$ , a distância à parede, reflete esses efeitos, enquanto  $f_w$  evita inconsistências matemáticas quando  $d \rightarrow 0$ .

Assim, o problema de fechamento está completo. Em resumo, a equação Spalart-Allmaras fornece uma estimativa robusta para  $\nu_t$ , fechando o tensor de tensões de Reynolds  $-\overline{u'_i u'_j}$  e completando o arcabouço proposto pelas equações RANS.

## 3.4 Modelo de Transição

Apesar do fechamento das equações RANS pelo modelo Spalart-Allmaras, muitos detalhes intrínsecos à física do fenômeno de transição são frequentemente ne-

gligenciados. Antes de aplicar métodos baseados em dados, é necessário explorar ferramentas complementares, como os modelos de transição.

Esses modelos, acoplados a modelos clássicos de turbulência (como  $k - \epsilon$ ), atuam no termo de produção com um fator multiplicativo. Em regiões laminares, esse fator é nulo; já em regiões turbulentas plenamente desenvolvidas, o modelo opera normalmente. No entanto, em regiões de transição, o fator permite funcionamento parcial.

Um modelo notável é o  $\gamma - Re_\theta$  (2009) [19], composto por duas equações. Apesar de limitações, como a falta de invariância galileana, inspirou outros modelos, como o BCM [20], usado neste trabalho. Aqui, o termo de produção é multiplicado pela função de intermitência  $\gamma_{BC}$ . Em regime estacionário, a equação modificada torna-se:

$$u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \gamma_{BC} c_{b1} \bar{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] - c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \quad (3.8)$$

A função de intermitência é dada por:

$$\gamma_{BC} = 1 - \exp(-\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) \quad (3.9)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  detectam a transição, baseando-se em variáveis como o número de Reynolds e a distância à parede.

Primeiramente,  $T_1$  é definido da seguinte forma:

$$T_1 = \frac{\max(Re_\theta - Re_{\theta_c}, 0)}{\chi_1 Re_{\theta_c}} \quad (3.10)$$

onde o valor da constante de calibração  $\chi_1$  é 0.002, e o número de Reynolds da espessura de momento, juntamente com o número de Reynolds da vorticidade, é dado por:

$$Re_\theta = \frac{Re_{\nu, \max}}{2.193} \quad \text{onde} \quad Re_\nu = \frac{\rho d_w^2 \Omega}{\mu} \quad (3.11)$$

E  $Re_{\theta_c}$  é definido como o número crítico de Reynolds da espessura de momento, que é uma correlação baseada nos dados obtidos em vários experimentos de transição, indicando o surgimento da transição.

Essencialmente, este primeiro termo verificará, para todo o domínio, se  $Re_\theta > Re_{\theta c}$ ; e, caso afirmativo,  $T_1$  será ativado. No entanto, como pode ser visto na Eq.(3.11),  $Re_\theta = f(Re_\nu)$ , e por sua vez,  $Re_\nu$  é uma função de  $d$ , a distância da parede. Isso significa que, para regiões muito próximas à parede,  $T_1$  provavelmente falhará em indicar atividade turbulenta. Por isso, um termo adicional foi adicionado:

$$T_2 = \frac{\max(\chi_2 \frac{\nu_t}{\nu}, 0)}{\chi_2} \quad \text{onde} \quad \chi_2 = 50 \quad (3.12)$$

Esse termo sempre retornará um valor significativo, especialmente para a camada limite e regiões próximas à parede. Os valores da constante de calibração  $\chi_2$  foram determinados por experimentação numérica.

Finalmente, o esquema de modelagem clássica está completo. Em uma breve recapitulação, ele é composto pelas equações RANS, pelo modelo de turbulência de Spalart-Allmaras e pelo modelo de transição BCM. No entanto, como será demonstrado nos resultados preliminares do Capítulo 4, essa modelagem clássica apresenta limitações significativas na previsão das forças aerodinâmicas associadas ao flutter por separação laminar. Isso motiva a extensão do arcabouço de modelagem com técnicas baseadas em dados, apresentadas a seguir.

### 3.5 Assimilação de Dados

Não há nada de novo na ideia de usar dados de alta fidelidade para corrigir modelos. Como sabemos, nenhum modelo fornece uma descrição perfeita da realidade; possuindo seus limites na descrição de uma quantidade finita de efeitos e em um regime específico de parâmetros físicos. Em muitos casos, o modelo propõe corretamente que a dinâmica de um fenômeno obedece a um arcabouço matemático específico. No entanto, ele deixa algumas constantes ou funções abertas que serão calibradas por meio de dados experimentais, permitindo um ajuste ideal do modelo ao fenômeno. Isso pode ser facilmente observado em Spalart-Allmaras (Eq. 3.7) em constantes como  $c_{b1}$ ,  $c_{b2}$  e  $c_{w1}$ .

Entretanto, isso não é assimilação de dados. Essa técnica, desenvolvida principalmente nos campos de meteorologia e oceanografia [21] [22], reforça uma relação muito mais intrincada entre os dados e um modelo base. A combinação desses dois

componentes pode ser utilizada para obter uma melhor descrição das entradas do modelo, como condições iniciais, condições de contorno ou um parâmetro de controle [23] [24]; além de também demonstrar alta eficácia para completar observações experimentais esparsas [25].

O primeiro uso de assimilação de dados remonta a Kalman et al. [26], onde foi necessário estimar todo o estado do sistema a partir de medições parciais limitadas para atuar no sistema com uma lei de controle, estabilizando-o. O filtro de Kalman é o design de tal observador, de modo que sua previsão esteja o mais próxima possível do estado atual. A forma final deste filtro pode ser vista como uma etapa de previsão, onde o modelo do sistema dinâmico é aplicado ao estado a priori, e uma etapa de correção, onde os dados externos (ou medidas) são considerados por meio do filtro, que é construído com base na matriz de covariância do vetor de estado.

Essa técnica tem sido aplicada para vários propósitos em mecânica dos fluidos, como a estimativa do campo de velocidades a partir de instantâneos de Velocimetria por Rastreamento de Partículas em uma configuração de jato planar em  $Re = 2000$  [27], a recuperação de escoamentos turbulentos em regime de baixo Reynolds limitados por paredes a partir de medições na parede [28], a estimativa do número de Mach, ângulo de ataque e campo de viscosidade turbulenta em escoamentos de alto Reynolds em configurações complexas de escoamento [24].

Outra classe de assimilação de dados está associada aos métodos variacionais (VDA) [29], que se baseiam no uso da teoria de controle ótimo [30] para minimizar o erro entre observações de um escoamento de referência e uma estimativa numérica. Uma das primeiras aplicações dessa técnica foi no problema de previsão do tempo (Talagrand e Courtier, 1987 [31]) sob o nome de 3D/4D-Var, onde os parâmetros ajustáveis eram as condições iniciais do modelo dinâmico, de modo que um custo, função do erro entre a previsão do modelo e os dados externos, fosse mínimo.

No que diz respeito à abordagem VDA, as simulações numéricas de escoamentos turbulentos sobre geometrias complexas são geralmente realizadas com as equações de Navier-Stokes médias de Reynolds (RANS) e modelos de turbulência — como apresentado neste capítulo — promovendo, assim, o baixo custo computacional em detrimento da precisão. Entre essas, pode-se distinguir otimização baseada em gradiente (Foures et al. [32], Symon et al. [33]) e otimização baseada em conjuntos

(Iglesias et al. [34], Kato e Obayashi [24]). Mais particularmente, Foures et al. [32] estudaram um escoamento em cilindro com baixo Reynolds [ $Re = \mathcal{O}(10^2)$ ] apresentando desprendimento de vórtices. Eles ajustaram uma força de volume atuando nas equações de Navier-Stokes estacionárias, de modo que sua solução correspondente correspondesse ao máximo às medições de velocidade, imitando uma situação experimental real onde tais medições são fornecidas por um sistema PIV.

Em números de Reynolds ainda mais altos, as equações RANS suplementadas com um modelo de turbulência são uma escolha razoável para o modelo base, pois geralmente fornecem soluções que visam aproximar o escoamento médio turbulento. Por exemplo, Li et al. [35] otimizaram um conjunto de coeficientes em um modelo RANS  $k - \omega$  para corresponder o mais próximo possível aos dados de alta fidelidade fornecidos.

Além disso, Duraisamy et al. [10] empregaram técnicas de otimização baseadas em gradiente para ajustar termos de produção espacialmente dependentes em modelos de turbulência, a fim de recuperar dados de escoamento médio obtidos por DNS ou experimentos. Este procedimento específico também é conhecido como método de Inversão de Campo. Em trabalhos mais recentes, Franceschini et al. [7] mostraram que o procedimento de assimilação de dados permitiu uma recuperação quase exata do escoamento médio em um degrau com recirculação.

Em todos os trabalhos referenciados, há escolhas não triviais em relação ao nível de liberdade dado à correção. Este trabalho valoriza uma análise cuidadosa dessas escolhas e apresenta um estudo comparativo de várias possibilidades dentro do arcabouço da Inversão de Campo.

### 3.5.1 Modelagem Modificada de Spalart-Allmaras

Utilizamos o arcabouço de modelagem discutido nas seções anteriores: as equações RANS (Eq. 3.3), a hipótese de Boussinesq (Eq. 3.5), o modelo de Spalart-Allmaras (Eq. 3.7) e o modelo de transição BCM (Eq. 3.8). De forma compacta, podemos escrever:

$$\overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_i(\tilde{\nu})) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right], \quad \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.13)$$

$$u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = s(\tilde{\nu}, \nabla \tilde{\nu}, \nabla \overline{u_i}) \quad (3.14)$$

onde os termos de produção, difusão e destruição do modelo de Spalart-Allmaras estão condensados no termo  $s(\tilde{\nu}, \nabla \tilde{\nu}, \nabla \overline{u_i})$ .

A primeira correção ao modelo de Spalart-Allmaras que apresentamos não propõe a adição de nenhum termo. Esta correção, por outro lado, foca no aumento ou diminuição dos diferentes termos da equação original, proporcionando assim uma compreensão física da modificação. Para esta técnica, mostramos explicitamente os quatro termos dentro de  $s(\tilde{\nu}, \nabla \tilde{\nu}, \nabla \overline{u_i})$ :

$$\underbrace{u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}}_{\text{Transporte}} = \underbrace{\beta_{prod} \gamma_{BC} P(\tilde{\nu})}_{\text{Produção}} + \underbrace{D_1(\beta_{diff}, \tilde{\nu}, \nabla \tilde{\nu})}_{\text{Difusão}} + \underbrace{\beta_{cross-diff} D_2(\tilde{\nu})}_{\text{Difusão-Cruzada}} - \underbrace{\beta_{des} E(\tilde{\nu})}_{\text{Destruição}} \quad (3.15)$$

Na Equação 3.15, os termos  $P$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  e  $E$  referem-se aos termos de produção, difusão linear, difusão cruzada e destruição, apresentados na Equação 3.7. Nesta nova equação, apresentamos os 4 parâmetros de controle corretivos concomitantemente:  $\beta_{prod}$ ,  $\beta_{diff}$ ,  $\beta_{cross-diff}$  e  $\beta_{des}$ . Contudo, para cada teste realizado, apenas um parâmetro será escolhido para ser corrigido, enquanto os demais permanecerão iguais a 1 em todo o espaço.

Outra modelagem corretiva proposta adiciona termos adicionais à equação de turbulência, atuando como forças:

$$u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = s(\tilde{\nu}, \nabla \tilde{\nu}, \nabla \overline{u_i}) + \tilde{f}_{\tilde{\nu}} \quad (3.16)$$

Essa abordagem foi proposta por Franceschini et al. [7] e implica em uma modificação no equilíbrio entre os termos do modelo de Spalart-Allmaras, alterando a viscosidade turbulenta  $\nu_t$ . Por não estar restrito a nenhum termo previamente definido, esta força adicional demonstra ser substancialmente mais flexível para realizar correções significativas. Diferentemente de outras técnicas presentes na literatura, este método preserva a suposição de Boussinesq, que está de acordo com as análises realizadas no Capítulo 2.

Por fim, propõe-se neste trabalho uma variação sutil da Equação 3.16, que consiste em multiplicar o termo de força adicional pela viscosidade turbulenta modificada:

$$u_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = s(\tilde{\nu}, \nabla \tilde{\nu}, \nabla \overline{u_i}) + \tilde{f}_{\tilde{\nu}} \tilde{\nu} \quad (3.17)$$

Essa correção sutil traz mudanças significativas, pois garante que a força adicional seja nula em regiões onde o modelo de turbulência está desativado, conferindo consistência física ao termo corretivo. Essa escolha será devidamente fundamentada no Capítulo 5.

Assim, o arcabouço de modelagem completo está definido. O próximo capítulo apresentará detalhes da implementação numérica, incluindo a formulação do problema de otimização associado à assimilação de dados e o método numérico para sua resolução.

# Capítulo 4

## Implementação Numérica

### 4.1 Introdução

Após a compreensão completa dos aspectos relacionados à modelagem clássica, este capítulo aborda detalhes da implementação numérica das simulações RANS realizadas neste trabalho, dentro do arcabouço apresentado no Capítulo 3. Os dados de alta fidelidade (DNS) utilizados como referência foram obtidos por Sabino [1], conforme apresentado no Capítulo 2.

Primeiramente, será apresentado o domínio numérico, incluindo a discussão das condições de contorno. Em seguida, a formulação fraca das equações será abordada, destacando sua importância no tratamento variacional do problema. Com isso, será possível apresentar o Método dos Elementos Finitos (FEM) e detalhes relevantes para a convergência consistente dos resultados. Resultados preliminares demonstrarão as limitações da simulação RANS-SA (com o modelo de transição), em relação aos dados de alta fidelidade obtidos via DNS. Por fim, será apresentado o formalismo da assimilação variacional de dados, incluindo o algoritmo de otimização BFGS e as ferramentas de análise complementares (sensibilidade adjunta e curvas em L).

### 4.2 Metodologia

#### 4.2.1 Domínio Numérico

Apresentamos as condições de contorno numéricas usadas na solução dos problemas antes de introduzir a formulação fraca das equações governantes. Uma fronteira

de entrada  $\Gamma_{in}$  limita o domínio físico a montante, enquanto a outra fronteira  $\Gamma_{out}$  limita as zonas superior e inferior na saída. A superfície do aerofólio é indicada por  $\Gamma_w$ , e a Figura 4.1 mostra onde essas diversas fronteiras estão localizadas.

Para as equações de Navier-Stokes, a formulação adota um referencial no qual o aerofólio se move em um fluido em repouso. Dessa forma, impomos velocidade nula no fluido em repouso na fronteira externa  $\Gamma_{in}$  e uma velocidade igual à velocidade do corpo rígido  $\mathbf{u}_w$  na superfície do aerofólio  $\Gamma_w$ , garantindo a condição de não deslizamento na interface fluido-estrutura. Na fronteira de saída  $\Gamma_{out}$ , impõe-se uma condição natural de ausência de tensões. As condições de contorno para velocidade e pressão são:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{in} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_w \quad \mathbf{x} \in \Gamma_w \quad (4.2)$$

$$\sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{out} \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário exterior na fronteira  $\Gamma_{out}$ .

Para a equação de Spalart-Allmaras, as condições de contorno são as seguintes. Na superfície do aerofólio, a viscosidade turbulenta modificada é nula, respeitando a condição de não deslizamento. Na fronteira de entrada, impõe-se um valor nulo ou suficientemente pequeno, representando um escoamento livre de turbulência. Na fronteira de saída, aplica-se uma condição de Neumann homogênea:

$$\tilde{\nu}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_w \quad (4.4)$$

$$\tilde{\nu}(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{in} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial n} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{out} \quad (4.6)$$

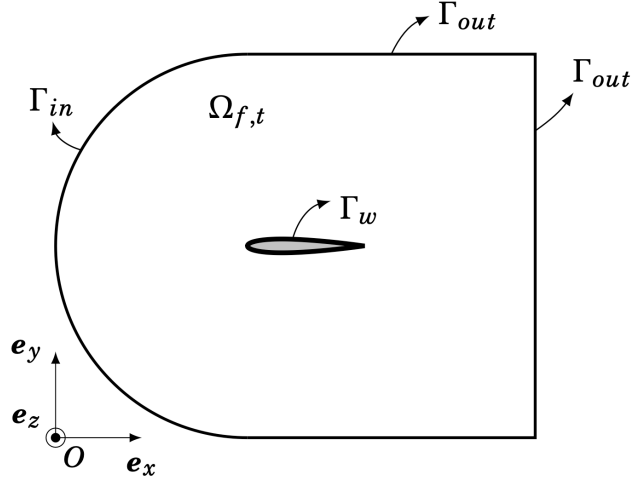


Figura 4.1: Ilustração esquemática do domínio computacional para a simulação. Sabino et al. [1]

## 4.2.2 Formulação Fraca

A formulação fraca foi originalmente introduzida por matemáticos para investigar o comportamento das soluções de equações diferenciais parciais e provar sua existência e unicidade. Mais tarde, esquemas numéricos baseados nessa formulação foram desenvolvidos, permitindo soluções aproximadas. A formulação fraca, também chamada de formulação variacional, garante que a solução satisfaça um mínimo de energia.

Usando as equações de Navier-Stokes (2.2) como exemplo, definimos as variáveis de estado  $\mathbf{u}$  e  $p$  pertencentes aos espaços funcionais  $\mathcal{V}^2\mathbf{u}$  e  $\mathcal{V}^1p$ , respectivamente:

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}^2\mathbf{u} \quad \text{com} \quad \mathcal{V}^2\mathbf{u} = \mathbf{a} \in \mathcal{H}^2(\Omega_f) | \mathbf{a}|_{\Gamma_{in}} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

$$p \in \mathcal{V}^1p \quad \text{com} \quad \mathcal{V}^1 = b \in \mathcal{H}^1(\Omega_f) \quad (4.8)$$

onde  $\mathcal{H}^1$  e  $\mathcal{H}^2$  representam os espaços de Sobolev. Definimos as funções teste  $\mathbf{v}$  e  $q$  nos espaços funcionais  $\mathcal{V}_v^1$  e  $\mathcal{L}^2$  como:

$$\mathbf{v} \in \mathcal{V}^1\mathbf{v} \quad \text{com} \quad \mathcal{V}^1\mathbf{v} = \mathbf{a} \in \mathcal{H}^1(\Omega_f) | \mathbf{a}|_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_w} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

$$q \in \mathcal{L}^2 \quad (4.10)$$

A forma fraca das equações de Navier-Stokes é dada por:

$$\int_{\Omega_f} (\mathbf{u}\nabla), \mathbf{u}\mathbf{v}, +, \nu\nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}, -, p\nabla\mathbf{v}, -, q\nabla\mathbf{u} = 0, , \forall\mathbf{v}, , \forall q \quad (4.11)$$

Com isso, o problema pode ser restringido à busca de funções  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^1$  e  $p \in \mathcal{L}^2$ . A solução dessa forma fraca é única, conforme garantido pelo teorema de Lax-Milgram [36], essencial para a construção do Método dos Elementos Finitos.

### Formulação Fraca da Equação de Spalart-Allmaras

De forma análoga, a formulação fraca da equação de Spalart-Allmaras (Eq. 3.7) é obtida multiplicando-a por uma função teste  $\phi \in \mathcal{H}_0^1(\Omega_f)$  e integrando sobre o domínio. Definimos  $\tilde{\nu} \in \mathcal{V}_{\tilde{\nu}}^1$ , onde  $\mathcal{V}_{\tilde{\nu}}^1 = \{a \in \mathcal{H}^1(\Omega_f) \mid a|_{\Gamma_{in} \cup \Gamma_w} = 0\}$ . A forma fraca estacionária resulta em:

$$\int_{\Omega_f} \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \phi + \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \phi - \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \phi - \gamma_{BC} c_{b1} \bar{S} \tilde{\nu} \phi + c_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 \phi d\Omega = 0 \quad \forall \phi \quad (4.12)$$

O tratamento numérico desta equação segue o mesmo arcabouço de elementos finitos utilizado para as equações de Navier-Stokes. A variável  $\tilde{\nu}$  é discretizada com elementos  $P_1$  e o sistema resultante é resolvido de forma acoplada com as equações RANS.

### 4.2.3 Geração de Malha

Para a discretização espacial, consideramos a partição do domínio fluido  $\Omega_f$  em um número finito de elementos  $\mathcal{K}$ , formando o domínio discreto  $\Omega_f^h$ . A Figura 4.2 apresenta a malha utilizada nas simulações.

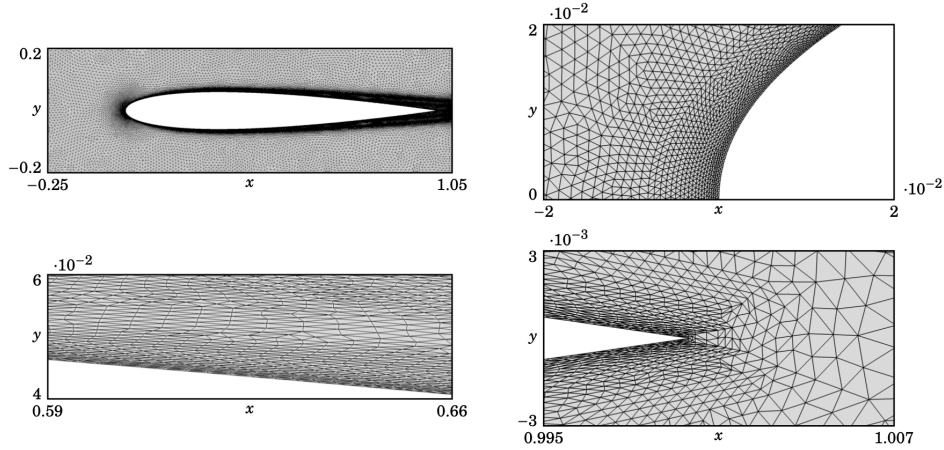


Figura 4.2: Malha triangular bidimensional ao redor do aerofólio NACA0012, para  $\alpha = 0^\circ$ . Sabino et al. [1]

A malha é não estruturada, refinada próximo ao perfil, onde grandes gradientes ocorrem, e mais grosseira conforme se afasta do perfil. Além disso, ao inclinar o perfil ( $\text{AOA} > 0$ ), é a malha que se adapta, não o perfil.

#### 4.2.4 Método dos Elementos Finitos

Embora engenheiros estruturais tenham começado a usar o Método dos Elementos Finitos (FEM) no início da década de 1940 (Courant, 1943), foi apenas no final da década de 1970 e início da década de 1980 que ele foi disponibilizado para a comunidade de mecânica dos fluidos (Babuka, 1973; Pironneau, 1989). Com o FEM, uma solução para uma equação diferencial é construída a partir de uma série de aproximações locais. Nesse sentido, obtemos aproximações indicadas como  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h$ ,  $p \approx p^h$ ,  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}^h$  e  $q \approx q^h$ .

Optamos pela base Taylor–Hood  $P_2/P_1$ , cuja representação está na Figura 4.3. Neste elemento, a velocidade é interpolada com polinômios quadráticos ( $P_2$ ), utilizando nós nos vértices e nos pontos médios das arestas, enquanto a pressão é interpolada com polinômios lineares ( $P_1$ ), utilizando apenas os nós nos vértices. Para um problema bidimensional, obtém-se, para cada célula, 3 graus de liberdade para a pressão e 6 graus de liberdade por componente de velocidade, enquanto que, para um problema tridimensional, há 4 graus de liberdade para a pressão e 10 graus de liberdade por componente de velocidade.

Para a variável  $\tilde{v}$  da equação de Spalart-Allmaras, utiliza-se uma interpolação com polinômios lineares ( $P_1$ ), compartilhando os nós dos vértices com os elementos de pressão.

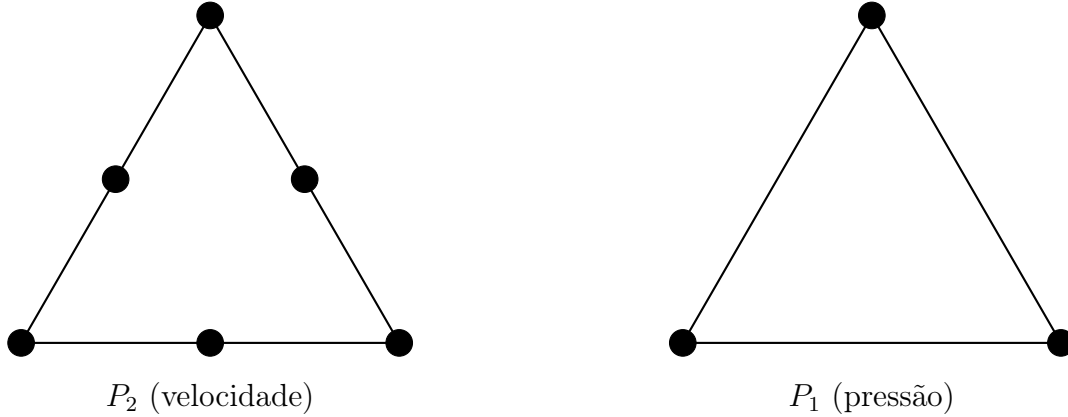


Figura 4.3: Elemento finito triangular Taylor–Hood  $P_2/P_1$ . À esquerda, os 6 nós de interpolação da velocidade (vértices e pontos médios das arestas). À direita, os 3 nós de interpolação da pressão (vértices).

Além disso, inicialmente consideramos o método de Galerkin (conhecido como método de Bubnov–Galerkin) para a escolha das funções de teste. Nesse método, as funções de teste são escolhidas para serem as mesmas da base das funções de tentativa, de forma que:

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{dof}^u} \Phi_j(\mathbf{x}),$$

$$q^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_{dof}^p} \Psi_j(\mathbf{x}),$$

Injetando as decomposições acima na versão discretizada da equação 4.11, e considerando o regime estacionário adotado neste trabalho, obtém-se o seguinte problema discretizado:

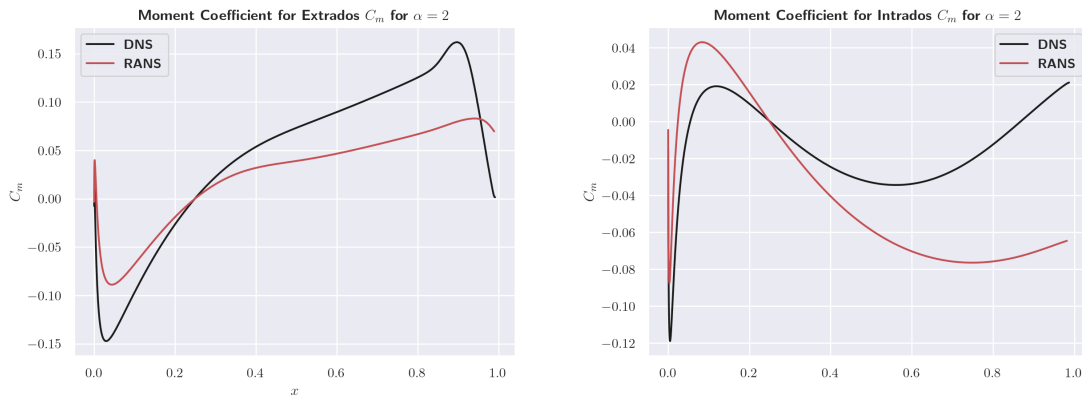
$$\mathbf{R}(\mathbf{u}^h, p^h) = 0 \tag{4.13}$$

onde  $\mathbf{R}$  é o operador residual, definido classicamente exatamente como em [1].

### 4.3 Resultados Preliminares

Agora, podemos finalmente apresentar os resultados comparativos entre os dados de DNS (Capítulo 2) e a modelagem RANS-SA (Capítulo 3), que utilizam os métodos numéricos apresentados neste capítulo.

Analisando exclusivamente os esforços aerodinâmicos, é possível perceber diferenças substanciais entre os resultados. Notavelmente, para o coeficiente de momento ao longo do aerofólio, há uma discrepância preocupante em  $\alpha = 2^\circ$ . Na Figura 4.4a, observa-se que a simulação RANS-SA falha em capturar um incremento considerável dessa propriedade em torno de  $x \approx 0.9$ , precisamente onde a bolha de separação laminar (LSB) está localizada.



(a) Distribuição extradorsal do coeficiente de momento  $C_m$  do modelo RANS-SA. (b) Distribuição intradorsal do coeficiente de momento  $C_m$  do modelo RANS-SA.

Adicionalmente, na Figura 4.4b, a divergência entre os resultados não é apenas quantitativa, mas também qualitativa. Na borda de fuga intradorsal, o coeficiente de momento fornecido pelo DNS torna-se positivo novamente, enquanto a simulação RANS-SA permanece em valores negativos.

Dado que o fenômeno do flutter por separação laminar é uma oscilação sustentada de inclinação, o coeficiente de momento é de grande importância para uma descrição precisa da dinâmica.

Outra visualização que reforça o desacordo dos resultados é a subtração do campo de velocidade horizontal (DNS - RANS-SA). Para o ângulo  $\alpha = 1^\circ$ , há uma diferença significativa nessa propriedade, principalmente em uma região posterior à borda de fuga do perfil (Figura 4.5). Para  $\alpha = 2^\circ$ , essa discrepância se estende para a parte

extradorsal do perfil, imediatamente acima da LSB (Figura 4.6).

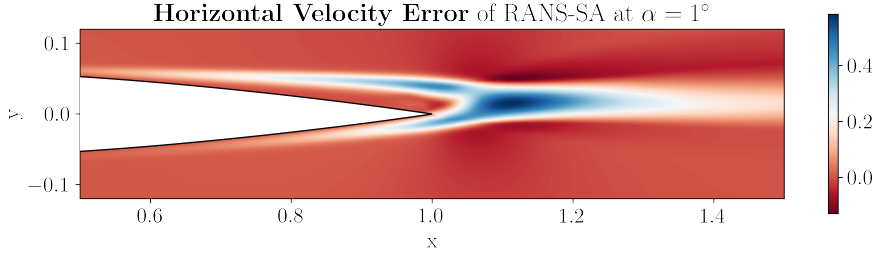


Figura 4.5: Subtração direta dos resultados de DNS e RANS-SA para a velocidade horizontal em  $\alpha = 1^\circ$ .

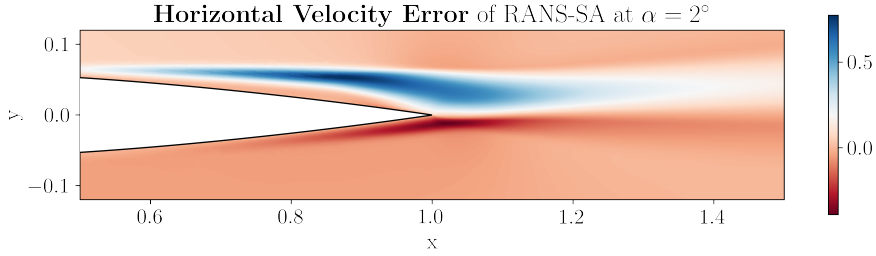


Figura 4.6: Subtração direta dos resultados de DNS e RANS-SA para a velocidade horizontal em  $\alpha = 2^\circ$ .

Esses resultados preliminares evidenciam as limitações da modelagem RANS-SA clássica e motivam a adoção de técnicas baseadas em dados para corrigir o modelo de turbulência, conforme discutido na seção seguinte.

## 4.4 Assimilação Variacional de Dados

Agora que as correções ao modelo de Spalart-Allmaras foram apresentadas no Capítulo 3, é necessário entender como o parâmetro de controle é obtido para cada ponto no espaço. Seja  $m$  um conjunto de medições de alta fidelidade ou experimentais que correspondem a informações extraídas do escoamento, e  $\mathcal{M}(\cdot)$  o operador de medição que permite extrair a medida correspondente da simulação DNS. Para um dado de alta fidelidade  $\mathbf{q}$  de qualquer natureza, este operador seria  $\mathcal{M}(\mathbf{q})$ , resultando em  $\mathbf{m} = \mathcal{M}(\mathbf{q}) \in M$ , onde  $M$  é o espaço de medição, cuja norma é dada, genericamente, por  $\|\cdot\|_M$ . O problema de assimilação de dados pode agora ser

reformulado como um problema de otimização, no qual o parâmetro de controle  $\beta$  (seja um coeficiente multiplicativo ou uma força adicional) será ajustado de forma que o funcional de custo

$$\mathcal{J}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \|\mathcal{M}(\mathbf{q}) - \bar{\mathbf{m}}\|_M^2 + \frac{\alpha_{pen}}{2} \|\beta - 1\|_M^2 \quad (4.14)$$

seja mínimo, tendo como restrições as Eqs. RANS-SA 3.3 e 3.7. Na Equação 4.14, também destacamos a adição de um termo penalizante para a correção, ponderado por  $\alpha_{pen}$ . Isso é importante, pois buscamos não apenas um parâmetro de controle que forneça uma solução mais próxima dos dados de referência, mas que também o faça da maneira menos intrusiva possível.

Seguindo [37], este problema de otimização pode ser resolvido com um algoritmo iterativo baseado em gradiente. Em particular, isso requer o cálculo do gradiente do funcional de custo em relação aos campos de correção,  $\nabla_{\beta} J$ . Para obter uma expressão do gradiente, recorreremos ao formalismo lagrangiano, que permite reescrever o problema de otimização com restrições como um problema de otimização sem restrições. Para isso, o estado é aumentado com um conjunto de multiplicadores de Lagrange (ou variáveis adjuntas)  $(\bar{\mathbf{u}}^{\dagger}, \bar{p}^{\dagger}, \tilde{\nu}^{\dagger})$ , e procuramos por pontos críticos do funcional lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \tilde{\nu}], [\bar{\mathbf{u}}^{\dagger}, \bar{p}^{\dagger}, \tilde{\nu}^{\dagger}], \beta) &= \mathcal{J}(\bar{\mathbf{u}}) \\ &\quad - (\bar{\mathbf{u}}^{\dagger}, \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot ((\nu + \nu_t(\tilde{\nu})) \nabla \bar{\mathbf{u}}))_{\Omega} \\ &\quad - (\bar{p}^{\dagger}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}})_{\Omega} \\ &\quad - (\tilde{\nu}^{\dagger}, \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{\nu} - s(\tilde{\nu}, \nabla \tilde{\nu}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - \beta)_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde  $(q_1, q_2)_{\Omega} = \int_{\Omega} q_1 \cdot q_2 \, d\Omega$  representa o produto interno associado à norma clássica  $L_2$ . Considerando o formalismo lagrangiano, ao zerar a variação do Lagrangiano em relação às variáveis adjuntas  $[\bar{\mathbf{u}}^{\dagger}, \bar{p}^{\dagger}, \tilde{\nu}^{\dagger}]$ , obtemos as equações governantes 3.13 e 3.14. Por outro lado, ao zerar sua variação em relação às variáveis diretas  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \tilde{\nu}]$ , obtemos as equações adjuntas do modelo RANS-SA. Destacamos que, embora apresentemos o formalismo contínuo, na prática resolvemos a matriz adjunta discreta, que consiste na transposta da matriz Jacobiana.

Tomando agora a variação do Lagrangiano em relação aos termos do parâmetro de controle e considerando inicialmente a correção multiplicativa, temos:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta}, \delta \beta\right)_{\Omega} = -(\tilde{\nu}^{\dagger}, \delta \beta)_{\Omega} \longrightarrow \nabla_{\beta} \mathcal{J} = -\tilde{\nu}^{\dagger} T_{SA} \quad (4.16)$$

em que  $T_{SA}$  corresponde ao termo do modelo de Spalart-Allmaras escolhido para ser corrigido. Considerando agora a abordagem de força adicional, encontramos:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{f}}, \delta \mathbf{f}\right)_{\Omega} = -(\tilde{\nu}^{\dagger}, \delta \mathbf{f})_{\Omega} \longrightarrow \nabla_{\mathbf{f}} \mathcal{J} = -\tilde{\nu}^{\dagger} \quad (4.17)$$

Portanto, ao utilizar a força adicional, apenas o adjunto da viscosidade turbulenta modificada determinará a região que mais provavelmente será afetada após a correção.

#### 4.4.1 Método BFGS

Com as informações sobre o gradiente, podemos proceder à implementação do método BFGS. O método BFGS de baixa memória fornece uma convergência de segunda ordem, superando, em geral, métodos de descida por gradiente simples. Essa convergência de ordem superior é alcançada por meio de uma aproximação da Hessiana  $\mathcal{H} = \nabla_F \nabla_F \mathcal{J}$ , que contém as derivadas de segunda ordem do funcional de custo  $\mathcal{J}$  em relação a um vetor de força genérico  $F$ . Essa aproximação é então usada para encontrar a direção de descida resolvendo  $\mathcal{H}_n^{-1} \tilde{\mathbf{G}}_n$ , onde  $\tilde{\mathbf{G}}_n$  é o gradiente numérico na iteração  $n$ . Esta matriz é aproximada por:

$$\mathcal{H}_{n+1} = \mathcal{H}_n + \frac{\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n} - \frac{\mathcal{H}_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathcal{H}_n}{\mathbf{s}_n^T \mathcal{H}_n \mathbf{s}_n} \quad (4.18)$$

com  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{I}$ ,  $\mathbf{y}_n = \tilde{\mathbf{G}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{G}}_n$  a diferença do gradiente entre duas iterações sucessivas, e  $\mathbf{s}_n = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n$  a diferença nos vetores de força. Um esquema do acoplamento do método BFGS com o resolvidor de escoamentos baseado em elementos finitos é mostrado na Figura 4.7.

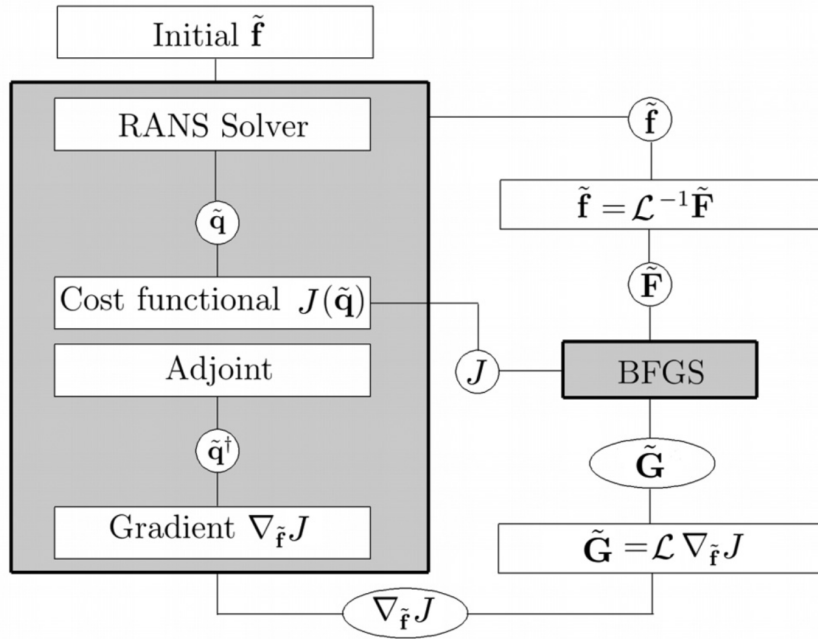


Figura 4.7: Esquema do algoritmo BFGS para um problema genérico, tendo  $\mathbf{f}$  como parâmetro de controle e  $\mathbf{q}$  como estado. A variável adjunta é denotada por  $\mathbf{q}^\dagger$ . Franceschini et al. [7]

Vale mencionar que o algoritmo de otimização permanece nas proximidades da condição inicial (laminar de referência) quando o método BFGS é usado sem corrigir a direção do gradiente (definindo  $\mathcal{L} = \mathcal{I}$  na Figura 4.7). Isso mostra que informar a métrica da malha ao algoritmo BFGS é crucial para a convergência adequada do método.

#### 4.4.2 Análise de Sensibilidade

Uma técnica substancialmente poderosa para problemas de otimização é a análise de sensibilidade. Essencialmente, ela consiste nos resultados obtidos nas Equações 4.16 e 4.17, ao calcular o Lagrangiano em relação ao parâmetro de controle.

Mais especificamente, ao obter o gradiente da função de custo em relação ao parâmetro de controle, podemos entender quais regiões, ao serem afetadas pelo parâmetro de controle, permitirão maior variação do funcional de custo. Isso reflete, portanto, as áreas mais propensas a serem impactadas pelo parâmetro de controle após a assimilação.

Entre os avanços obtidos por esta técnica, destacamos o estudo realizado ao variar o tipo de dado utilizado na assimilação. Objetivamente, não há razão para se esperar que a correção seja a mesma ao usar a distribuição do coeficiente de pressão em vez do coeficiente de atrito superficial ou do campo de velocidades. No entanto, a ideia proposta é confirmada: há uma invariância na área de correção em relação ao uso de dados parietais  $C_p$ ,  $C_m$ ,  $C_f$  e dados do campo de velocidade. Este resultado pode ser observado nas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10, onde a análise de sensibilidade é realizada para a correção no termo de produção a uma incidência de  $1^\circ$ .

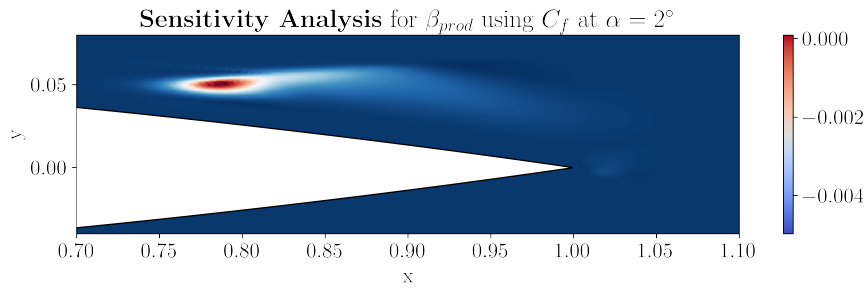


Figura 4.8: Análise de sensibilidade usando dados parietais  $C_f$  em  $\alpha = 2^\circ$ .

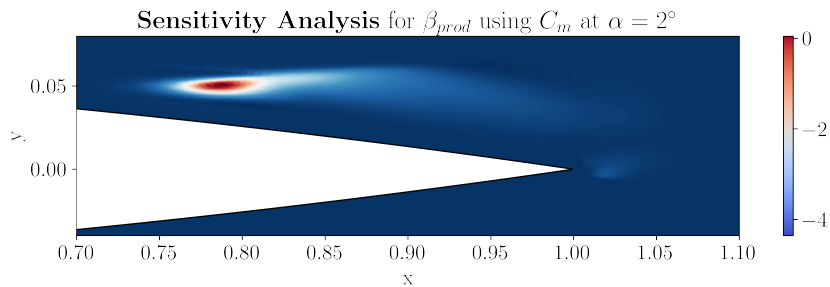


Figura 4.9: Análise de sensibilidade usando dados parietais  $C_m$  em  $\alpha = 2^\circ$ .

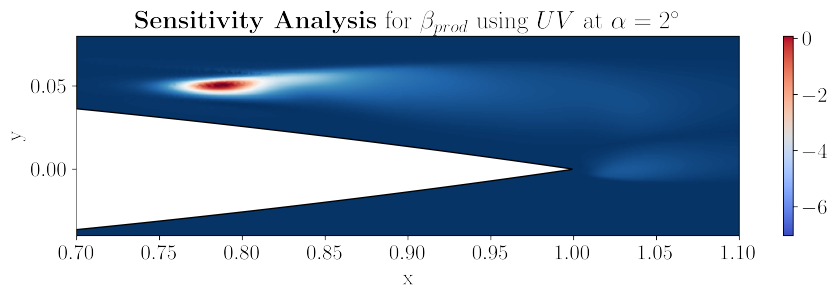


Figura 4.10: Análise de sensibilidade usando dados de campo completo  $UV$  em  $\alpha = 2^\circ$ .

Reforçamos, entretanto, que embora a área de atuação permaneça a mesma, a

capacidade de assimilação pode variar drasticamente dependendo dos dados utilizados. Isso se deve às diferenças na intensidade da correção produzida para se concentrar em certos dados e à capacidade dos dados de fornecer detalhes intrínsecos à complexidade fenomenológica do problema.

### 4.4.3 Curvas em L

Uma última técnica complementar é a análise das curvas em L. A curva em L é um gráfico log-log da norma de uma solução regularizada versus a norma do resíduo correspondente. É uma ferramenta gráfica conveniente para exibir o equilíbrio entre o tamanho de uma solução regularizada e seu ajuste aos dados fornecidos, à medida que o parâmetro de penalização  $\alpha_{pen}$  varia. Assim, a curva em L fornece insights sobre as propriedades regularizadoras do método de regularização subjacente e auxilia na escolha de um parâmetro de penalização apropriado para os dados fornecidos.

Em termos práticos, as curvas em L comparam a magnitude do resíduo entre os dados de alta fidelidade e os dados simulados com a magnitude do parâmetro de correção. Isso permite escolher um parâmetro de penalidade  $\alpha_{pen}$  que atue como um compromisso entre essas duas quantidades. Por um lado, queremos reduzir o resíduo tanto quanto possível; no entanto, priorizamos que essa redução seja mediada por uma correção o menos intrusiva possível. A Figura 4.11 ilustra este procedimento.

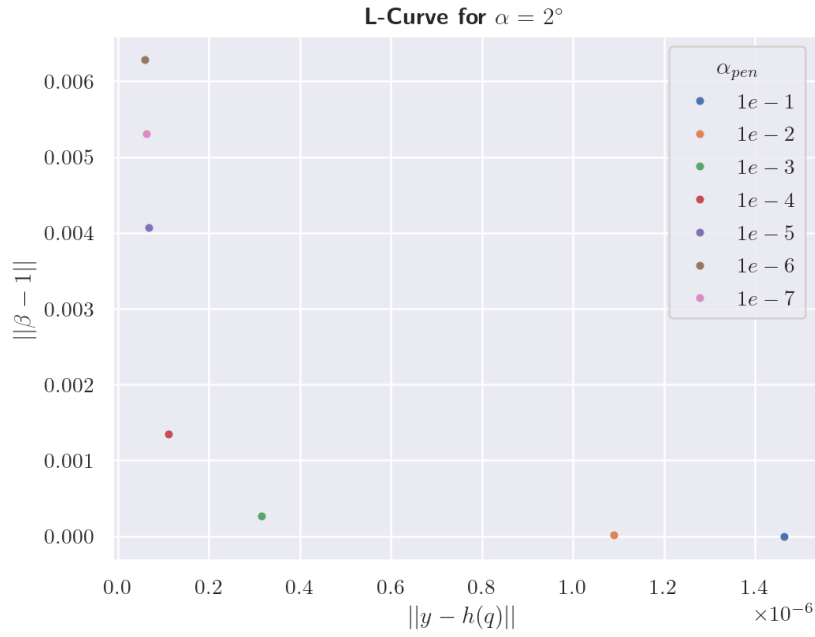


Figura 4.11: Análise da curva em L para assimilação realizada usando dados parietais  $C_f$  para a correção do termo de produção  $\beta_{prod}$ , em  $\alpha = 2^\circ$ .

Como exemplo, vemos na Figura 4.11 que uma penalidade  $\alpha_{pen} = 10^{-5}$  se apresenta como o compromisso ideal entre essas duas escalas ao estudarmos especificamente o parâmetro de controle atuando no termo de produção, utilizando o coeficiente de atrito superficial a uma incidência de  $\alpha = 2^\circ$ .

# Capítulo 5

## Resultados e Discussão

Este capítulo é dedicado à apresentação e discussão dos resultados obtidos pela assimilação de dados, utilizando o arcabouço de modelagem e os métodos numéricos descritos nos capítulos anteriores. **O principal objetivo é responder qual é a configuração ideal para a modelagem de assimilação de dados.** Isso inclui a escolha do parâmetro de controle, tipo de dado e parâmetros ótimos para a função de custo. Devido à natureza extensa dos estudos, duas análises separadas serão realizadas, apontando os benefícios e limitações de certas escolhas.

### 5.1 Cenário I: Dados Parietais com Parâmetros Multiplicativos

#### 5.1.1 Motivação

Nesta primeira etapa, o objetivo é apresentar os resultados obtidos utilizando apenas dados parietais ( $C_p$ ,  $C_f$  e  $C_m$ ), aplicados exclusivamente à otimização de parâmetros de controle multiplicativos na equação de turbulência (Eq. 3.15). Pode-se considerar que este cenário propõe uma modelagem mais “estrita” diante da escassez de dados.

Do ponto de vista prático, essa abordagem limitada tem grande valor por duas razões. A primeira está ligada à replicabilidade deste método, uma vez que há uma quantidade muito maior de dados parietais disponíveis — seja experimentalmente ou numericamente — em comparação com medições do campo de velocidade completo.

Ao demonstrar que correções precisas podem ser obtidas dentro desse escopo de escassez de dados, destaca-se a força e o potencial deste método para muitas outras aplicações.

A outra preocupação relevante está relacionada ao grau de liberdade dado ao parâmetro de correção. Em muitos estudos, excelentes resultados foram obtidos por meio de parâmetros de controle que atuam como forças adicionais na equação de turbulência (Eq. 3.16), ou até mesmo na equação de momento. Apesar da precisão, esses modelos frequentemente oferecem correções sem embasamento físico, apenas ajustando-se aos dados fornecidos. Com a restrição de utilizar somente parâmetros de controle multiplicativos ( $\beta_{prod}$ ,  $\beta_{diff}$ ,  $\beta_{cross-diff}$  e  $\beta_{des}$ ) nos termos originais da Eq. 3.7, garante-se maior interpretabilidade ao resultado assimilado, além de assegurar que as hipóteses fundamentais do modelo base sejam respeitadas.

Finalmente, esta análise propõe comparar 4 parâmetros de controle, utilizando 3 diferentes fontes de dados para 5 ângulos de ataque. Dados os 60 resultados obtidos, por razões organizacionais, o estudo comparativo começa fixando o ângulo de ataque em  $\alpha = 2^\circ$ , que apresenta a maior discrepância entre os resultados RANS e DNS, conforme discutido no Capítulo 4.

### 5.1.2 Análise para $\alpha = 2^\circ$

Esta primeira etapa da análise visa uma comparação completa de todos os parâmetros de controle e todos os tipos de dados parietais, fixando apenas o ângulo de ataque em  $\alpha = 2^\circ$ . Entre as métricas utilizadas para avaliar os resultados assimilados, destacam-se a redução da função de custo (Eq. 4.14) e o erro em norma  $L_2$ :

$$\text{Erro } L_2 = \int_{\Omega} (u_{DNS} - u_{DA})^2 + (v_{DNS} - v_{DA})^2 d\Omega$$

No entanto, os valores do erro em  $L_2$  (em vermelho) são normalizados em relação ao erro  $L_2$  da simulação RANS-SA original, utilizada como palpite inicial para o processo de otimização. Os resultados são apresentados na Tabela 5.1.

Observação	Parâmetro de Controle			
	$\beta_{prod}$	$\beta_{diff}$	$\beta_{cross-diff}$	$\beta_{des}$
Coeficiente de Momento	4.03e-3	2.62e-3	3.19e-3	4.83e-1
	7.38e-2	6.58e-2	7.49e-2	3.51e-1
Coeficiente de Pressão	1.95e-3	1.71e-2	3.41e-3	1.59e-1
	7.32e-2	9.08e-2	7.60e-2	1.69e-1
Coeficiente de Atrito Superficial	3.87e-2	6.53e-2	7.43e-2	2.45e-1
	6.69e-2	1.00e-1	8.23e-2	2.31e-1
Redução Média	1.88e-2	2.83e-2	2.72e-2	2.95e-1

Tabela 5.1: Valores finais da função de custo (preto) e do erro de velocidade no campo sob a norma  $L_2$  (vermelho) para cada observação e parâmetro de controle em  $\alpha = 2^\circ$ , usando  $\alpha_{pen} = 10^{-7}$ .

### 5.1.3 Análise para $\alpha = 1^\circ$

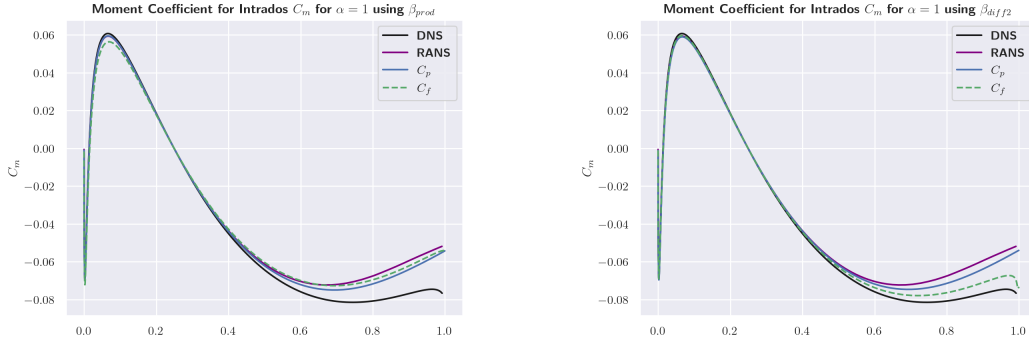
Agora prosseguimos com uma análise de natureza semelhante à da subseção anterior, mas para  $\alpha = 1^\circ$ . Pelas razões mencionadas, restringimos os dados utilizados apenas aos coeficientes de atrito superficial e de pressão; e lidamos com eles exclusivamente para a otimização dos parâmetros de controle atuando nos termos de produção e de difusão cruzada. Os resultados são apresentados na Tabela 5.2.

Observação	Parâmetro de Controle	
	$\beta_{prod}$	$\beta_{cross-diff}$
Coeficiente de Pressão	5.27e-1	6.05e-1
Coeficiente de Atrito Superficial	3.09e-1	<b>5.15e-2</b>

Tabela 5.2: Valores finais para a função de custo em  $\alpha = 1^\circ$ .

Aqui, temos um resultado surpreendente exclusivamente para a assimilação que utiliza os dados de atrito superficial direcionados à otimização do parâmetro atuando

no termo de difusão cruzada. Este resultado está destacado em **negrito** na Tabela 5.2. Complementarmente, pode-se perceber de forma mais substancial essa diferença nas curvas para o coeficiente de momento (Figuras 5.1a e 5.1b).



(a) Coeficiente de momento extradorsal em  $\alpha = 1^\circ$  usando  $\beta_{prod}$ . (b) Coeficiente de momento extradorsal em  $\alpha = 1^\circ$  usando  $\beta_{cross-diff}$ .

É realmente impressionante a incapacidade do método de assimilação de dados de aproximar os resultados DNS quando não utiliza a combinação de dados  $C_f$  e o controle  $\beta_{cross-diff}$ . E, apesar de ser o melhor resultado obtido, pode-se dizer que — ainda assim — são insatisfatórios quando comparados ao potencial desta técnica para outros ângulos.

Diante desses dois resultados, reforça-se a singularidade do controle atuando no termo de difusão cruzada em comparação ao termo de produção. É evidente nos resultados para  $\alpha = 2^\circ$  que o controle atuando no termo de produção apresenta melhor desempenho em vários casos; mas nunca de forma a ser a única opção viável para uma correção robusta. O termo de difusão cruzada pode apresentar um desempenho ligeiramente inferior, mas sempre fornece resultados aproximados.

#### 5.1.4 Análise para Todos os Valores de $\alpha$

Finalmente, propomos uma análise completa para todos os ângulos de ataque; focando exclusivamente no parâmetro de controle atuando no termo de difusão cruzada  $\beta_{cross-diff}$  e utilizando os coeficientes de pressão e de atrito superficial como dados. Diferentemente da análise feita na subseção anterior, aqui optamos por um parâmetro de penalização mais alto:  $\alpha_{pen} = 10^{-8}$ . Os resultados completos são apresentados na Tabela 5.3.

Ângulo de Ataque	Observação	
	$C_p$	$C_f$
$\alpha = 0^\circ$	<b>8.54e-3</b>	7.82e-2
$\alpha = 0.5^\circ$	<b>1.04e-2</b>	6.78e-2
$\alpha = 1^\circ$	5.84e-1	<b>1.24e-1</b>
$\alpha = 1.5^\circ$	<b>5.43e-3</b>	1.53e-1
$\alpha = 2^\circ$	<b>2.03e-3</b>	5.64e-2

Tabela 5.3: Valores finais para a função de custo (preto) e o erro de velocidade do campo sob a norma  $L_2$  (vermelho) para  $C_p$  e  $C_f$  com o parâmetro de controle  $\beta_{cross-diff}$  em todos os ângulos.

Nesta tabela, uma análise comparativa direta é realizada entre os resultados utilizando ambos os dados, de forma que o melhor resultado está destacado em negrito. Imediatamente, pode-se perceber uma divisão relativamente equilibrada desta comparação, sugerindo que existem várias nuances e pesos não triviais na premissa de escolher um dado que se apresente como a melhor fonte.

Adicionalmente, para ângulos menores, como  $0^\circ$  e  $0.5^\circ$ , ambos os resultados coincidem perfeitamente com os resultados DNS e não apresentam discrepâncias, como pode ser visto na Figura 5.2.

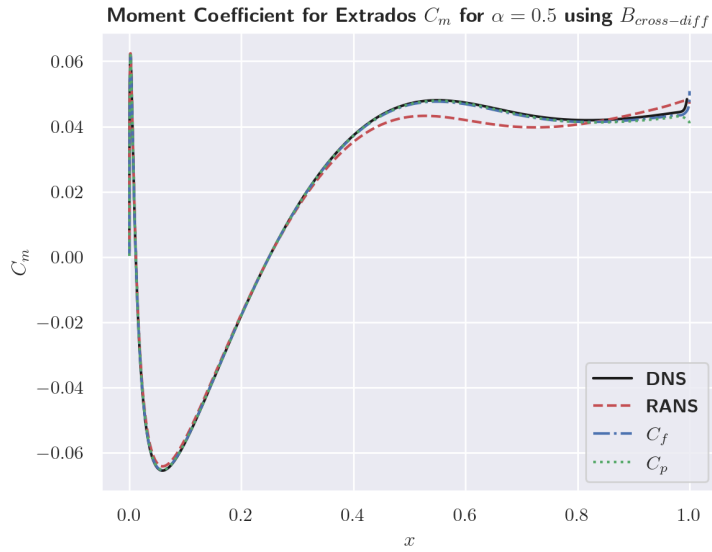


Figura 5.2: Coeficiente de momento extradorsal em  $\alpha = 0.5^\circ$ , mostrando melhores resultados quando  $\beta_{cross-diff}$  é utilizado.

No entanto, nota-se que há uma tendência do coeficiente de atrito superficial apresentar melhores previsões para o campo de velocidade como um todo. Por outro lado, o coeficiente de pressão tem um desempenho geral melhor na redução da função de custo, tornando-o assim um candidato mais adequado para o único propósito de prever forças aerodinâmicas com maior precisão. A Figura 5.3 ilustra esta diferença para  $\alpha = 2^\circ$ .

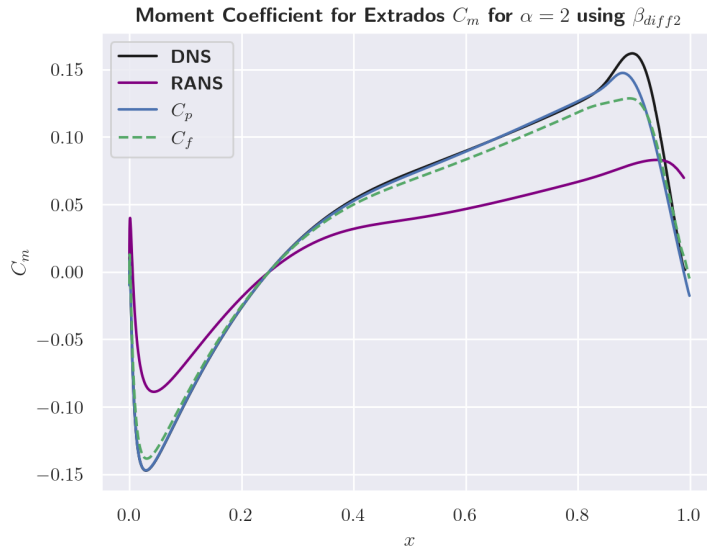


Figura 5.3: Coeficiente de momento extradorsal em  $\alpha = 2^\circ$ , mostrando melhores resultados quando  $C_p$  é utilizado.

Diante desses resultados, é impossível escolher uma fonte de dados que possa ser considerada a melhor. Ambas têm vantagens e desvantagens sob uma análise holística, bem como apresentam diferenças locais. Conforme discutido anteriormente, apenas a combinação entre  $C_f$  e  $\beta_{cross-diff}$  apresenta resultados minimamente consistentes para  $\alpha = 1^\circ$  (Figura 5.1b). Por outro lado, apenas  $C_p$  captura de forma mais precisa alguns esforços extradorsais em  $\alpha = 2^\circ$  (Figura 5.3).

### 5.1.5 Estratégias Ampliadas

Diante de toda a discussão apresentada, pode-se propor uma ideia valiosa, que se apresenta como o primeiro passo para sair do escopo de análise proposto nesta seção. Como existem vantagens intrínsecas apenas ao uso do coeficiente de pressão como fonte e outras vantagens exclusivas ao coeficiente de atrito superficial, será testada a realização de uma assimilação que leve em conta ambos os dados simultaneamente.

Infelizmente, essa abordagem não fornece os resultados esperados e falha em oferecer uma redução suficiente para a função de custo, como pode ser visto na Figura 5.4.

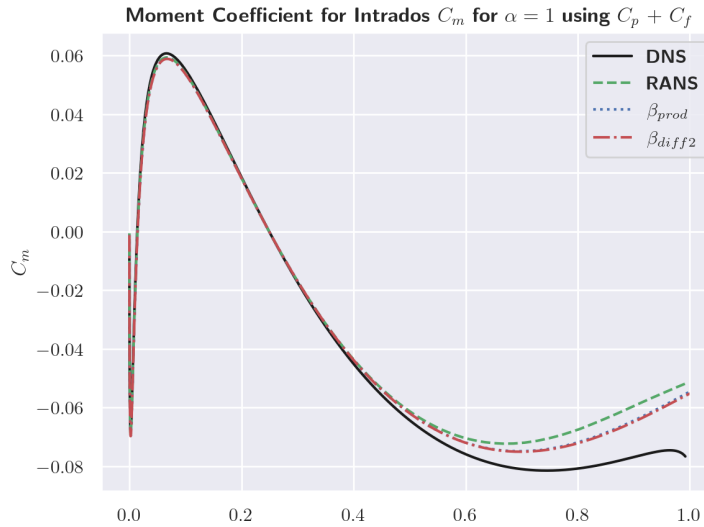


Figura 5.4: Coeficiente de momento intradorsal em  $\alpha = 1^\circ$  utilizando dados parietais combinados  $C_p + C_f$ .

No entanto, a discussão apresentada aqui não perde seu efeito, e possivelmente uma das únicas maneiras de obter resultados completos para a assimilação de dados é com a combinação de dados parietais. Essa linha de pensamento motiva e direciona a pesquisa para outras possibilidades, agora escapando das restrições inicialmente propostas nesta seção.

## 5.2 Cenário II: Flexibilização da Modelagem

### 5.2.1 Motivação

Agora, levando em conta os sucessos e limitações de uma abordagem baseada em uma modelagem relativamente inflexível diante da escassez de dados, buscamos estudar possibilidades que estejam fora desse escopo. Portanto, isso será estudado de duas formas:

- A primeira é remover a restrição imposta ao uso exclusivo de dados parietais. Ou seja, serão analisados os resultados que podem ser obtidos utilizando o campo de velocidade completo. Esses resultados serão valiosos para servir como caso comparativo para o sucesso ou adversidades do uso de dados parietais.

- A segunda análise permanece dentro da proposta de utilização de dados parietais, mais especificamente, o uso combinado de  $C_p$  com  $C_f$ . No entanto, agora tentaremos conferir maior flexibilidade e capacidade de correção ao modelo por meio de um parâmetro de controle que atue como uma força adicional na equação de turbulência (Eq. 3.17). Este parâmetro será multiplicado apenas pela viscosidade turbulenta modificada, de forma a conferir minimamente um caráter físico ao termo adicional.

## 5.2.2 Dados de Campo

De imediato, apresentamos os resultados obtidos utilizando dados de campo  $UV$  para o caso previamente analisado de  $\alpha = 2^\circ$ . Na Tabela 5.4, são mostrados novamente alguns resultados da Tabela 5.1, para facilitar a comparação.

Observação	Parâmetro de Controle	
	$\beta_{prod}$	$\beta_{cross-diff}$
<b>Dados de Campo</b>	9.25e-2	2.70e-2
	4.51e-2	1.76e-2
Coeficiente de Pressão	1.95e-3	3.41e-3
	7.32e-2	7.60e-2
Coeficiente de Atrito Superficial	3.87e-2	7.43e-2
	3.87e-2	7.43e-2

Tabela 5.4: Valores finais para a função de custo (preto) e o erro de velocidade do campo sob a norma  $L_2$  (vermelho) utilizando dados de campo e alguns resultados anteriores, em  $\alpha = 2^\circ$ .

Diferentemente das comparações feitas na subseção anterior, a análise da redução da função de custo fornece poucos insights sobre a precisão dos resultados, já que não reflete imediatamente o comportamento dos esforços aerodinâmicos. Para isso, podemos analisar a Figura 5.5, que mostra resultados satisfatórios, mas totalmente comparáveis aos resultados utilizando dados parietais.

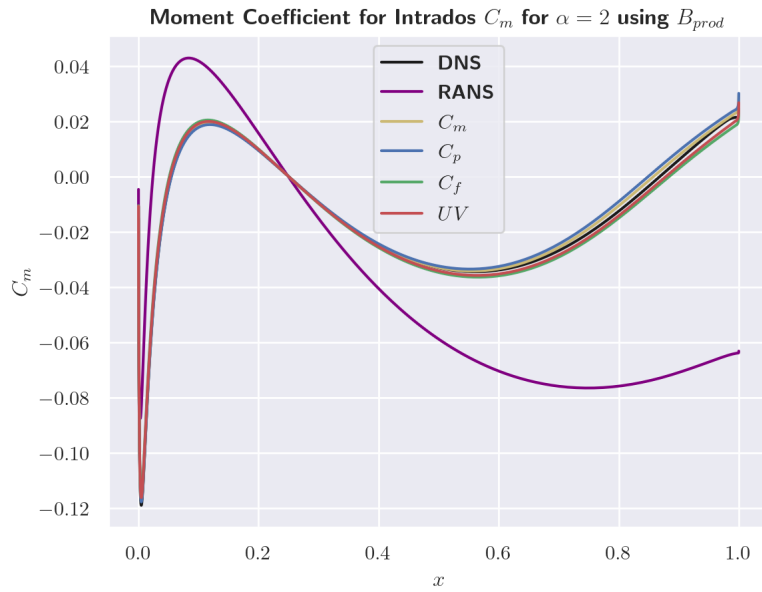


Figura 5.5: Coeficiente de momento intradorsal em  $\alpha = 2^\circ$  comparando resultados de dados parietais e dados de campo completos.

A Figura 5.5 ilustra claramente que, apesar de os resultados utilizando dados de campo completos apresentarem uma redução satisfatória na função de custo, eles não se destacam de forma significativa em relação aos resultados obtidos com dados parietais. Isso sugere que, para o escopo deste trabalho, o uso de dados de campo completos não traz melhorias expressivas em termos de previsibilidade das forças aerodinâmicas.

A grande vantagem desta abordagem é evidenciada quando se observa uma comparação direta da diferença entre a velocidade assimilada e a velocidade DNS; como pode ser visto na Figura 5.6, em contraste com a Figura 5.7.

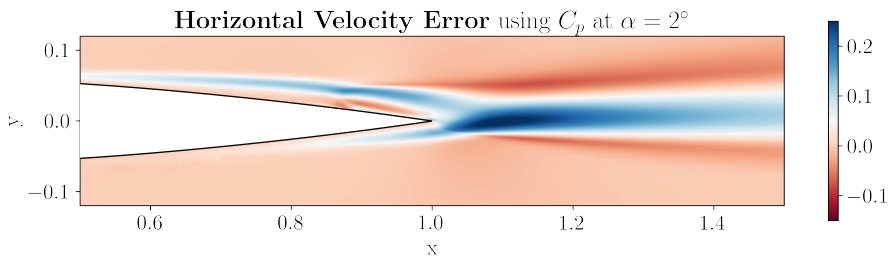


Figura 5.6: Subtração direta entre os resultados DNS e os assimilados utilizando dados parietais  $C_p$  para a velocidade horizontal em  $\alpha = 2^\circ$ .

Do ponto de vista crítico, pode-se concluir que o uso de dados de campo é justificado e valioso quando a discrepância entre o fenômeno real e o resultado não corrigido é mais distribuída espacialmente. Como exemplo, pode-se citar o trabalho de Volpiani et al. [38], no qual a correção abrange uma grande parte do escoamento observado. Quanto ao estudo do flutter de separação laminar, as principais diferenças são percebidas principalmente na parte superior do bordo de fuga, onde se encontra a bolha de separação laminar (LSB).

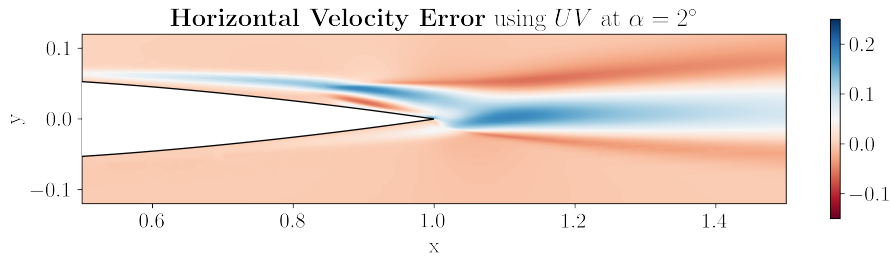


Figura 5.7: Subtração direta entre os resultados DNS e os assimilados utilizando dados de campo completo  $UV$  para a velocidade horizontal em  $\alpha = 2^\circ$ .

Portanto, como o fenômeno estudado é dominado por uma dinâmica que ocorre em uma região relativamente concentrada, a correção com dados de campo completo prova-se funcional, porém ineficaz para capturar os detalhes ligados ao flutter de separação laminar.

### 5.2.3 Força Adicional

Como a ideia de utilizar dados de campo não trouxe melhorias significativas, agora tentaremos uma alternativa ao parâmetro de controle multiplicativo, mantendo os dados parietais. Mais especificamente, a combinação dos dados de coeficiente de pressão e coeficiente de atrito superficial será usada para corrigir uma força adicional (Eq. 3.17).

Diferentemente do trabalho de Franceschini et al. [7], este termo adicional será multiplicado pela viscosidade turbulenta modificada. Essa escolha é justificada pela análise adjunta da viscosidade turbulenta modificada, que corresponde ao gradiente da função de custo em relação à força adicional (Eq. 4.17).

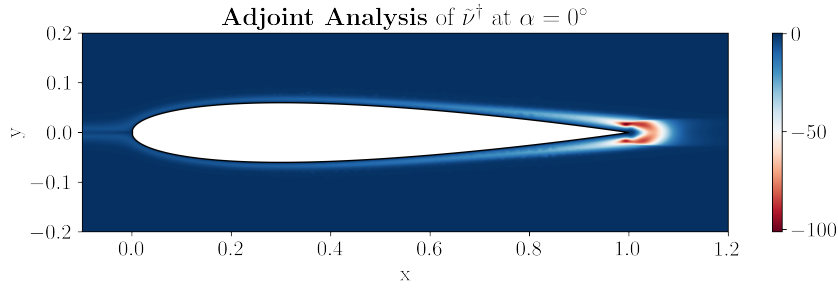


Figura 5.8: Análise adjunta de  $\tilde{v}^\dagger$  em  $\alpha = 0^\circ$ .

A Figura 5.8 mostra que, apesar da magnitude, esta propriedade não é nula em regiões onde o escoamento ainda é laminar. Notavelmente, isso pode ser visto bem próximo ao aerofólio, para regiões onde  $x < 0.6$ . Isso significa que usar a força adicional no arcabouço de Franceschini é suscetível a corrigir áreas onde o modelo de turbulência deveria estar estritamente desativado. Essa inconsistência é corrigida multiplicando a força adicional pela viscosidade turbulenta modificada, garantindo que o modelo seja fisicamente consistente em relação ao domínio espacial no qual ele pode aumentar ou diminuir o comportamento turbulento.

Como pode ser observado nas Figuras 5.9 e 5.10, ao analisar os casos que apresentaram mais inconsistências ( $\alpha = 2^\circ$  para o  $C_m$  extradorsal e  $\alpha = 1^\circ$  para o  $C_m$  intradorsal), notamos uma concordância completa com os dados DNS.

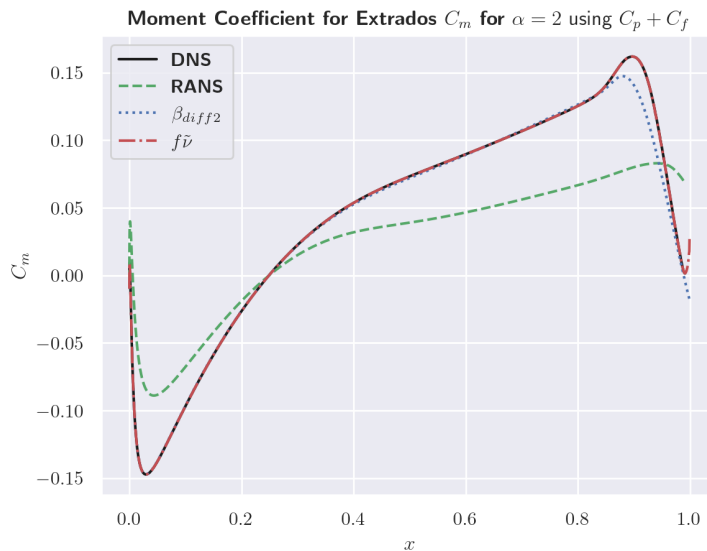


Figura 5.9: Coeficiente de momento extradorsal em  $\alpha = 2^\circ$  utilizando dados parietais combinados e uma força adicional.

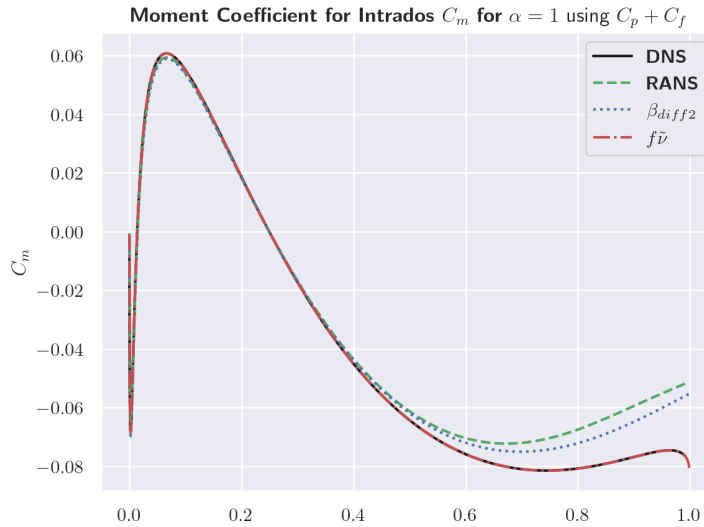


Figura 5.10: Coeficiente de momento intradorsal em  $\alpha = 1^\circ$  utilizando dados parietais combinados e uma força adicional.

De fato, por meio desta técnica, todas as curvas de esforço aerodinâmico mostram consistentemente concordância perfeita com os dados DNS. Diante disso, pode-se dizer que remover a restrição imposta ao uso exclusivo de parâmetros de controle multiplicativos é altamente justificável. Também reforçamos que, para essa abordagem, não foi necessário sair do escopo de dados parietais. Isso é de absoluta importância, pois demonstra que resultados perfeitamente precisos podem ser obtidos utilizando uma quantidade limitada e localizada de dados.

### 5.3 Discussão

Os resultados obtidos ao longo deste capítulo permitem traçar um panorama comparativo abrangente das diferentes escolhas de modelagem para a assimilação de dados.

Primeiramente, é necessário levar em consideração os dados de alta fidelidade utilizados. O estudo mostra que, para uma descrição mais precisa do campo de velocidades em seus menores detalhes, os dados de campo são indispensáveis. No entanto, o fenômeno estudado aqui está parcialmente ligado a esforços estruturais, o que enriquece o potencial de descrição associado aos dados parietais. O uso de coeficientes aerodinâmicos ( $C_p$ ,  $C_f$ ,  $C_m$ ) não é apenas suficiente para uma descrição

precisa do fenômeno, como também é mais poderoso do que o uso de dados de campo completo; notadamente, quando são utilizados dados parietais combinados ( $C_p + C_f$ ).

Paralelamente, há a escolha do parâmetro de controle ideal para a modelagem. Mostramos que o termo de destruição é incapaz de descrever corretamente a dinâmica do fenômeno. Os termos de produção e difusão cruzada apresentam resultados robustos. No entanto, apenas com a adição de uma força multiplicada pela viscosidade turbulenta modificada obtemos resultados que se assemelham perfeitamente aos dados de alta fidelidade.

Esses resultados podem ser estendidos para uma crítica da validade física do modelo de Spalart-Allmaras para o fenômeno estudado. Mesmo corrigindo localmente os diferentes efeitos físicos contemplados pelo modelo (produção, difusão e destruição da turbulência da forma como foram formulados), não alcançamos uma descrição perfeita. Somente quando saímos sutilmente do arcabouço de hipóteses que fundamentam o modelo, obtemos a concordância esperada.

# Conclusão

Em uma revisão geral das questões e resultados abordados neste trabalho, o foco está em uma análise comparativa de modelos de turbulência corrigidos pelo procedimento de assimilação de dados, aplicados ao fenômeno de flutter por separação laminar.

A princípio, foi estabelecida a natureza do fenômeno de flutter de separação laminar e suas nuances, principalmente seu caráter localizado e seu efeito sobre os esforços aerodinâmicos. Ainda no mesmo capítulo, foram apresentados e discutidos os dados de alta fidelidade obtidos por DNS por Sabino [1], que serviram como base para a modelagem orientada por dados. O arcabouço de modelagem foi então plenamente abordado, incluindo as equações RANS, o modelo de turbulência Spalart-Allmaras, o modelo de transição BCM e as diferentes propostas de correção por assimilação de dados — tanto com parâmetros multiplicativos quanto com forças adicionais. Consecutivamente, os métodos numéricos foram apresentados, compreendendo o Método dos Elementos Finitos, a assimilação variacional de dados com formalismo adjunto e o algoritmo BFGS. Os resultados preliminares demonstraram as limitações da modelagem RANS-SA clássica, motivando a adoção das técnicas baseadas em dados.

No que diz respeito à escolha dos dados de alta fidelidade, o estudo realizado mostra que, para uma descrição mais precisa do campo de velocidades em seus menores detalhes, os dados de campo são indispensáveis. No entanto, o fenômeno estudado está parcialmente ligado a esforços estruturais, o que enriquece o potencial de descrição associado aos dados parietais. O uso de coeficientes aerodinâmicos ( $C_p$ ,  $C_f$ ,  $C_m$ ) não é apenas suficiente para uma descrição precisa do fenômeno, como também se mostra mais poderoso do que o uso de dados de campo completo; notadamente, quando são utilizados dados parietais combinados ( $C_p + C_f$ ). Esse fato

é de absoluta importância, pois demonstra que resultados perfeitamente precisos podem ser obtidos utilizando uma quantidade limitada e localizada de dados, o que é conveniente dada a abundância de dados parietais em diferentes estudos e a facilidade de obtê-los experimentalmente.

Do ponto de vista comparativo entre os diferentes tipos de dados parietais, verificamos que certas escolhas indubitavelmente produzem melhores previsões, como o uso do coeficiente de atrito superficial para  $\alpha = 1^\circ$  e o uso do coeficiente de pressão para  $\alpha = 2^\circ$ . Esse fato direcionou o trabalho a explorar o uso combinado desses dados, permitindo que o modelo assimilado fornecesse ambas as dinâmicas, apresentando resultados convincentes.

Paralelamente, a escolha do parâmetro de controle ideal para a modelagem foi extensivamente estudada. Os resultados, complementados por análises de sensibilidade da função de custo, mostraram que o termo de destruição é incapaz de descrever corretamente a dinâmica do fenômeno. Os termos de produção e difusão cruzada apresentaram resultados robustos. No entanto, apenas com a adição de uma força multiplicada pela viscosidade turbulenta modificada obtivemos resultados que se assemelham perfeitamente aos dados de alta fidelidade.

Esses resultados podem ser estendidos para uma crítica da validade física do modelo de Spalart-Allmaras para o fenômeno estudado. Mesmo corrigindo localmente os diferentes efeitos físicos contemplados pelo modelo (produção, difusão e destruição da turbulência da forma como foram formulados), não se alcança uma descrição perfeita. Somente quando saímos sutilmente do arcabouço de hipóteses que fundamentam o modelo, obtemos a concordância esperada. Este resultado é original e relevante, pois evidencia as limitações estruturais do modelo de Spalart-Allmaras para o regime de Reynolds transicional.

Entre as perspectivas e possíveis direções que esta pesquisa pode tomar, é impossível não mencionar o potencial de generalização desses modelos corrigidos dentro do paradigma FIML (Field Inversion Machine Learning). Dessa forma, redes neurais ou árvores de decisão podem ser usadas para prever parâmetros de controle corretivos, apoiando assim um modelo de turbulência corrigido por aprendizado de máquina. Esse paradigma é de extremo interesse, pois permitirá a generalização do modelo corrigido por assimilação de dados para configurações sutilmente diferentes, para as

quais não existem dados de alta fidelidade.

Essa abordagem, no entanto, requer uma análise cuidadosa das características de entrada que serão usadas na etapa de treinamento do modelo, além das escolhas arquiteturais da rede neural. Essa área combina o conhecimento clássico da mecânica dos fluidos com uma compreensão das propriedades físicas que melhor contribuem para a descrição do parâmetro corretivo.

# Referências Bibliográficas

- [1] Diogo Sabino. *Aeroelastic instabilities of an airfoil in transitional flow regimes*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2022.
- [2] Denis Busquet. *Study of a high Reynolds number flow around a two dimensional airfoil at stall; an approach coupling a RANS framework and bifurcation theory*. PhD thesis, Institut polytechnique de Paris, 2020.
- [3] Tianyu Xia, Hao Dong, Liming Yang, Shicheng Liu, and Zhou Jin. Investigation on flow structure and aerodynamic characteristics over an airfoil at low reynolds number—a review. *AIP Advances*, 11(5):050701, 2021.
- [4] Tomohisa Ohtake, Yusuke Nakae, and Tatsuo Motohashi. Nonlinearity of the aerodynamic characteristics of naca0012 aerofoil at low reynolds numbers. *Japan Society of Aeronautical Space Sciences*, 55(644):439–445, 2007.
- [5] Thomas J Mueller and Stephen M Batill. Experimental studies of separation on a two-dimensional airfoil at low reynolds numbers. *AIAA journal*, 20(4):457–463, 1982.
- [6] Georgi Kalitzin, Gorazd Medic, Gianluca Iaccarino, and Paul Durbin. Near-wall behavior of rans turbulence models and implications for wall functions. *Journal of Computational Physics*, 204(1):265–291, 2005.
- [7] Lucas Franceschini, Denis Sipp, and Olivier Marquet. Mean-flow data assimilation based on minimal correction of turbulence models: Application to turbulent high reynolds number backward-facing step. *Physical Review Fluids*, 5(9):094603, 2020.

- [8] D Poirel, Y Harris, and A Benaissa. Self-sustained aeroelastic oscillations of a naca0012 airfoil at low-to-moderate reynolds numbers. *Journal of Fluids and Structures*, 24(5):700–719, 2008.
- [9] Philippe Spalart and Steven Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. In *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, page 439, 1992.
- [10] Karthik Duraisamy, Gianluca Iaccarino, and Heng Xiao. Turbulence modeling in the age of data. *arXiv preprint arXiv:1804.00183*, 2018.
- [11] H Glauert. The force and moment on an oscillating aerofoil. In *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete*, pages 88–95. Springer, 1930.
- [12] Th H von Karman and William R Sears. Airfoil theory for non-uniform motion. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 5(10):379–390, 1938.
- [13] A Ro Collar. The expanding domain of aeroelasticity. *The Aeronautical Journal*, 50(428):613–636, 1946.
- [14] Steven A Orszag. Analytical theories of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):363–386, 1970.
- [15] François G Schmitt. About boussinesq’s turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. *Comptes Rendus Mécanique*, 335(9-10):617–627, 2007.
- [16] O Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion (reprinted from papers on mechanical and physical subjects, vol 2, pg 535-577, 1901). In *Proceedings of the Royal Society-Mathematical and Physical Sciences*, volume 451, pages 5–47. ROYAL SOC 6-9 CARLTON HOUSE TERRACE, LONDON SW1Y 5AG, ENGLAND, 1995.
- [17] JCR Hunt. Mathematical models of turbulence. by be launder and db spalding. academic press, 1972. *Journal of Fluid Mechanics*, 57(4):826–828, 1973.

- [18] David C Wilcox. Formulation of the kw turbulence model revisited. *AIAA journal*, 46(11):2823–2838, 2008.
- [19] Florian R Menter, R Langtry, and S Völker. Transition modelling for general purpose cfd codes. *Flow, turbulence and combustion*, 77(1):277–303, 2006.
- [20] Samet C Cakmakcioglu, Onur Bas, Riccardo Mura, and Unver Kaynak. A revised one-equation transitional model for external aerodynamics. In *AIAA Aviation 2020 Forum*, page 2706, 2020.
- [21] John M Lewis, Sivaramakrishnan Lakshminarayanan, and Sudarshan Dhall. *Dynamic data assimilation: a least squares approach*, volume 13. Cambridge University Press, 2006.
- [22] Geir Evensen et al. *Data assimilation: the ensemble Kalman filter*, volume 2. Springer, 2009.
- [23] Alejandro Gronsksis, Dominique Heitz, and Etienne Mémin. Inflow and initial conditions for direct numerical simulation based on adjoint data assimilation. *Journal of Computational Physics*, 242:480–497, 2013.
- [24] Hiroshi Kato and Shigeru Obayashi. Approach for uncertainty of turbulence modeling based on data assimilation technique. *Computers & Fluids*, 85:2–7, 2013.
- [25] Vincent Mons, J-C Chassaing, Thomas Gomez, and Pierre Sagaut. Reconstruction of unsteady viscous flows using data assimilation schemes. *Journal of Computational Physics*, 316:255–280, 2016.
- [26] Rudolph Emil Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. 1960.
- [27] Takao Suzuki. Reduced-order kalman-filtered hybrid simulation combining particle tracking velocimetry and direct numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 709:249–288, 2012.
- [28] CH Colburn, JB Cessna, and TR Bewley. State estimation in wall-bounded flow systems. part 3. the ensemble kalman filter. *Journal of Fluid Mechanics*, 682:289–303, 2011.

- [29] Dominique Heitz, Etienne Mémin, and Christoph Schnörr. Variational fluid flow measurements from image sequences: synopsis and perspectives. *Experiments in fluids*, 48(3):369–393, 2010.
- [30] Yin Yang, Cordelia Robinson, Dominique Heitz, and Etienne Mémin. Enhanced ensemble-based 4dvar scheme for data assimilation. *Computers & Fluids*, 115:201–210, 2015.
- [31] François-Xavier Le Dimet and Olivier Talagrand. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 38(2):97–110, 1986.
- [32] Dimitry PG Foures, Nicolas Dovetta, Denis Sipp, and Peter J Schmid. A data-assimilation method for reynolds-averaged navier–stokes-driven mean flow reconstruction. *Journal of fluid mechanics*, 759:404–431, 2014.
- [33] Sean Symon, Nicolas Dovetta, Beverley J McKeon, Denis Sipp, and Peter J Schmid. Data assimilation of mean velocity from 2d piv measurements of flow over an idealized airfoil. *Experiments in fluids*, 58(5):1–17, 2017.
- [34] Marco A Iglesias, Kody JH Law, and Andrew M Stuart. Ensemble kalman methods for inverse problems. *Inverse Problems*, 29(4):045001, 2013.
- [35] Zhiyong Li, Huaibao Zhang, Sean CC Bailey, Jesse B Hoagg, and Alexandre Martin. A data-driven adaptive reynolds-averaged navier–stokes  $k$ – $\omega$  model for turbulent flow. *Journal of Computational Physics*, 345:111–131, 2017.
- [36] Stefan Bergman. *Contributions to the theory of partial differential equations*. Number 33. Princeton University Press, 1955.
- [37] Roger Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons, 2013.
- [38] Pedro Stefanin Volpiani, Morten Meyer, Lucas Franceschini, Julien Dandois, Florent Renac, Emeric Martin, Olivier Marquet, and Denis Sipp. Machine learning-augmented turbulence modeling for rans simulations of massively separated flows. *Physical Review Fluids*, 6(6):064607, 2021.