



Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Faculdade de Engenharia

Alex Fraga Rocha

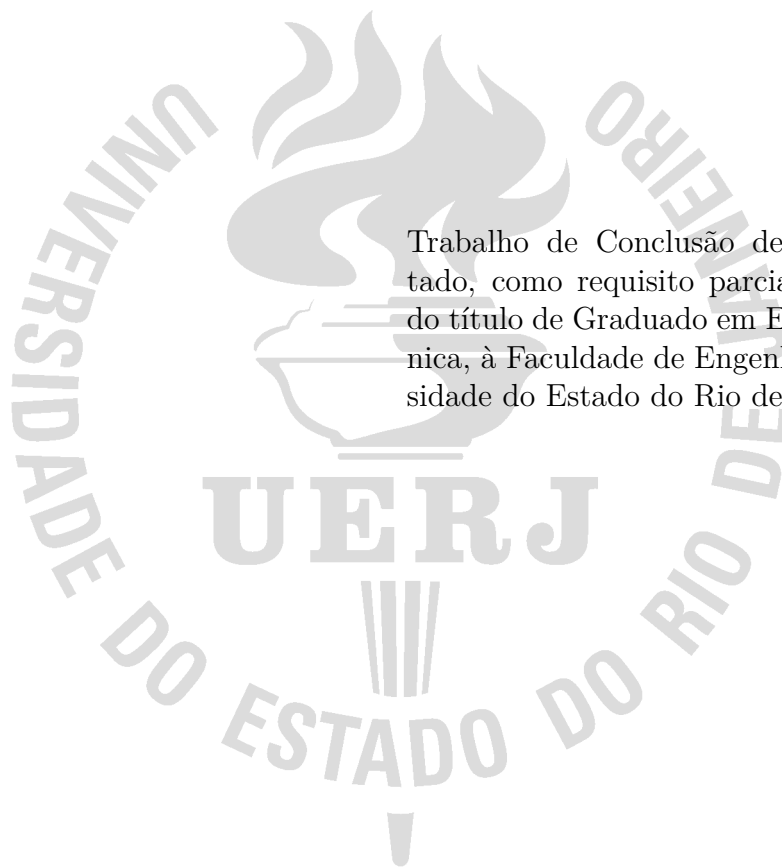
**Solução numérica da equação da onda unidimensional pelo
método de diferenças finitas de forma explícita e implícita**

Rio de Janeiro

2023

Alex Fraga Rocha

**Solução numérica da equação da onda unidimensional pelo método de
diferenças finitas de forma explícita e implícita**



Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Engenharia Mecânica, à Faculdade de Engenharia, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Norberto Mangiavacchi
Coorientador: Prof. Dr. Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro

2023

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/D

D979

Rocha, Alex Fraga

Solução numérica da equação da onda unidimensional pelo método de diferenças finitas de forma explícita e implícita / Alex Fraga Rocha. – Rio de Janeiro, 2023-
75 f.

Orientador: Prof. Dr. Norberto Mangiavacchi

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia, Faculdade de Engenharia, 2023.

1. Equação diferencial.. 2. Método numérico.. 3. Método de diferenças finitas.. I. Prof. Dr. Norberto Mangiavacchi. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. III. Faculdade de Engenharia. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta trabalho de conclusão de curso, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Alex Fraga Rocha

Solução numérica da equação da onda unidimensional pelo método de diferenças finitas de forma explícita e implícita

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Engenharia Mecânica, à Faculdade de Engenharia, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em xx de Maio de 2023.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Norberto Mangiavacchi (Orientador)
Faculdade de Engenharia – UERJ

Prof. Dr. Gustavo Rabello dos Anjos (Coorientador)
Departamento de Engenharia Mecânica – UFRJ

Prof. Dr. Adriano Jorge Figueira
Instituto de Física – IFP

Prof. Dr. José da Rocha Miranda Pontes
Faculdade de Engenharia – UERJ

Cargo Título Nome Completo
Unidade – Instituição

Rio de Janeiro

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus que é a minha fonte de vida e o motivo da minha existência.

À minha família, que está sempre ao meu lado e que é a base para o meu desenvolvimento.

Ao professor e orientador Norberto, por ter aceitado ser meu orientador e me apoiado neste trabalho.

Ao professor e coorientador Gustavo, pelo incentivo ao estudo dos métodos de diferenças finitas, pelas orientações e pela indicação e despertar para a linguagem de programação Python.

A meu grande amigo Adriano e sua família, pela paciência e carinho comigo e que nos momentos de dificuldade me estenderam a mão.

Ao professor Gilberto pela atenção e disponibilidade nos momentos em que mais precisei.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Jesus; João 14:6 - Eu sou o caminho, e a verdade e a vida; ninguém vem ao Pai, senão por mim.

RESUMO

ROCHA, A.F *Solução numérica da equação da onda unidimensional pelo método de diferenças finitas de forma explícita e implícita*. 2023. 75 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

O conhecimento e a modelagem dos fenômenos da natureza, por exemplo, os ondulatórios, são e sempre foram o desejo do homem, pois o seu domínio o leva a prever situações e manifestações que interferem diretamente em sua forma de vida. Nesse sentido, o estudo desses fenômenos tem permitido o avanço tecnológico ao longo dos anos, contribuindo para o bem estar e segurança da humanidade. Neste trabalho, apresento a análise do comportamento ondulatório numa corda, solucionando numericamente a equação de onda unidimensional, utilizando o método de diferenças finitas para as suas discretizações e a linguagem de programação Python para a criação dos algoritmos. Com isso, obtivemos a solução numérica da equação da onda propagando numa corda para um caso específico de condições iniciais e de contorno e comparamos com a solução analítica da mesma. Logo, dependendo do problema que queiramos resolver, podemos adaptar a solução encontrada a um problema de oscilação semelhante.

Palavras-chave: Equação diferencial. Método numérico. Método de diferenças finitas.
Equação da onda.

ABSTRACT

ROCHA, A.F *Título do trabalho em inglês*. 2023. 75 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

The knowledge and modeling of natural phenomena, for example, waves, are and always have been man's desire, as mastering them leads him to predict situations and manifestations that directly interfere with his way of life. In this sense, the study of these phenomena has allowed technological advances over the years, contributing to the well-being and security of humanity. In this work, I present the analysis of the wave behavior in a string, numerically solving the one-dimensional wave equation, using the finite difference method for its discretizations and the Python programming language for the creation of algorithms. With that, we obtained the numerical solution of the wave equation propagating on a string for a specific case of initial and boundary conditions and compared it with the analytical solution of the same. So, depending on the problem we want to solve, we can adapt the solution found to a similar oscillation problem.

Keywords: Differential equation. Numerical method. Finite difference method. Wave equation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 1s$)	19
Figura 2	- Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 0.1s$)	19
Figura 3	- Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 1s$)	20
Figura 4	- Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 0.1s$)	20
Figura 5	- Resultado gerado pelo método de Runge-Kutta ($\Delta t = 0.01s$)	22
Figura 6	- Temperaturas ao longo de uma barra linear	25
Figura 7	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	36
Figura 8	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.250 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	36
Figura 9	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	37
Figura 10	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.750 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	37
Figura 11	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 1.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	38
Figura 12	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	38
Figura 13	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.250 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	39
Figura 14	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	39
Figura 15	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.750 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	40
Figura 16	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 1.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	40
Figura 17	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	41
Figura 18	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.250 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	41
Figura 19	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.500 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	42
Figura 20	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.750 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	42
Figura 21	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 1.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	43
Figura 22	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	43
Figura 23	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.250 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	44
Figura 24	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.500 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	44
Figura 25	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.750 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	45
Figura 26	- Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 1.000 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	45
Figura 27	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	46
Figura 28	- Resultado obtido analiticamente para $t = 0.500 s$	46
Figura 29	- Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500 s$ ($\Delta t = 10^{-3} s$) . .	47
Figura 30	- Resultado obtido analiticamente para $t = 0.500 s$	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Comparação das soluções analíticas e numéricas: explícito modo1 . . .	64
Tabela 2	- Comparação das soluções analíticas e numéricas: explícito modo2 . . .	67
Tabela 3	- Comparação das soluções analíticas e numéricas: implícito modo1 . . .	70
Tabela 4	- Comparação das soluções analíticas e numéricas: implícito modo2 . . .	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UERJ	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
FEN	Faculdade de Engenharia
CFL	Número de Courant
MDF	Método de Diferenças Finitas

LISTA DE SÍMBOLOS

$\frac{df}{dx}$	Derivada primeira da função f em relação a x
f_y	Derivada primeira da função f em relação a y
$\frac{d^2 f}{d^2 x}$	Derivada segunda da função f em relação a x
Δt	Passo de tempo
Δx	Tamanho do elemento de malha na direção x
Δy	Tamanho do elemento de malha na direção y
T	Temperatura
L	Comprimento da barra cilíndrica
q	Fonte de calor
S	Área da seção reta da barra cilíndrica
A	Amplitude
c	Velocidade
ω	Velocidade angular
m	Massa
F	Força
a	Comprimento da malha
b	Largura da malha
k	Número de onda
nx	Quantidade de nós na direção x
ρ	Número de Rayleigh
σ	Número de Prandti
β	Constante

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	12
1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	14
1.1	A importância das equações diferenciais	14
1.2	Classificação das equações diferenciais	14
1.3	Ordem de uma equação diferencial	15
1.4	Equações diferenciais lineares e não lineares	15
1.5	Sistema de equações diferenciais	16
2	MÉTODOS NUMÉRICOS	17
2.1	Método de Euler	17
2.2	Método de Runge-Kutta	21
2.3	Método de diferenças finitas	23
3	ONDAS	26
3.1	Classificação das ondas	26
3.1.1	<u>Quanto à natureza</u>	26
3.1.2	<u>Quanto à propagação</u>	26
3.2	Equação geral da onda	27
3.3	Solução analítica da equação da onda 1D	27
3.4	Discretização da equação da onda 1D	28
3.4.1	<u>Discretização pelo método de diferenças finitas explícito</u>	29
3.4.2	<u>Discretização pelo método de diferenças finitas implícito</u>	30
3.5	Solução analítica da equação da onda 2D	31
3.6	Discretização da equação da onda 2D	32
3.6.1	<u>Discretização pelo método de diferenças finitas explícito</u>	33
4	RESULTADOS	35
4.1	Método explícito para o caso unidimensional	35
4.2	Método implícito para o caso unidimensional	35
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICE A – Códigos fontes	50

INTRODUÇÃO

Desde a era antiga a matemática assume um papel fundamental para o desenvolvimento humano, seja numa simples contagem de uma quantidade qualquer de elementos, às soluções de sofisticados problemas nas áreas das ciências exatas e suas correlatas. Dentro do campo da matemática, o cálculo diferencial se destaca por compor a modelagem de inúmeros problemas de origem científica. De acordo com (STEWART, 2013), o matemático francês Pierre Fermat (1601 – 1665) contribuiu com ideias importantes envolvendo o cálculo diferencial, as quais foram desenvolvidas pelos matemáticos ingleses John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677), Isaac Newton (1642-1727) e pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716).

Na natureza, inúmeros problemas de engenharia, física e biologia dependem do cálculo diferencial para serem modelados, para que então possam ser resolvidos. Como exemplos, temos o aumento do volume, com o tempo, de uma gota de chuva em queda livre na atmosfera e o crescimento da população de uma colônia de bactérias (BOYCE; DIPRIMA, 2015).

A medida que a ciência foi se aprimorando, mais complexo e vasto passou a ser o seu campo de estudo, o que gerou a necessidade de ferramentas cada vez mais sofisticadas para a sua compreensão.

Sendo assim, paralelamente ao desenvolvimento da matemática, a evolução da computação e a criação de novas linguagens de programação permitiram e têm permitido a análise de diversos problemas de forma mais precisa e com mais rapidez. Como exemplos dessas linguagens, temos o fortran, o *C* e o Python, sendo esta última, a linguagem utilizada para a criação dos programas deste projeto.

Embora a computação tenha nos facilitado, dependendo da precisão desejada, os erros provenientes do método matemático aplicado e do computador utilizado podem gerar resultados satisfatórios ou não. Segundo (JUSTO et al., 2020), em geral, os computadores não representam os números de forma exata. Com isso, entende-se que podem existir erros no resultado de uma determinada análise. Dentre os erros possíveis, temos os de truncamento e de arredondamento.

No que diz respeito aos erros de truncamento, temos que cada método de integração equivale, em precisão, a uma ordem da série de Taylor correspondente.

Com relação ao erro de arredondamento, a questão está no fato que os computadores oferecem um número finito de casas decimais para representar o resultado numérico.

Entretanto, no nosso trabalho, o erro mais passível de interferência no resultado é o de truncamento, uma vez que a quantidade de casas decimais analisadas é baixa.

Diante do que foi dito, observamos que o conhecimento de determinadas ferramentas matemáticas, como métodos de solução de equações diferenciais e métodos matemá-

ticos de discretização de funções, bem como o conhecimento básico de uma linguagem de programação, se fazem necessários e indispensáveis para o estudo de um determinado fenômeno.

Neste trabalho, discretizaremos a equação de onda unidimensional através do método de diferenças finitas, tanto pelo formalismo explícito quanto pelo implícito. Analisaremos o comportamento da onda numa corda e apresentaremos a sua solução numérica, sob determinadas condições iniciais e de contorno. Utilizaremos a solução analítica da equação da onda, para as mesmas condições, como base de referência para a análise da eficácia do nosso código.

Este trabalho foi organizado e dividido da seguinte forma:

- No capítulo 1, definimos equações diferenciais, comentamos sua importância no desenvolvimento da ciência, exemplificamos seus tipos e o significado da ordem de uma equação diferencial.
- No capítulo 2, comentamos sobre os métodos numéricos de Euler, Runge-Kutta e o método de diferenças finitas, exemplificando cada um.
- No capítulo 3, definimos ondas, escrevemos quais são seus tipos, suas características e exemplificamos cada um tipo. Além disso, apresentamos as discretizações da equação da onda unidimensional pelo método de diferenças finitas de forma explícita e implícita e a sua aplicação no problema proposto. Nesse mesmo capítulo, discretizamos a equação de onda bidimensional como incentivo e ponta pé inicial de um possível trabalho futuro.
- No capítulo 4, apresentamos, através de gráficos, os resultados obtidos.
- No capítulo 5, fazemos as considerações finais e sugestões de trabalhos futuros.

1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais estão presentes em inúmeros problemas do nosso cotidiano e diversos sistemas físicos são modelados através desse ramo da matemática. De acordo com (CENGEL; PALM III, 2012), uma equação diferencial é uma equação constituída de uma função e suas derivadas. As equações obtidas através do uso da segunda lei de Newton para determinar a posição, a velocidade e a aceleração de um corpo em função do tempo, bem como a forma diferencial da lei de Fourier da condução térmica, são alguns de uma infinidade de exemplos de equações diferenciais que podemos obter. Em (BOYCE; DIPRIMA, 2015) é possível encontrar um vasto número de problemas direcionados a esse tema.

O decaimento radioativo de um determinado material representado pela eq.1,

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -rQ(t) \quad (1)$$

na qual $Q(t)$ é a quantidade de material no instante t e r é a sua taxa de decaimento, é um exemplo clássico de equação diferencial.

1.1 A importância das equações diferenciais

Equações diferenciais são de suma importância para modelagem e descrição de eventos naturais. Com a solução da equação diferencial que modela um determinado sistema físico, podemos, por exemplo, fazer previsões a respeito do comportamento desse sistema, intervindo, se possível e necessário, nesse comportamento (ROCHA, 2016).

1.2 Classificação das equações diferenciais

As equações diferenciais são classificadas em ordinárias, quando dependem de uma única variável independente, e parciais, quando dependem de duas ou mais variáveis independentes. A eq.2, que representa o movimento de oscilação de um pêndulo simples, de comprimento l , para pequenos ângulos de oscilação, é um exemplo de equação diferencial ordinária, sendo t a variável independente,

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = 0 \quad (2)$$

Já a eq.3, que representa a equação da onda, é um exemplo de equação diferencial parcial, tendo x e t como variáveis independentes.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3)$$

1.3 Ordem de uma equação diferencial

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. A eq.4 é um exemplo de equação diferencial ordinária de primeira ordem, enquanto a eq.5 é um exemplo de equação diferencial ordinária de segunda ordem.

$$\frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \quad (5)$$

1.4 Equações diferenciais lineares e não lineares

Uma equação diferencial é dita linear quando é formada por funções lineares onde a variável dependente tem como potência o grau 1 e seus coeficientes dependem apenas de uma variável independente. A eq.6 é a forma geral de uma equação diferencial linear.

$$b_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_1(t) \frac{dy}{dt} + b_0(t)y = g(t) \quad (6)$$

Uma equação que não tem as características da eq.6 não representa uma equação diferencial linear. Um exemplo de equação diferencial ordinária linear é a equação eq.7.

$$t^3 \frac{d^2 y}{dt^2} + t^2 \frac{dy}{dt} + 3y = \cos(t) \quad (7)$$

Da mesma forma, temos como exemplo de equação diferencial ordinária não linear, a eq.8.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y^3 + ty^2 = \cos(t) \quad (8)$$

1.5 Sistema de equações diferenciais

Para a solução de determinados problemas na área de engenharia, física, biologia ou científica de maneira geral, faz-se, muitas vezes, uso de sistemas de equações diferenciais.

Sistema de equações diferenciais é todo sistema formado por duas ou mais equações diferenciais.

Como forma de exemplificarmos um sistema de equações diferenciais, consideremos o clássico modelo matemático para a dinâmica da população de espécies em disputa, conhecido como sistema presa-predador, dado pelo sistema 9.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = Ax_1 - Bx_1x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -Cx_2 + Dx_1x_2 \end{cases} \quad (9)$$

No qual A , B , C e D são constantes positivas, e x_1 e x_2 representam as populações da presa e do predador, respectivamente.

2 MÉTODOS NUMÉRICOS

De acordo com (CHAPRA; CANALE, 2016), métodos numéricos são um conjunto de técnicas usadas para formular problemas matemáticos, de modo que possam ser resolvidos com operações aritméticas.

A seguir, apresentaremos alguns métodos numéricos que podem ser utilizados para resolver problemas que envolvam equações diferenciais.

2.1 Método de Euler

O método de Euler é um método numérico usado para solucionar equações diferenciais ordinárias com condição inicial.

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem dada pela eq.10,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (10)$$

com a condição inicial $y(t_0) = y_0$. Consideremos que as funções f e f_y sejam contínuas em algum retângulo no plano ty contendo o ponto (t_0, y_0) . Então, pelo teorema da unicidade, existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema dado, em algum intervalo em torno de t_0 . Se a eq.10 for não linear, então pode ser complicada a determinação do intervalo de existência da solução f . Agora, vamos escrever a eq.10 no ponto t_0 na forma.

$$\frac{d\phi}{dt}(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)] \quad (11)$$

Aproximando a derivada na eq.11 pelo quociente de diferenças, obtemos a eq.12.

$$\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \cong f[t_n, \phi(t_n)] \quad (12)$$

Agora, se substituirmos $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ pelos seus valores aproximados y_{n+1} e y_n , respectivamente, e resolvermos para y_{n+1} , obteremos a fórmula de Euler, dada pela eq.13,

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Se o tamanho do passo, $t_{n+1} - t_n$, tiver valor uniforme h para todo n e se denotarmos $f(t_n, y_n)$ por f_n , então a eq.13 fica:

$$y_{n+1} = y_n + h.f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

O método de Euler possibilita resolver a eq.13 (ou a eq.14) usando o resultado de cada passo para realizar o próximo passo, o que caracteriza um método totalmente explícito. Dessa forma, obtemos uma sequência de valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ que aproximam os valores da solução $\phi(t)$ nos pontos $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$. Como forma de ilustrar o método de Euler, observemos o exemplo 1, onde a precisão da solução numérica é bastante nítida em relação à solução analítica.

Exemplo 1: movimento de um carrinho num trilho horizontal com atrito.

Consideremos um carrinho de massa m deslizando sobre um trilho horizontal com velocidade inicial v_0 e sujeito à força de atrito $F = -bv$, que após alguns instantes atinge o repouso. De acordo com a segunda lei de Newton, o movimento do carrinho é regido pela eq.15.

$$m \frac{dv}{dt} = -bv \quad (15)$$

A discretização da eq.15 resulta na eq.16.

$$m \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = -bv^n \quad (16)$$

Colocando o termo v^{n+1} do lado esquerdo da igualdade e os demais do lado direito, obtemos a equação da velocidade num tempo $n + 1$ em função do termo conhecido v^n , dada pela eq.17.

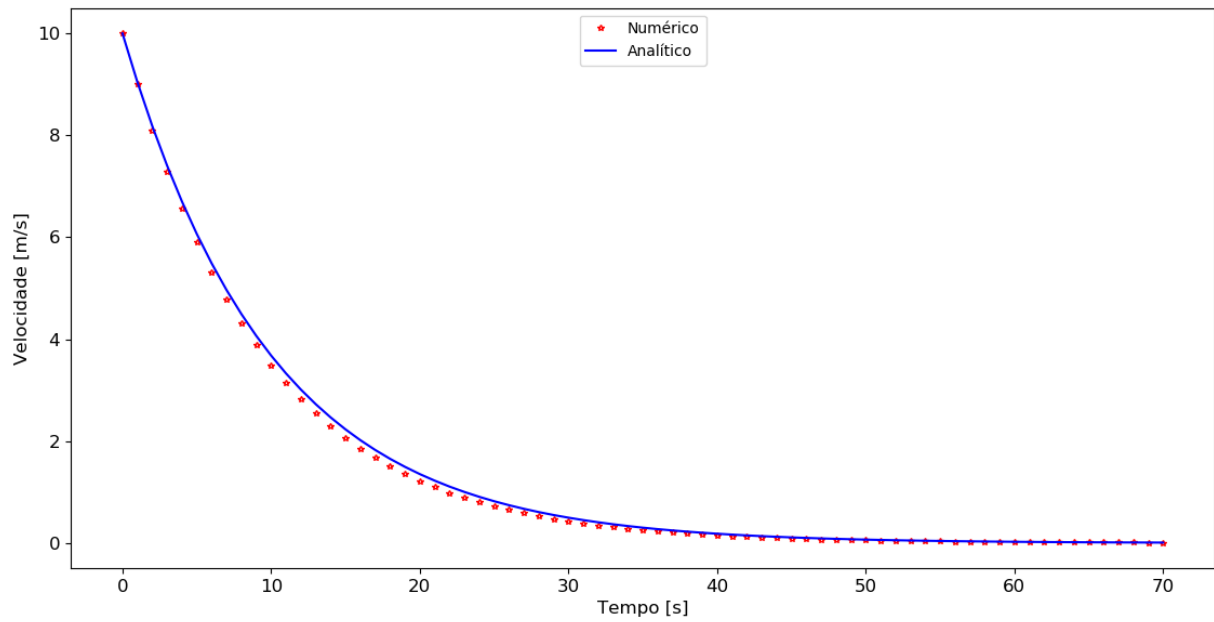
$$v^{n+1} = v^n - \frac{b\Delta t}{m} v^n \quad (17)$$

Analogamente, sabendo que a relação 18 é válida, e considerando a discretização explícita da mesma, obtemos a eq.19, que representa a posição do carrinho num tempo $n + 1$ em função do termo conhecido x^n .

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (18)$$

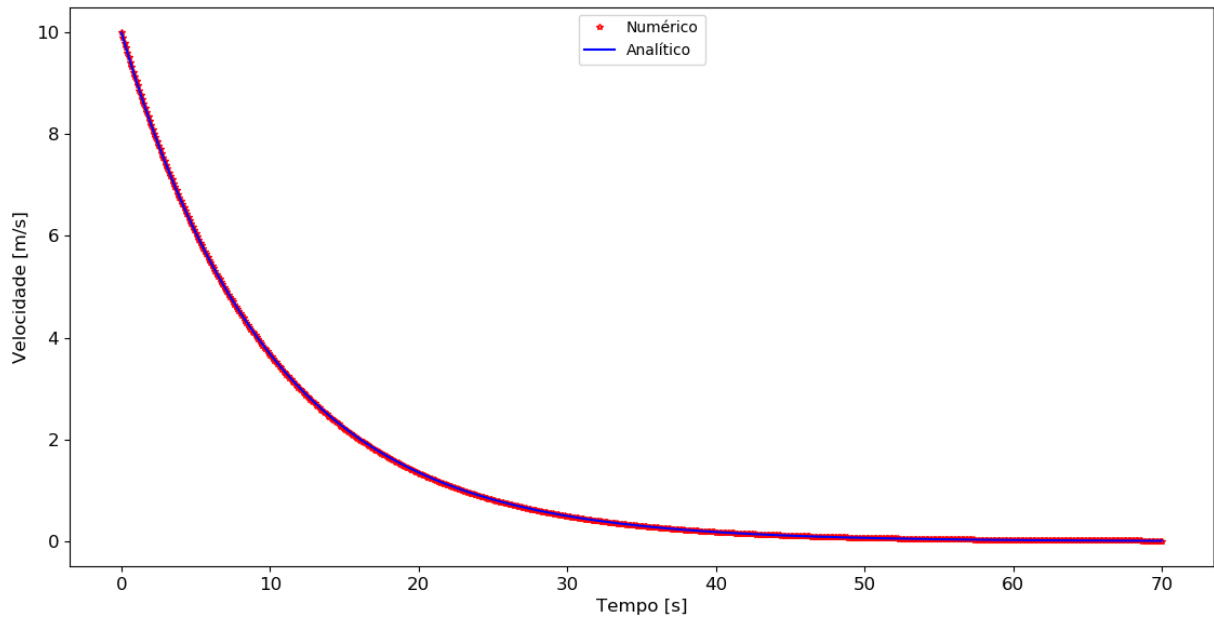
$$x^{n+1} = x^n - v^{n+1} \Delta t \quad (19)$$

As figuras de 1 a 4 representam algumas comparações das soluções analíticas e numéricas das equações da velocidade e da posição do carrinho descrito neste problema, obtidas para os intervalos de tempo $\Delta t = 1s$ e $\Delta t = 0.1s$.

Figura 1 - Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 1s$)

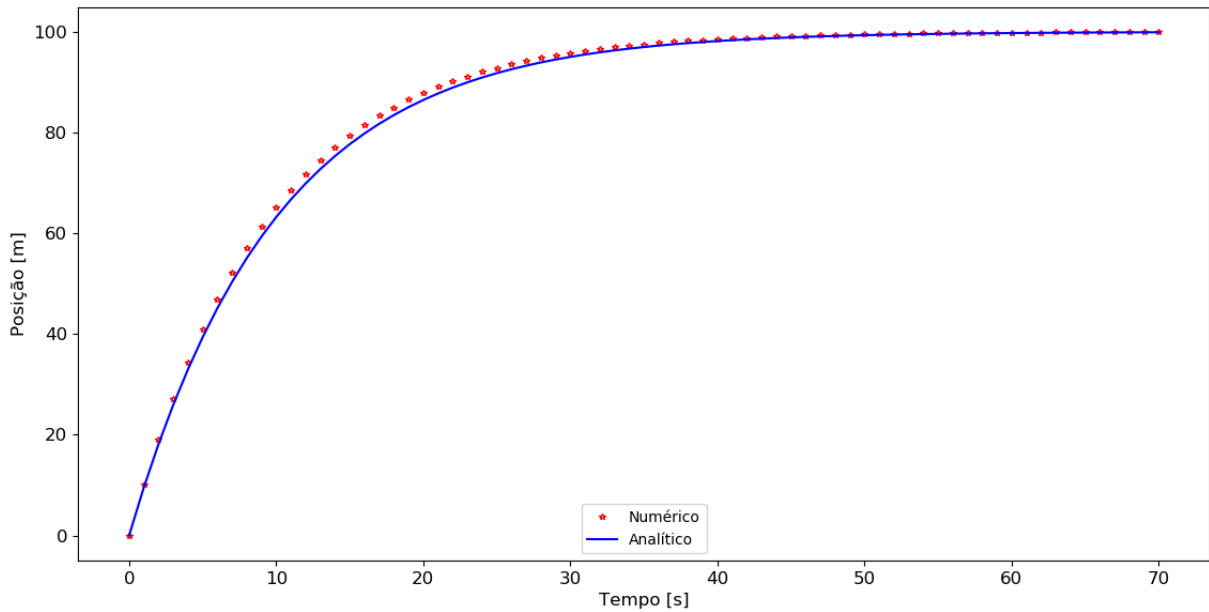
Legenda: Velocidade versus tempo do movimento de um carrinho num trilho horizontal com atrito.

Fonte: O autor, 2022.

Figura 2 - Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 0.1s$)

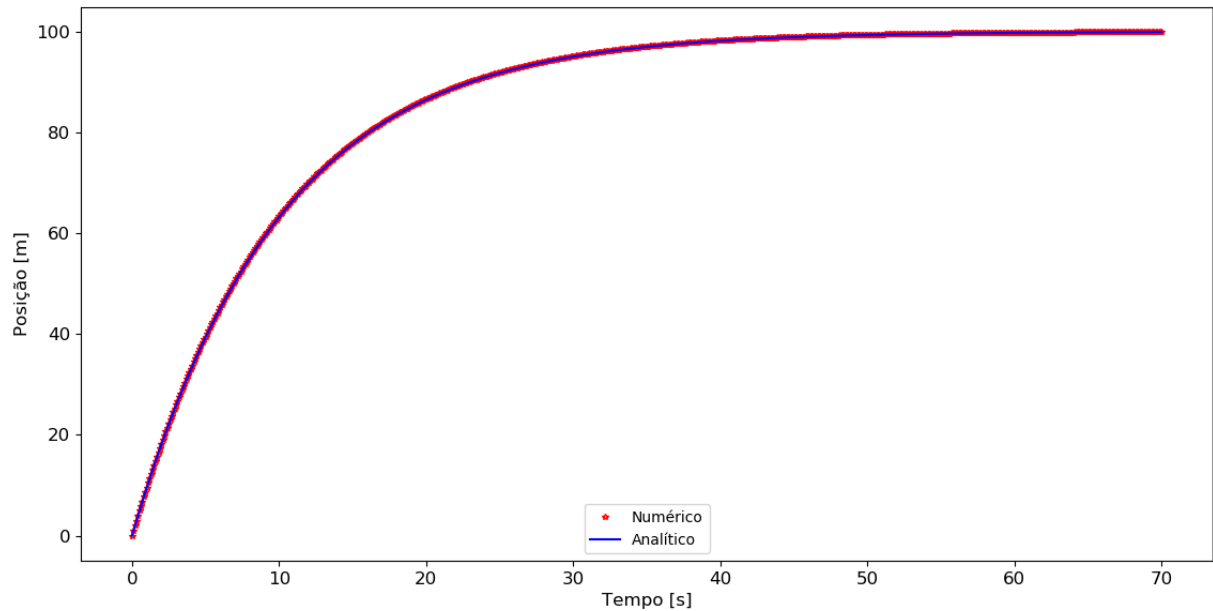
Legenda: Velocidade versus tempo do movimento de um carrinho num trilho horizontal com atrito.

Fonte: O autor, 2022.

Figura 3 - Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 1s$)

Legenda: Posição versus tempo do movimento de um carrinho num trilho horizontal com atrito.

Fonte: O autor, 2022.

Figura 4 - Resultado obtido pelo método de Euler ($\Delta t = 0.1s$)

Legenda: Posição versus tempo do movimento de um carrinho num trilho horizontal com atrito.

Fonte: O autor, 2022.

2.2 Método de Runge-Kutta

O Método de Runge–Kutta é um conjunto de métodos iterativos implícitos e explícitos utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias. Esse método, é formado por uma expressão composta de uma média ponderada de valores de $f(t, y)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ e dado pela eq.20,

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right), \quad (20)$$

em que:

$$k_{n1} = f(t_n, y_n),$$

$$k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right),$$

$$k_{n3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right),$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n3}).$$

A soma $\left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right)$ pode ser considerada como um coeficiente angular médio. Observa-se que k_{n1} é o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, k_{n2} é o coeficiente angular no ponto médio usando a fórmula de Euler para ir de t_n a $t_n + \frac{h}{2}$, k_{n3} é a segunda aproximação do coeficiente angular no ponto médio e k_{n4} é o coeficiente angular em $t_n + h$ usando a fórmula de Euler e o coeficiente angular k_{n3} , para ir de t_n a $t_n + h$.

Nesse sentido, o método de Runge-Kutta pode ser generalizado para sistemas de equações diferenciais, sendo representado pela eq.21. Vejamos uma aplicação no Ex.2.

$$x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right), \quad (21)$$

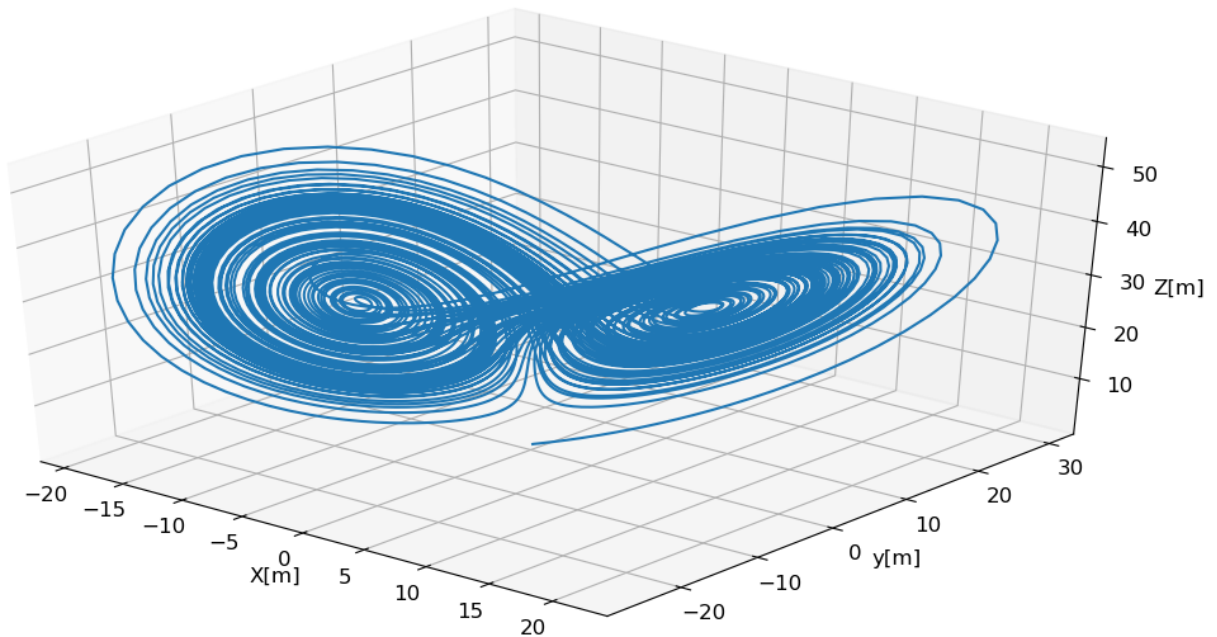
em que: $k_{n1} = f(t_n, x_n)$,

$$k_{n2} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right),$$

$$k_{n3} = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right),$$

$$k_{n4} = f(t_n + h, x_n + hk_{n3}).$$

Figura 5 - Resultado gerado pelo método de Runge-Kutta ($\Delta t = 0.01s$)



Legenda: Solução numérica para valores de $\beta = 8/3$, $\rho = 28$, $\sigma = 10$ e condições iniciais dadas por $x(0) = y(0) = z(0) = 0.1m$

Fonte: O autor, 2022.

Exemplo 2: sistema de Lorenz

O sistema formado pela eq.22, conhecido como sistema de Lorenz (LORENZ, 1963), por ter sido introduzido por Edward Lorenz em 1963, é um sistema composto de três equações diferenciais com três variáveis dependentes, no nosso caso, x , y e z e uma variável independente t . Além das variáveis dependentes, esse sistema caótico possui constantes como σ que é o número de Prandti, ρ que é o número de Rayleigh e β , que assumem valores específicos. Ao resolvermos esse sistema numericamente e plotarmos seus resultados, encontramos o gráfico da figura 5, que tem o formato semelhante ao de uma borboleta, recebendo o nome de borboleta de Lorenz.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (22)$$

2.3 Método de diferenças finitas

O método de diferenças finitas ou, simplesmente MDF, é um método utilizado para discretizar equações diferenciais, aproximando suas derivadas em diferenças finitas que, tomadas sobre uma malha apropriada, nos permite solucioná-las numericamente. O uso desse método é bastante comum para discretizar equações diferenciais que modelam problemas de transferência de calor, massa e problemas ondulatórios. Em (NETO; VALDA; LOPES,), encontramos alguns exemplos da aplicação desse método em problemas de transferência de calor. No estudo de ondas sísmicas, de acordo com (FERNANDES et al., 2009), a aplicação do método de diferenças finitas melhorou a compreensão sobre a propagação dessas ondas em determinados meios.

Como forma de ilustrar o caminho para se obter as equações matemáticas que expressam a derivada primeira através de diferenças finitas, consideremos $f(x)$ uma função de classe C^n , e sua expansão em série de Taylor em torno de x_0 , representada pela eq.23,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{(x - x_0)}{1!} + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^n(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}. \quad (23)$$

Seja uma malha unidimensional contendo m pontos, ou nós, espaçados uniformemente por Δx , onde o ponto central tem índice espacial i , sendo representado por x_i , com seu antecessor x_{i-1} e seu sucessor x_{i+1} . Expandindo $f(x_i + \Delta x)$ em torno de x_i , através da eq.23, e desconsiderando os termos de ordem 2 em diante, encontramos a eq.24,

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (24)$$

que pode ser reescrita como:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (25)$$

A eq.25 corresponde a uma aproximação de primeira ordem para a derivada primeira de $f(x)$, utilizando diferenças progressivas. Analogamente, se usarmos o ponto anterior $f(x_i - \Delta x)$ em torno de x_i , obteremos uma aproximação para $f'(x_i)$, por diferenças regressivas de primeira ordem, como mostra a eq.26,

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (26)$$

Tanto a eq.25 quanto a eq.26 são aproximações de primeira ordem para a derivada de $f(x)$. Uma expressão um pouco melhor, com precisão de ordem 2, é obtida somando-se essas equações. O resultado é o representado pela eq.27, conhecido como método de

diferenças centradas.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} \quad (27)$$

Notamos até aqui, que as expressões obtidas através do método de diferenças finitas são equações aproximadas para a derivada primeira de uma função $f(x)$. No entanto, diversos problemas de engenharia e física são modelados através de equações diferenciais de segunda ordem, o que nos leva a utilizar o método de diferenças finitas também em derivadas segundas de uma função $f(x)$, conforme eq.28,

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2} \quad (28)$$

Como forma de esclarecer o uso do método de diferenças finitas, vamos aplicar uma dessas equações para encontrarmos a solução do problema físico, formado por uma barra linear submetida a uma fonte de calor, representado pelo exemplo 3.

Exemplo 3: barra linear submetida a uma fonte de calor

Considere uma barra cilíndrica de área de seção reta A , comprimento L ($L \gg A$), inicialmente a 0°C e temperaturas constantes nas suas extremidades dadas por $T(x = 0) = T(x = L) = 0^\circ\text{C}$, submetida a uma fonte de calor q . Deseja-se obter, numericamente, a temperatura da barra ao longo do seu comprimento.

Sabendo que o diâmetro da barra tem dimensão desprezível em relação ao seu comprimento e considerando que o calor se propaga exclusivamente na direção axial, utilizaremos a eq.29 para modelarmos esse problema.

$$\frac{dT}{dt} = k \frac{d^2T}{dx^2} + q \quad (29)$$

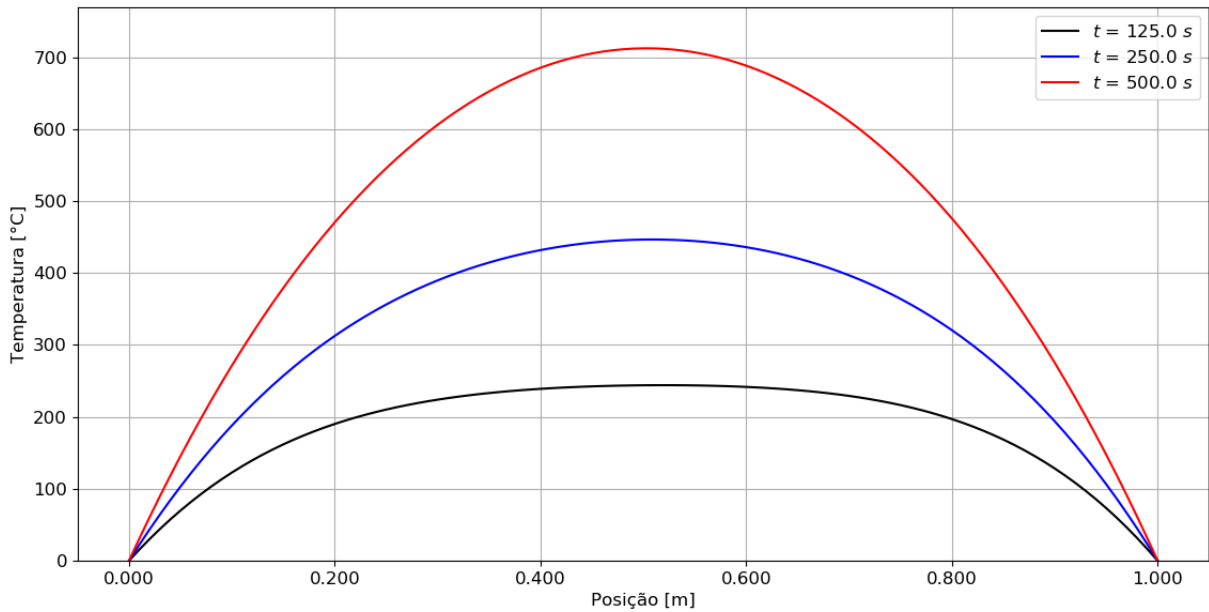
Aplicando o método de Euler à esquerda da eq.29, com o índice temporal n , a mesma toma a seguinte forma:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{d^2T}{dx^2} + q \quad (30)$$

Aplicando o método de diferenças centradas no lado direito da eq.29 para o termo $\frac{d^2T}{dx^2}$, em função do índice espacial i , obtemos:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = k \frac{T_{i-1}^n - 2T_i^n + T_{i+1}^n}{\Delta x^2} + q \quad (31)$$

Figura 6 - Temperaturas ao longo de uma barra linear



Legenda: Solução numérica da equação do calor unidimensional pelo método de diferenças finitas centradas para um passo de tempo $\Delta t = 0.417s$

Fonte: O autor, 2022.

E, finalmente, agrupando os termos semelhantes, expressamos a temperatura da barra de forma explícita em n pela eq.32,

$$T_i^{n+1} = \eta T_{i-1}^n + (1 - 2\eta)T_i^n + \eta T_{i+1}^n + q \cdot \Delta t \quad (32)$$

onde,

$$\eta \equiv \frac{k \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \quad (33)$$

Com parâmetros escolhidos adequadamente, a solução numérica deste problema é representada para os instantes de tempo $t = 125s$, $t = 250s$ e $t = 500s$, pelos gráficos da figura 6.

3 ONDAS

Dentre os inúmeros tópicos estudados pela engenharia, temos as ondas ocupando um espaço significativo, pois elas estão presentes no nosso cotidiano. Como exemplo, podemos citar as ondas sonoras e a luz do sol, vitais para o homem. O conhecimento dos fenômenos ondulatórios ajudaram o homem no desenvolvimento de diversas tecnologias proporcionando, a ele, bem estar e comodidade.

Segundo (NUSSENZVEIG, 1981), uma onda é uma perturbação causada num meio e que se propaga de um ponto a outro, com velocidade definida, sem que haja transporte de matéria desse meio.

As ondas são divididas em dois tipos: **ondas mecânicas** e **ondas eletromagnéticas**.

3.1 Classificação das ondas

Basicamente, as ondas podem ser classificadas sob as perspectivas de sua natureza e de sua forma de propagação.

3.1.1 Quanto à natureza

Ondas Mecânicas são as ondas que necessitam de um meio material para se propagarem, pois não se propagam no vácuo. Como exemplos de ondas mecânicas, temos o som e as ondas do mar.

Ondas Eletromagnéticas são ondas que não necessitam de um meio material para se propagarem. Estas ondas se propagam em alguns meios materiais, mas com velocidade menor em comparação com sua propagação no vácuo. Como exemplos de ondas eletromagnéticas, temos os Raios-X, as ondas de rádio, as ultravioletas e a luz visível.

3.1.2 Quanto à propagação

Ondas longitudinais são ondas que geram perturbações nas partículas de um meio na mesma direção em que se propagam. Como exemplos, temos a onda sonora se propagando num meio fluido e a onda gerada pela compressão de uma mola na

posição horizontal.

Ondas transversais são ondas que têm a direção de vibração perpendicular à direção de sua propagação. Como exemplos, temos a onda gerada numa corda esticada após uma perturbação, causando um pulso com movimento vertical de sobe e desce e as ondas eletromagnéticas.

3.2 Equação geral da onda

Uma equação de onda é a representação de uma equação diferencial parcial hiperbólica, que tem uma variável temporal t , uma ou mais variáveis espaciais, tais como, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, além de uma função escalar dessas variáveis, dada por, $u = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; t)$. Dessa forma, a equação de onda referente à função u , em sua forma geral, é dada pela eq.34, (ALVIM, 2007).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (34)$$

onde c é uma constante que representa a velocidade da onda.

3.3 Solução analítica da equação da onda 1D

A importância de termos o conhecimento da função analítica que modela um fenômeno físico é que, através dela, temos a possibilidade de compararmos os resultados fornecidos por ela, com os obtidos através de um método numérico, possibilitando assim, confirmarmos ou não, a eficácia e a eficiência desse método.

Neste contexto, iremos apresentar a solução geral da equação de onda unidimensional e aplicá-la ao nosso problema para que sirva de referência para nossa solução numérica. É possível mostrar que, para o caso unidimensional, a eq.34 se resume a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (35)$$

e, conforme (BUTKOV, 1973), sua solução analítica, sob as condições de contorno

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (36)$$

e condições iniciais $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$, é dada pela eq.37.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (37)$$

Os coeficientes A_n e B_n são dados por:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (38)$$

e,

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (39)$$

Após alguns passos matemáticos, chegamos à eq.40, que representa a solução analítica da equação da onda unidimensional para as condições especificadas anteriormente, onde n é o seu *modo normal de vibração*.

$$u(x, t) = A \cdot \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cdot \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \quad (40)$$

3.4 Discretização da equação da onda 1D

As subseções 3.4.1 e 3.4.2 serão dedicadas a mostrar as discretizações da equação da onda unidimensional, pelos métodos de diferenças finitas explícito e implícito. Cada método será utilizado, individualmente, para solucionarmos o problema 1, gerando assim, duas soluções numéricas para o mesmo problema.

Problema 1:

Considere uma corda de comprimento L presa por suas extremidades. Suponha que seja gerado um pulso nessa corda, tal que a propagação da onda ao longo da mesma seja regida pela função $u(x, t)$ que, por sua vez, satisfaz as seguintes condições: $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $u(x, 0) = A \cdot \text{sen}(kx)$ e $u_t(x, 0) = 0$, onde x é a coordenada do eixo sobre o qual a onda é analisada, t é o tempo de propagação da onda, A é uma constante que representa a amplitude da onda e k o número de onda.

3.4.1 Discretização pelo método de diferenças finitas explícito

Tomemos a eq.34 para o caso particular unidimensional.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (41)$$

Usando a discretização temporal de segunda ordem para o termo $\frac{d^2 u}{dt^2}$, com índice temporal n , e a discretização espacial para o termo $\frac{d^2 u}{dx^2}$, com índice espacial i , temos a eq.42.

$$\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (42)$$

Utilizando a diferença centrada de segunda ordem para a condição inicial $u_t(x, 0) = 0$, temos que:

$$\frac{du(x, 0)}{dt} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = 0 \quad (43)$$

o que leva à igualdade: $u_i^{n+1} = u_i^{n-1}$, que ao ser substituída na eq.42, a transforma na eq.44.

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (44)$$

Agrupando os termos semelhantes e isolando o termo de ordem $n+1$ à esquerda do sinal de igualdade na eq.44, chegamos à eq.45, que determina os valores de $u(x, t)$ para o primeiro passo de tempo, ou seja, para $t = 0$.

$$u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right) u_i^n + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) \quad (45)$$

Após o primeiro passo de tempo, usamos a eq.42 para valores de $t > 0$. Nesse caso, a equação discretizada conterá termos em $n-1$, n e $n+1$, dentre os quais, apenas o termo $n+1$ é desconhecido e, portanto, precisa ser determinado. Agora, o termo com índice $n-1$ aparece na equação, uma vez que a derivada nula não é utilizada para valores de tempo maiores que zero. Embora o termo de índice $n-1$ apareça na equação, ele não representa um problema pois, como já foi dito anteriormente, esse termo é conhecido. Logo, após o agrupamento dos termos semelhantes, a equação discretizada é representada por:

$$u_i^{n+1} = 2 \left(1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right) u_i^n + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i-1}^n + u_{i+1}^n) - u_i^{n-1} \quad (46)$$

Finalmente, para solucionarmos o problema proposto, devemos analisar a equação discretizada com relação à estabilidade. É possível mostrar que, para atingirmos a estabilidade numérica, o coeficiente que multiplica o termo u_i^n deve ser não-negativo, ou seja, $\left(1 - c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) \geq 0$, onde o termo $c \frac{\Delta t}{\Delta x}$ recebe o nome *número de Courant*, ou *CFL* (Courant-Friedrichs-Lewy), (WAGNER, 2000), e seu valor deve ser tal que $CFL \leq 1$. Como pode ser visto, o número de Courant dependerá do espaçamento da malha, bem como do tamanho do passo de tempo. Uma malha muito refinada, embora, em geral, aumente a precisão, exige um tempo maior de processamento computacional em comparação a uma malha com elementos maiores. Da mesma forma, um passo de tempo muito pequeno exige um tempo maior de processamento em comparação a um passo de tempo maior. A combinação apropriada entre o tamanho do elemento da malha com o tamanho do passo de tempo é o que garante satisfazer o número de Courant.

3.4.2 Discretização pelo método de diferenças finitas implícito

Para resolvermos o problema proposto, pelo método implícito, de forma semelhante ao que foi feito no caso explícito, usaremos a discretização de segunda ordem no tempo e no espaço, de modo a obtermos:

$$\frac{u_i^{n-1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (47)$$

Fazendo uso da condição de derivada nula para $t = 0$, chegamos à igualdade $u_i^{n+1} = u_i^{n-1}$, que ao ser substituída na eq.47, nos dá:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (48)$$

Agrupando os termos semelhantes e passando os termos de ordem $n + 1$ para à esquerda do sinal de igualdade na eq.48, chegamos à eq.49, que representa um sistema de equações lineares que tem como incógnitas os termos com índice $n + 1$.

$$2 \left(1 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right) u_i^{n+1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} = 2u_i^n \quad (49)$$

A última equação foi gerada para $t = 0$, o que levou em conta a condição de derivada nula. Já para valores de tempo $t > 0$, não levamos em conta o termo de derivada nula e, como consequência, temos a presença do termo $n - 1$, o que nos dá a eq.50.

$$\left(1 + 2 \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\right) u_i^{n+1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} = 2u_i^n - u_i^{n-1} \quad (50)$$

A solução do sistema linear representado pela última equação será obtida levando em conta as condições de contorno e iniciais do problema. Analisaremos a solução para cada um dos dois valores do passo de tempo Δt a serem escolhidos. Em seguida, plotaremos as soluções numérica e analítica em função da posição x para um dado tempo t , comparando a primeira com a segunda, sendo a segunda, a nossa referência.

3.5 Solução analítica da equação da onda 2D

Embora nosso trabalho seja direcionado para o caso unidimensional, procuramos iniciar o caso bidimensional, como sugestão de trabalho futuro, com o intuito de despertar o interesse do leitor na análise da discretização da equação da onda bidimensional e sua possível aplicação na engenharia. Logo, semelhantemente ao caso unidimensional, é importante dispormos da solução analítica da equação da onda bidimensional, como base de comparação para atestar a eficácia dos códigos que forem implementados para a solução numérica de um determinado problema.

Passando a eq.34 para a forma bidimensional, obtemos a eq.51.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (51)$$

Conforme (BUTKOV, 1973), uma solução analítica particular da eq.51, sob as condições de contorno,

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0 \quad (52)$$

com condições iniciais dadas por:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (53)$$

e,

$$u_t(x, y, 0) = v_0(x, y) \quad (54)$$

é dada, após alguns passos matemáticos e manipulações algébricas, por:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{m,n} \cdot \cos(\omega_{m,n}t) + B_{m,n} \cdot \text{sen}(\omega_{m,n}t)) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (55)$$

com frequência angular expressa por:

$$\omega_{m,n} = \pi \cdot c \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (56)$$

onde cada par de inteiros, (m, n) , corresponde a um modo de vibração característico da onda.

Os coeficientes $A_{m,n}$ e $B_{m,n}$ são dados pelas equações:

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b u_0(x, y) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (57)$$

$$B_{m,n} = \frac{4}{ab\omega_{m,n}} \int_0^a \int_0^b v_0(x, y) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (58)$$

Finalmente, após alguns passos matemáticos, chegamos à eq.59, que representa a solução analítica da equação da onda bidimensional para as condições especificadas anteriormente.

$$u(x, y, t) = C_{m,n} \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot \cos(\omega_{m,n}t + \delta_{m,n}) \quad (59)$$

3.6 Discretização da equação da onda 2D

No caso bidimensional, discretizaremos a equação da onda utilizando apenas o método explícito pois, conforme dito anteriormente, iniciamos o caso bidimensional como forma de incentivo a projetos futuros. Na subseção 3.6.1 descreveremos todos os passos da discretização pelo método de diferenças finitas explícito e utilizaremos a equação gerada para solucionarmos numericamente o problema 2.

Problema 2: Propagação de uma onda numa membrana retangular

Considere uma membrana retangular de arestas a e b fixas. Suponha que seja gerado um pulso nessa membrana, tal que a propagação da onda ao logo dela seja regida pela função $u(x, y; t)$, que por sua vez, satisfaz as seguintes condições: $u(0, y; t) = 0$, $u(a, y; t) = 0$, $u(x, 0; t) = 0$, $u(x, b; t) = 0$, $u(x, y; 0) = A_{m,n} \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ e $u_t(x, y; 0) = 0$, onde x e y representam, respectivamente, as coordenadas dos eixos sobre os quais as arestas a e b da membrana estão apoiadas, A a amplitude da onda e m e n

um par de inteiros que corresponde a um modo de vibração característico da membrana.

3.6.1 Discretização pelo método de diferenças finitas explícito

Como estamos diante de um caso bidimensional, temos duas coordenadas espaciais, x e y e uma temporal t . Portanto, na discretização da eq.51, atribuiremos a x , y e t , os índices i , j e n , respectivamente.

Usando a discretização espacial de segunda ordem para os termos $\frac{d^2u}{dx^2}$ e $\frac{d^2u}{dy^2}$, e a discretização temporal para o termo $\frac{d^2u}{dt^2}$, obtemos a eq.60.

$$\frac{u_{i,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (60)$$

De modo semelhante ao que foi feito para o caso unidimensional na eq.43, obtemos a seguinte igualdade para a condição de derivada nula: $u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n-1}$, que ao ser substituída na eq.60, a transforma na eq.61,

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^n + u_{i,j}^{n+1}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (61)$$

Agrupando os termos semelhantes, isolando o termo de ordem $n + 1$ à esquerda do sinal de igualdade na eq.61 e considerando $\lambda_1 = \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta x^2}$ e $\lambda_2 = \frac{\Delta t^2 c^2}{\Delta y^2}$, chegamos à forma final da equação da onda discretizada, expressa pela eq.62,

$$u_{i,j}^{n+1} = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)u_{i,j}^n + \frac{\lambda_1}{2}(u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n) + \frac{\lambda_2}{2}(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n) \quad (62)$$

A última equação foi obtida fazendo uso da condição inicial de derivada nula. Por esse motivo, o termo com índice $n - 1$ não aparece na equação, condição específica para $t = 0$. Além disso, por se tratar do método explícito, é importante observarmos a condição de estabilidade do método. Para isso, devemos garantir que o termo $(1 - \lambda_1 - \lambda_2)$ seja positivo. Como consequência disso, temos que ter o intervalo de tempo satisfazendo a seguinte equação:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{c\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad (63)$$

Na eq.62 termos de ordem n são conhecidos, sendo o termo de ordem $n + 1$ desconhecido

e dependente dos termos de ordem n para que possa ser determinado e, a cada passo de tempo, atualizado.

Para valores de $t > 0$ o termo de índice $n - 1$ passa a compor a equação final, pois a condição de derivada nula não é considerada para esses valores de t . Sendo assim, a eq. 60, após algumas manipulações algébricas, se torna a equação final, dada por:

$$u_{i,j}^{n+1} = 2(1 - \lambda_1 - \lambda_2)u_{i,j}^n + \lambda_1(u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n) + \lambda_2(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n) - u_{i,j}^{n-1} \quad (64)$$

Essa última equação, unida às condições iniciais e de contorno, nos permite criar um código em Python para solucionarmos numericamente a equação de onda bidimensional.

4 RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos, através de gráficos, os resultados obtidos através dos códigos escritos na linguagem *Python* e fornecidos ao leitor nos apêndices A.4 e A.5. Na seção 4.1 comentamos a respeito dos dados utilizados para a obtenção das soluções, tendo como foco, o método explícito e, na seção 4.2, o implícito, conforme previamente discutido nas subseções 3.4.1 e 3.4.2, respectivamente.

Neste mesmo capítulo, apresentaremos quatro gráficos com as soluções numéricas e analíticas da equação da onda bidimensional, cujo código se encontra no apêndice A.6, para o caso específico do exemplo 2. O método utilizado foi o explícito e os gráficos das figuras 27 e 28 referem-se ao modo de vibração formado pelo par de inteiros $(1, 1)$ e, os das figuras 29 e 30, pelo par $(2, 2)$. Reiteramos que os resultados para o caso bidimensional são apenas para visualmente aferirmos que o código numérico não está completo, apresentando erros comparativamente com a solução analítica, e que o caso bidimensional segue como sugestão para trabalhos futuros.

4.1 Método explícito para o caso unidimensional

A solução da equação da onda unidimensional aplicada ao problema 1, através do método de diferenças finitas de forma **explícita**, para o passo de tempo $\Delta t = 0.001s$, está representada para o modo de vibração 1, pelos gráficos das figuras de 7 a 11 e, para o modo de vibração 2, pelos gráficos das figuras de 12 à 16.

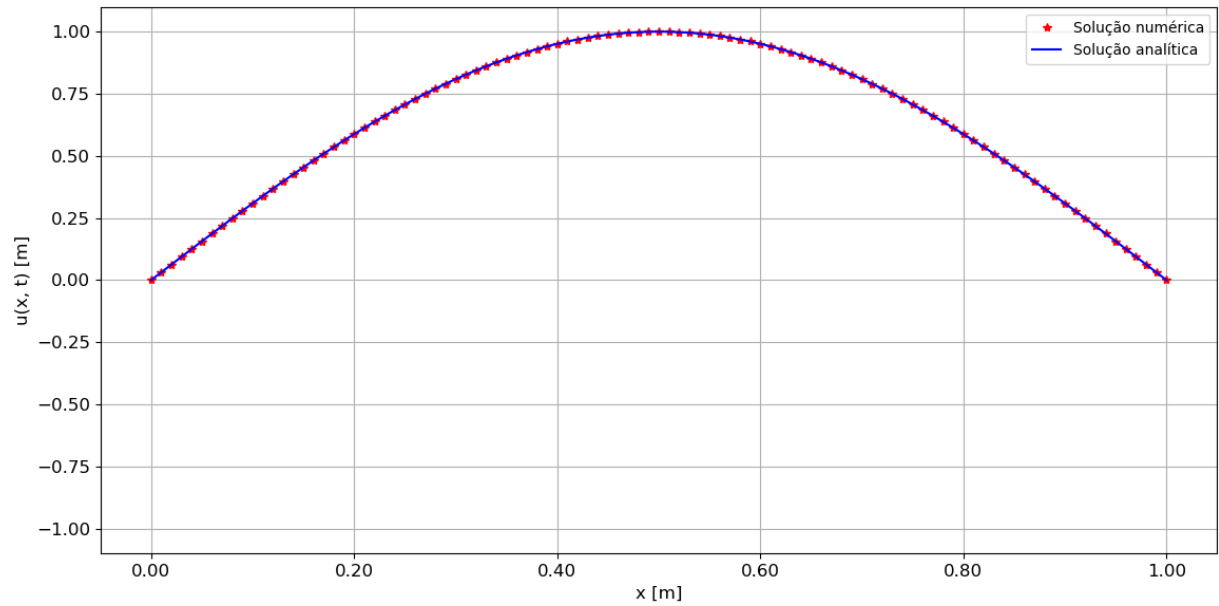
A solução foi obtida considerando uma malha linear contendo 101 pontos, distribuídos num comprimento de $1m$ de corda, com elementos de mesmo tamanho e valor de $0.01 m$. Consideramos a velocidade da onda igual a $1m/s$ e a amplitude igual a $1m$.

4.2 Método implícito para o caso unidimensional

Analogamente ao caso explícito, a solução da equação da onda unidimensional aplicada ao problema 1, através do método de diferenças finitas de forma **implícita**, para o mesmo passo de tempo, está representada para o modo de vibração 1, pelos gráficos das figuras de 17 a 21 e, para o modo de vibração 2, pelos gráficos das figuras de 22 a 26.

Para o caso implícito, foram consideradas as mesmas condições do método explícito.

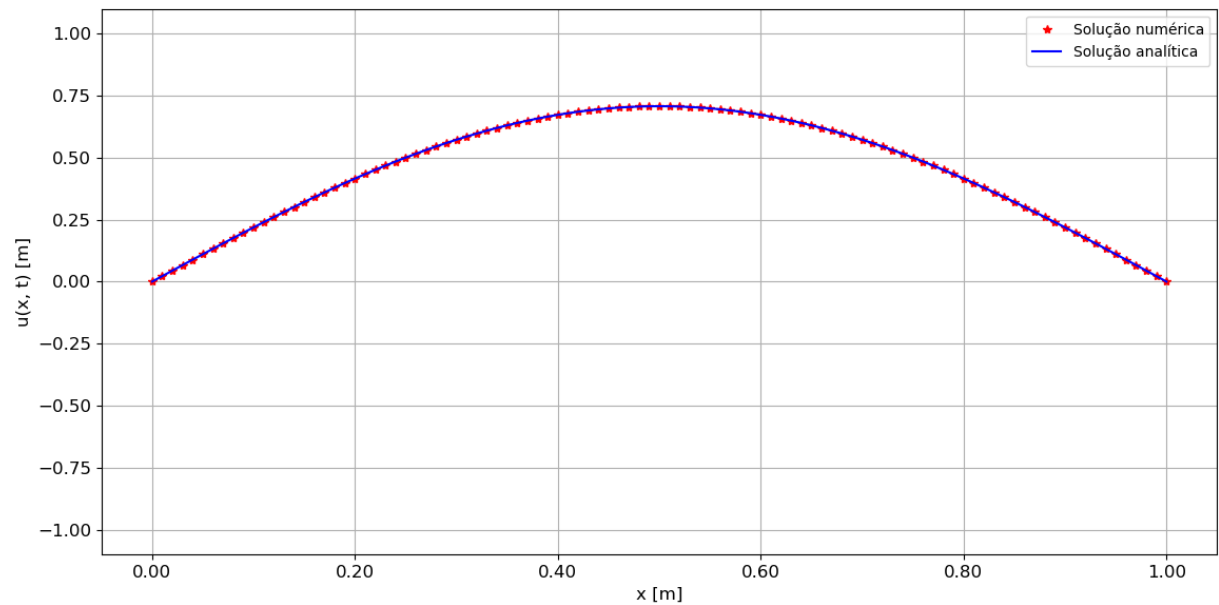
Figura 7 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

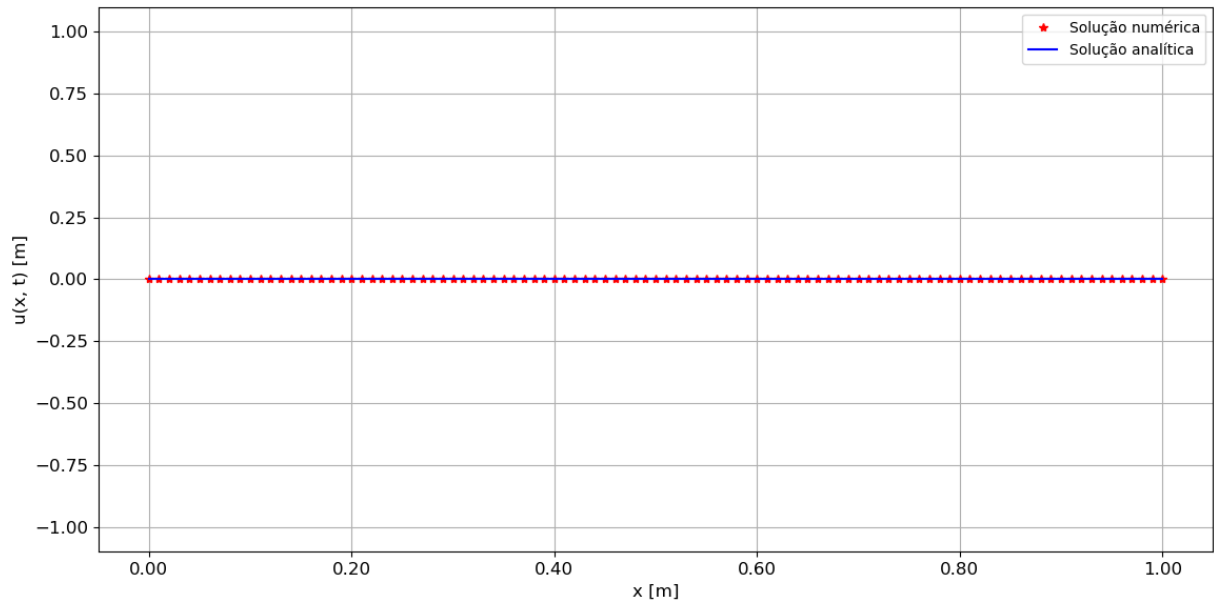
Figura 8 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.250\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

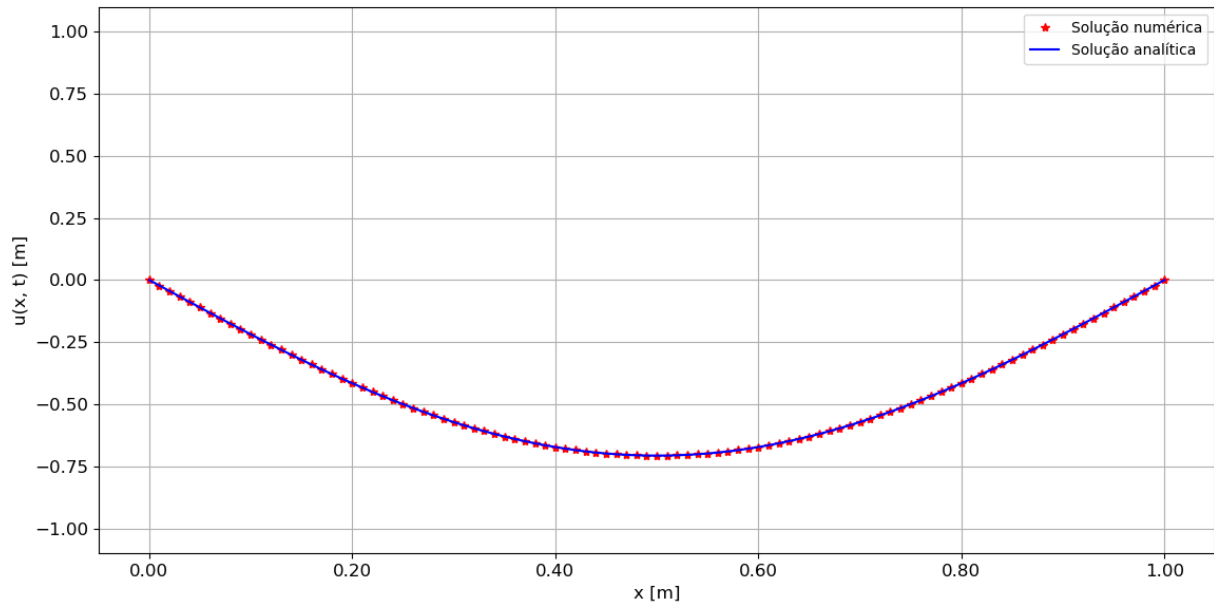
Figura 9 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500 \text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

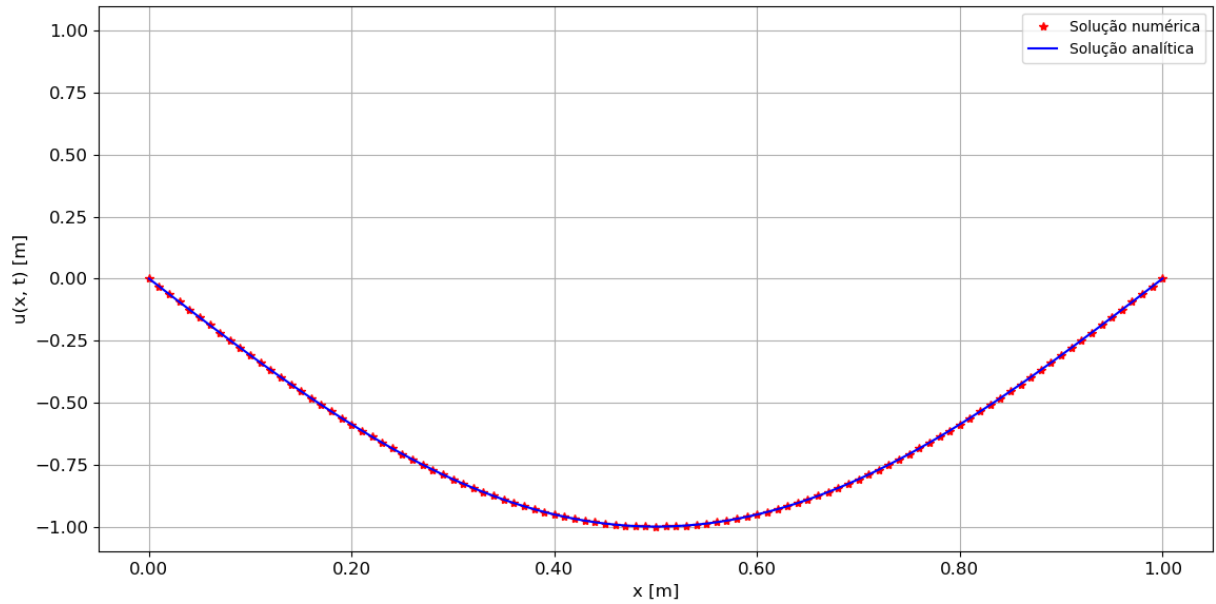
Figura 10 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.750 \text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

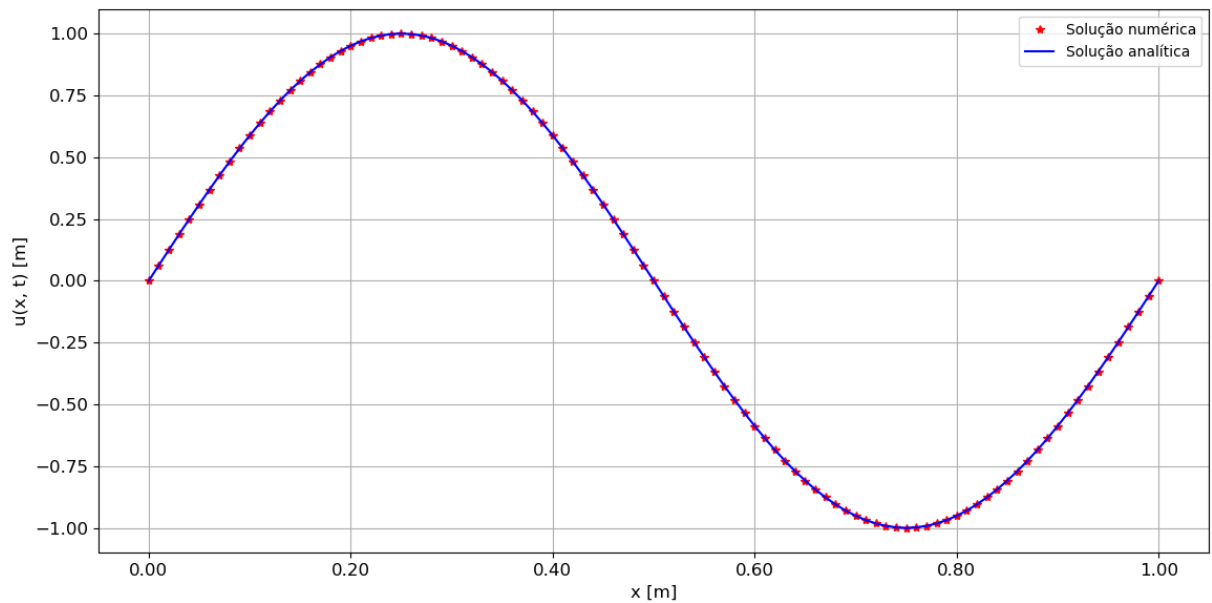
Figura 11 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 1.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

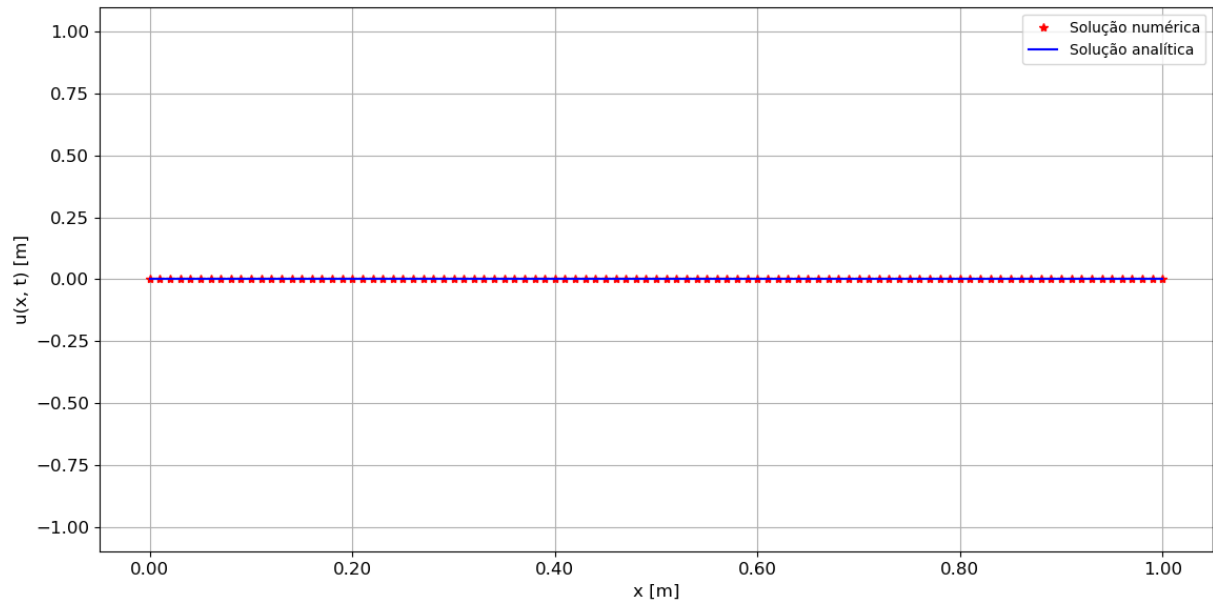
Fonte: O autor, 2022.

Figura 12 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



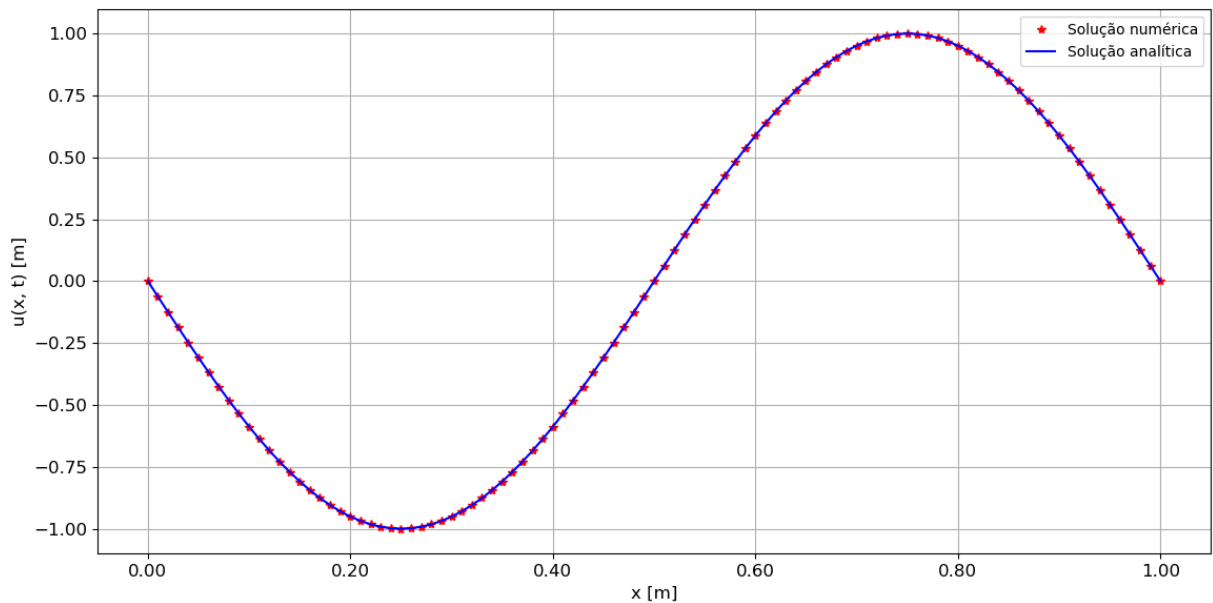
Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

Figura 13 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.250\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)

Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

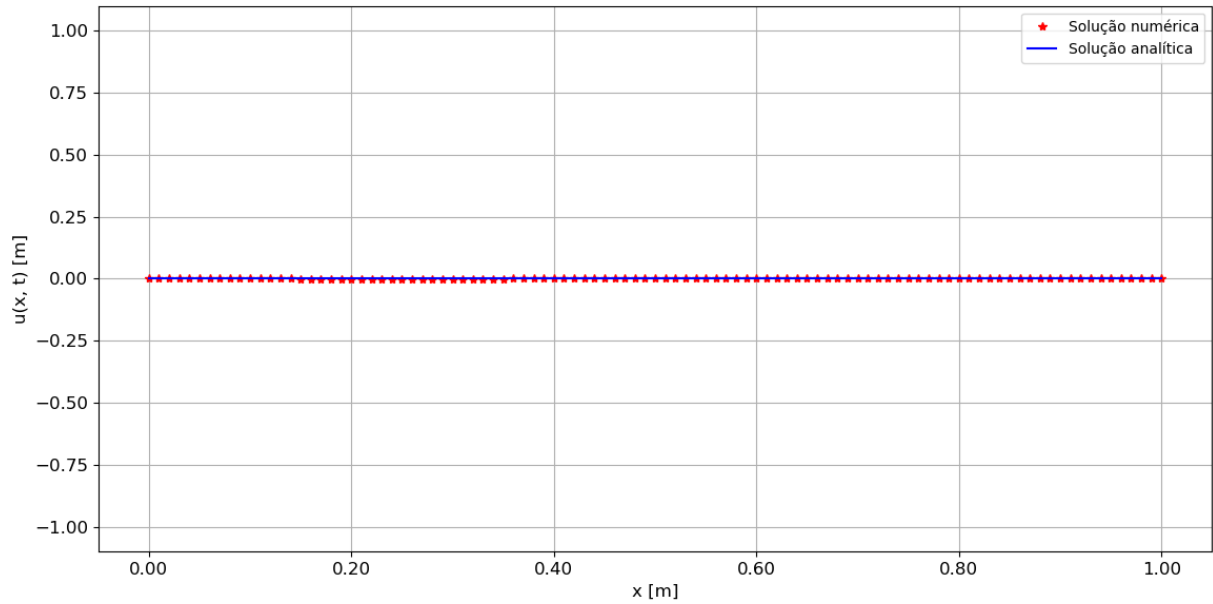
Fonte: O autor, 2022.

Figura 14 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)

Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

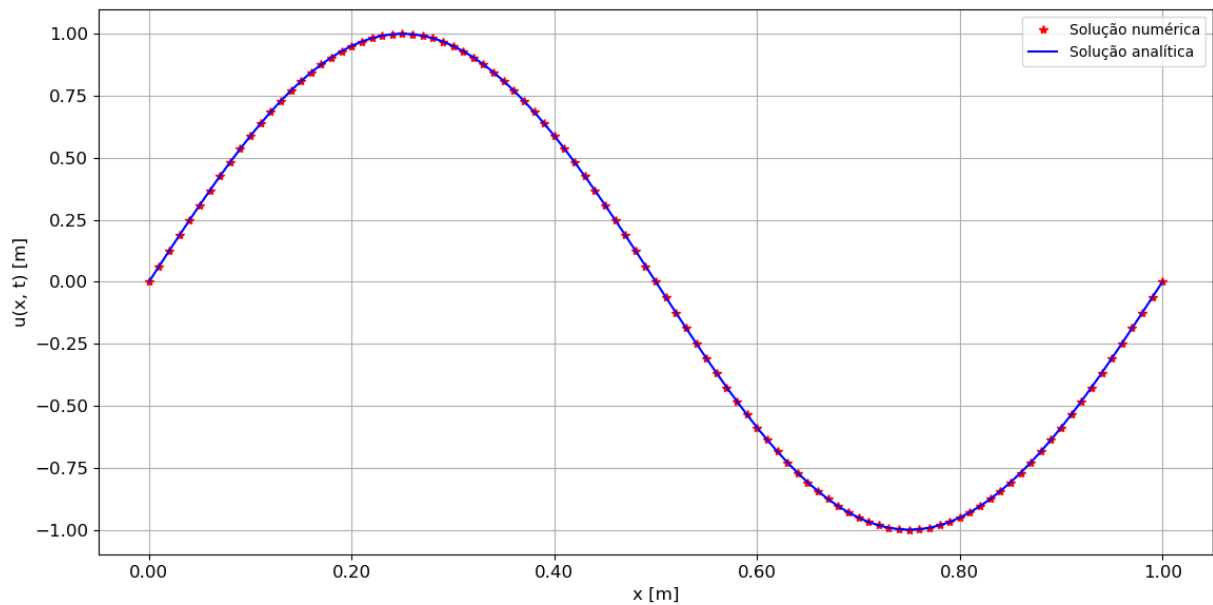
Figura 15 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.750\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

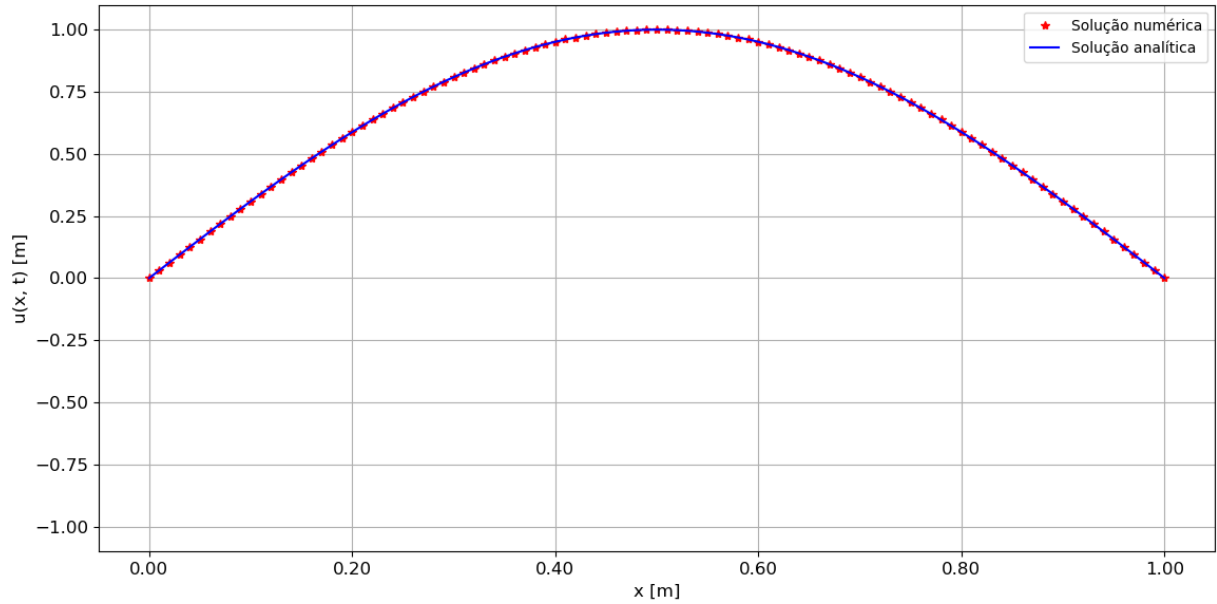
Figura 16 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 1.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

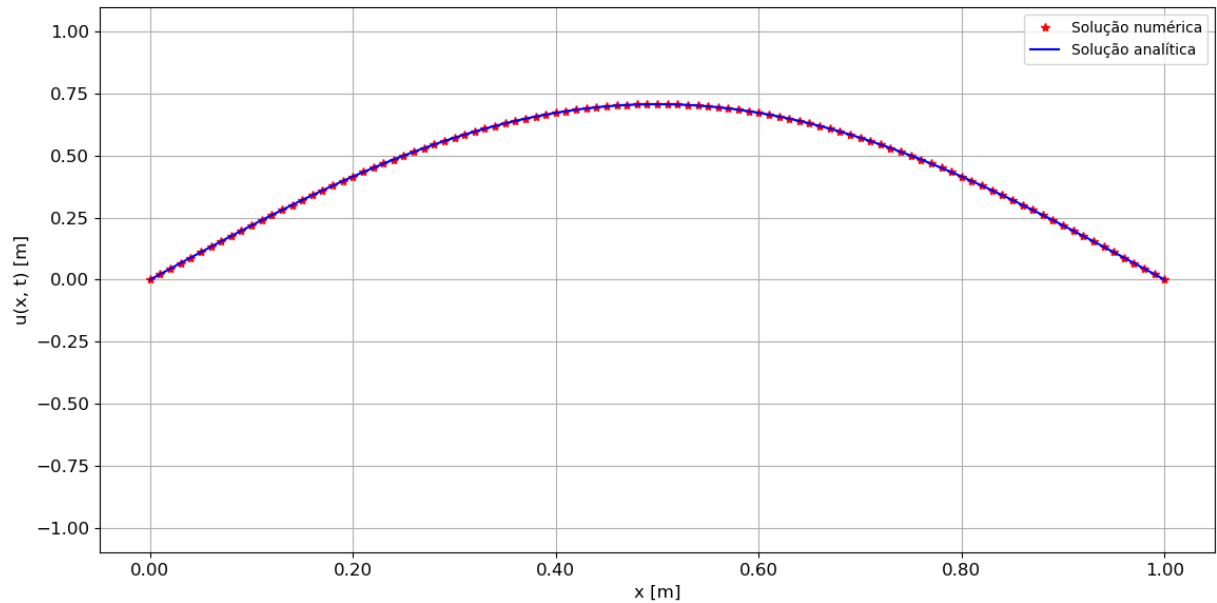
Figura 17 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

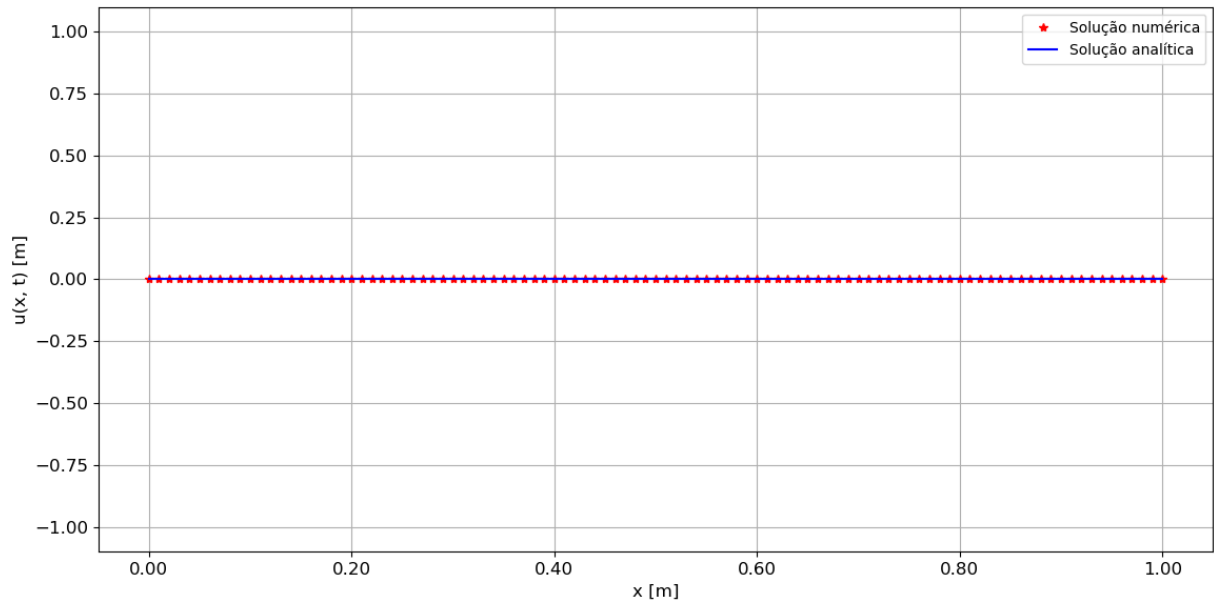
Figura 18 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.250\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

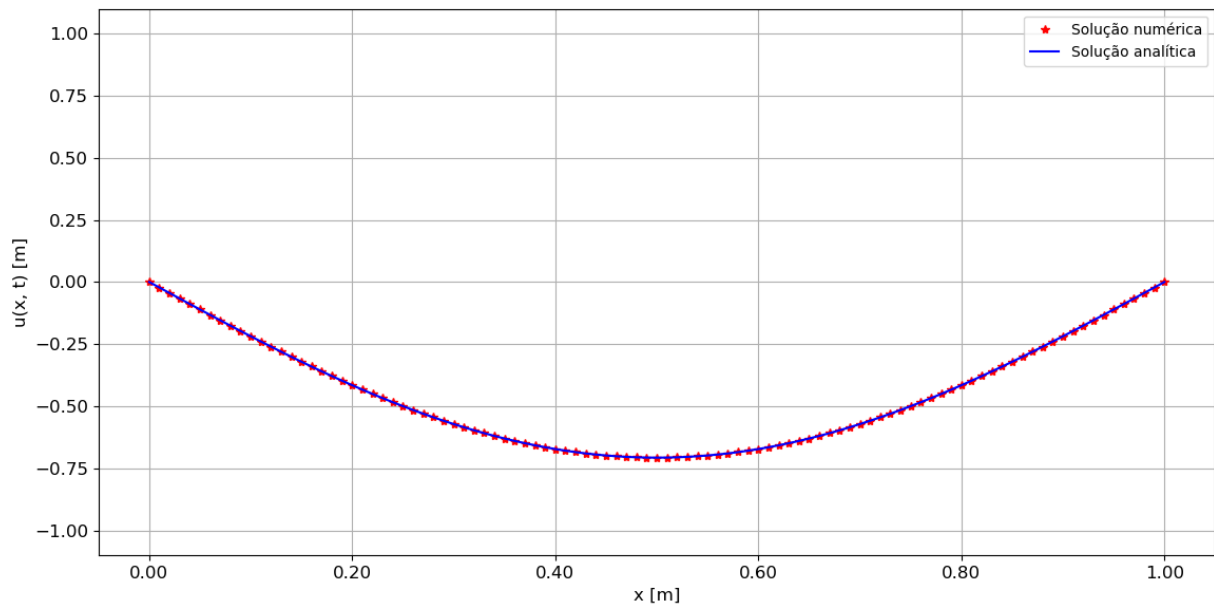
Figura 19 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.500\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

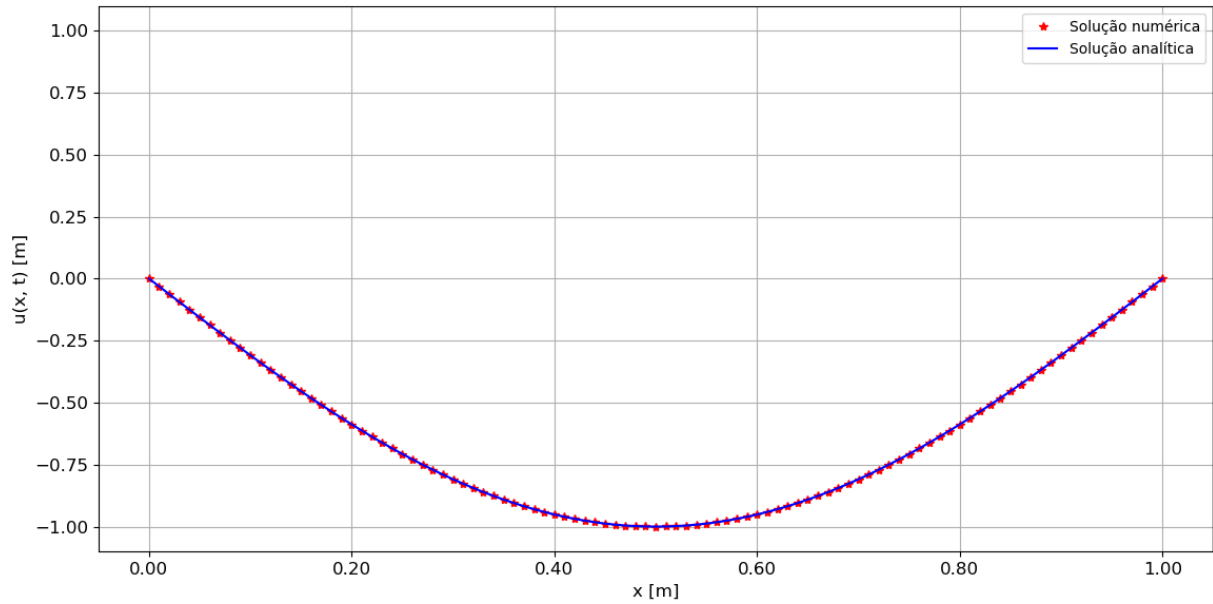
Figura 20 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.750\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

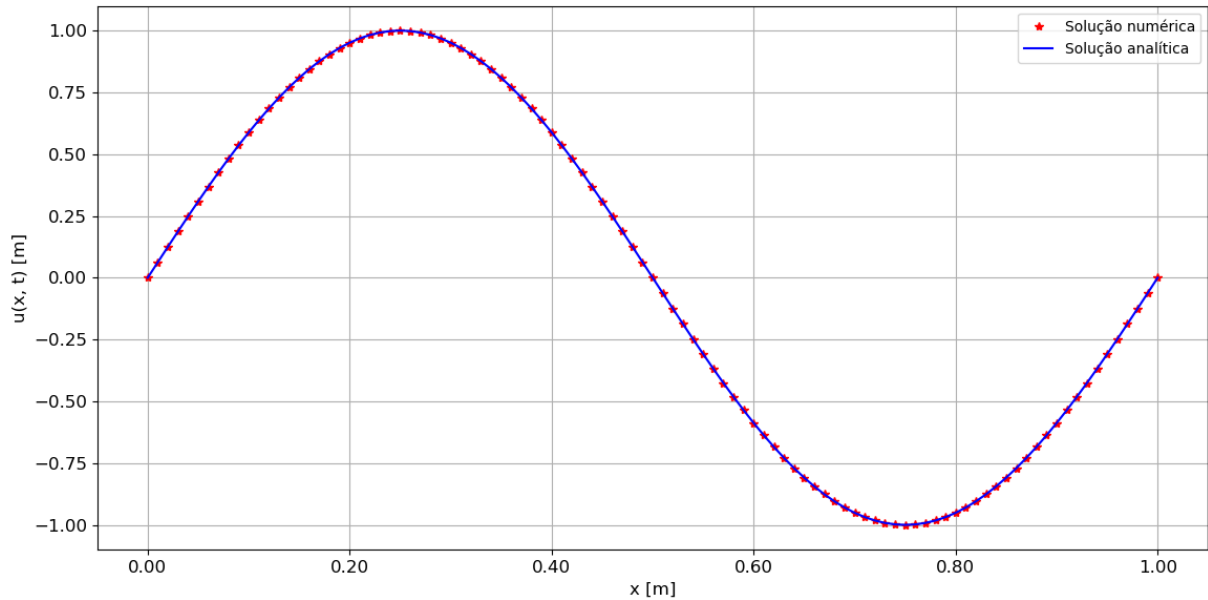
Figura 21 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 1.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 1.

Fonte: O autor, 2022.

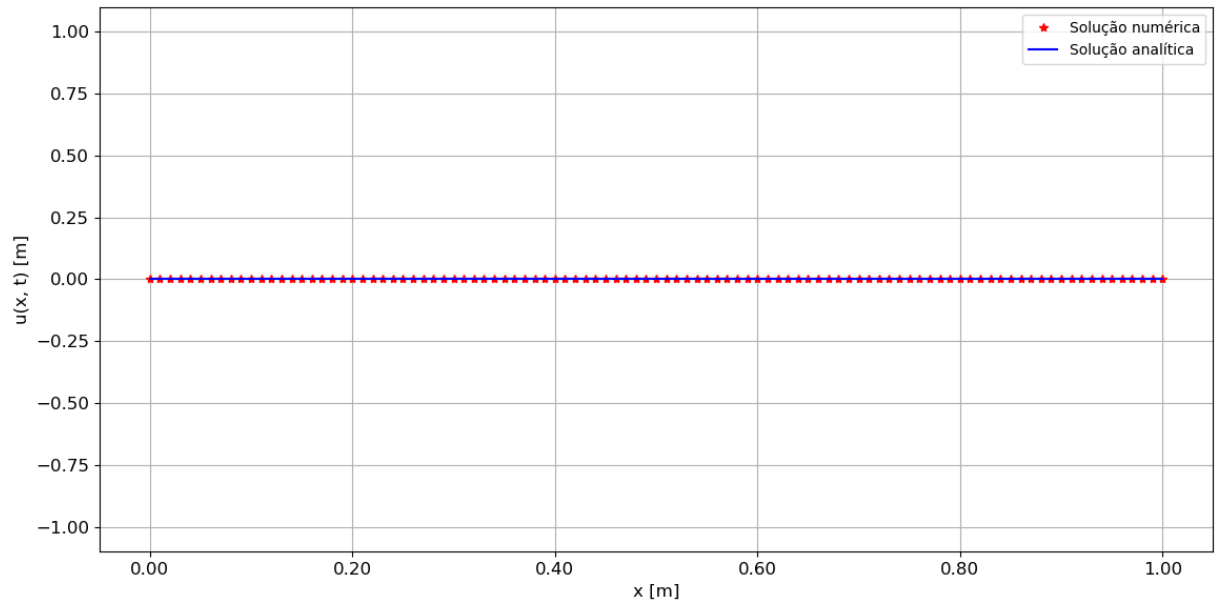
Figura 22 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

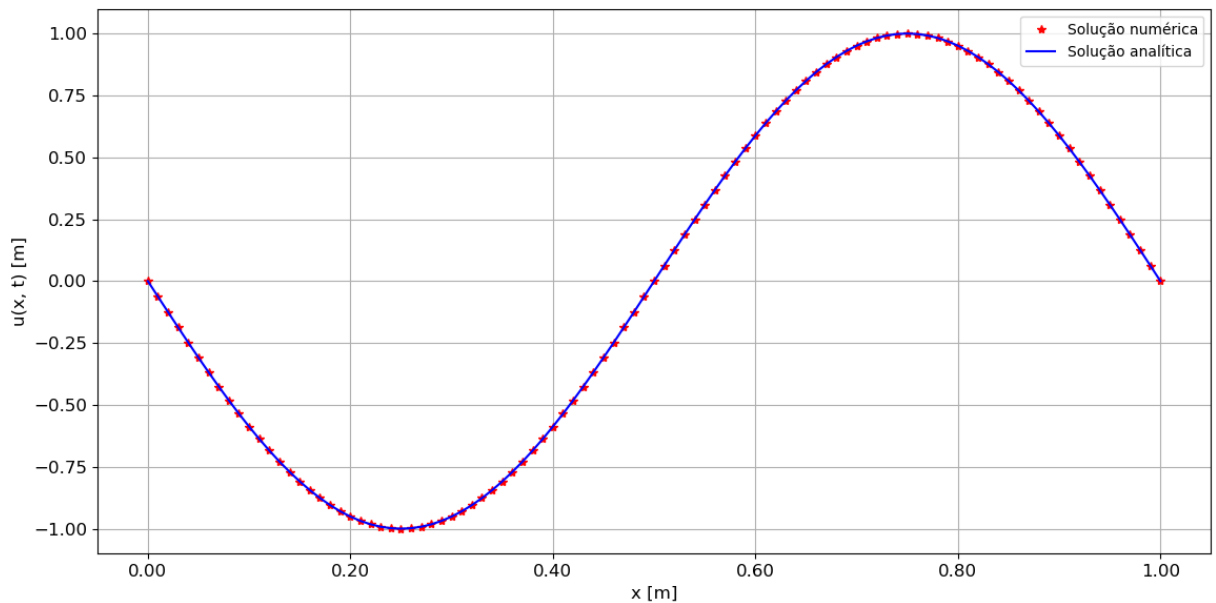
Figura 23 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.250\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

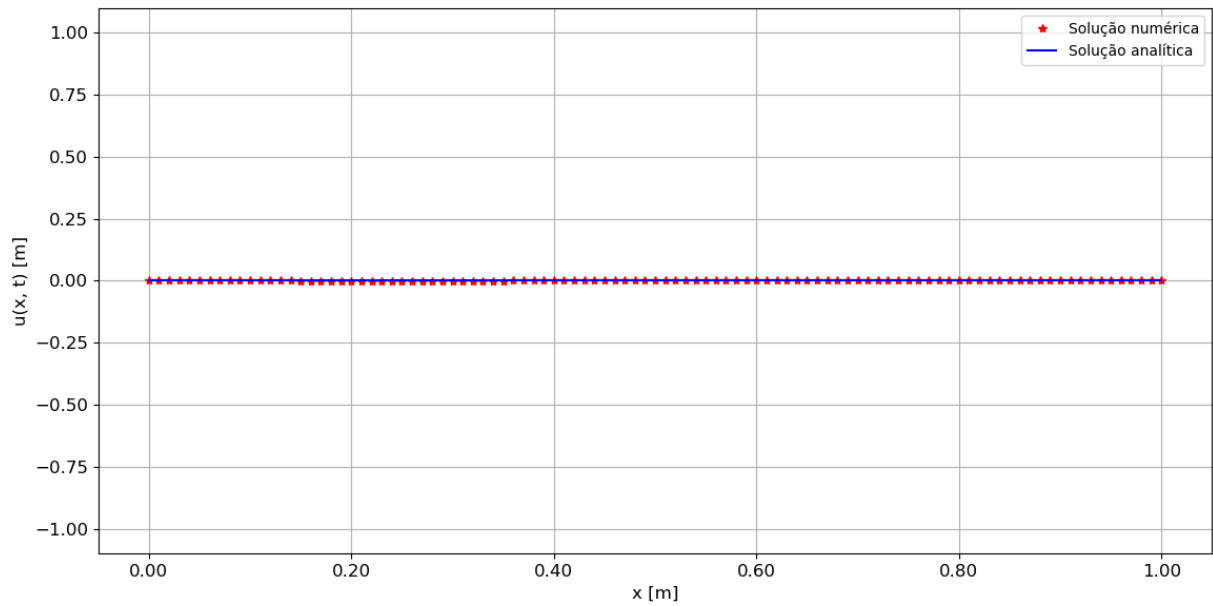
Figura 24 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.500\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

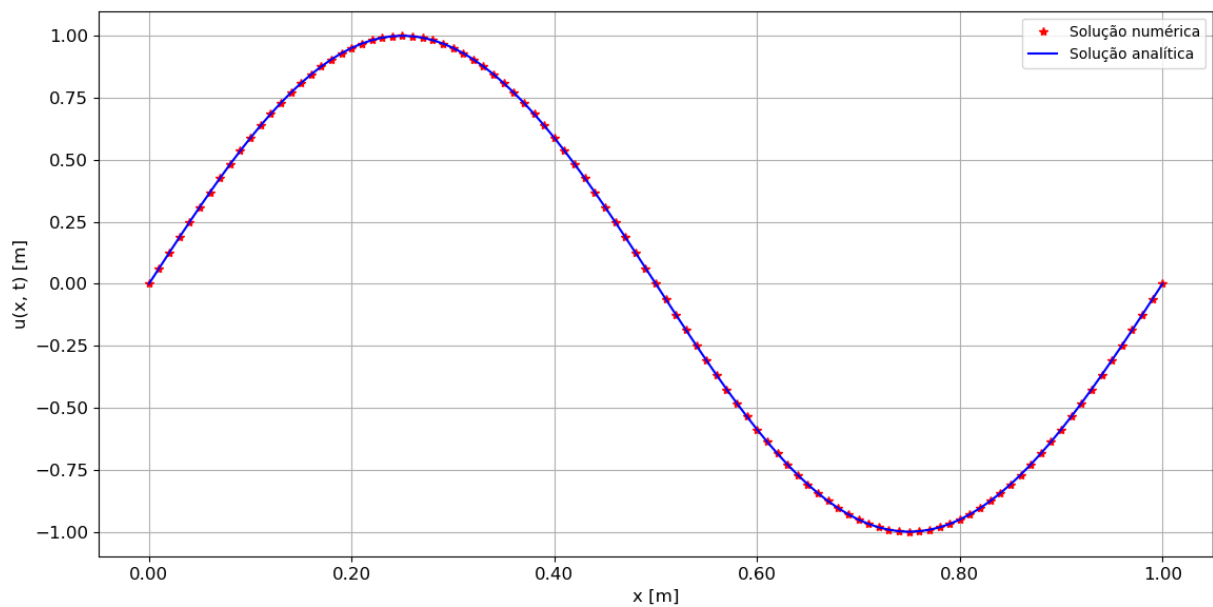
Figura 25 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 0.750\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

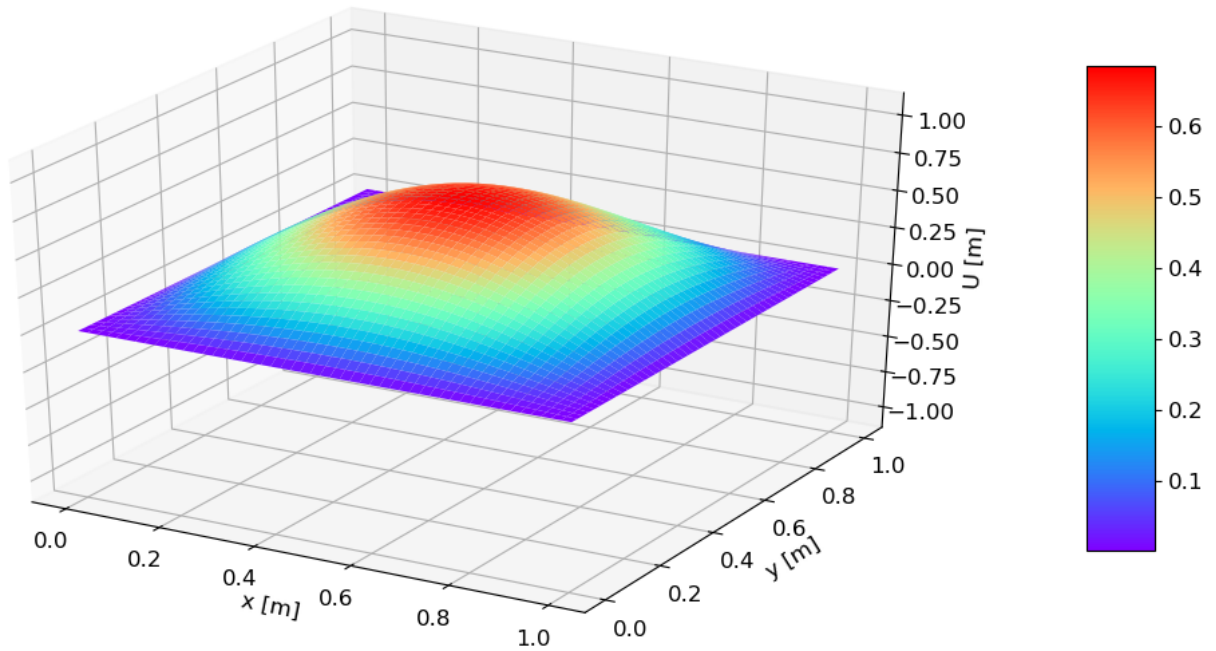
Figura 26 - Resultado obtido pelo MDF implícito para $t = 1.000\text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3}\text{ s}$)



Legenda: Soluções numérica e analítica da equação da onda 1D para o modo de vibração igual a 2.

Fonte: O autor, 2022.

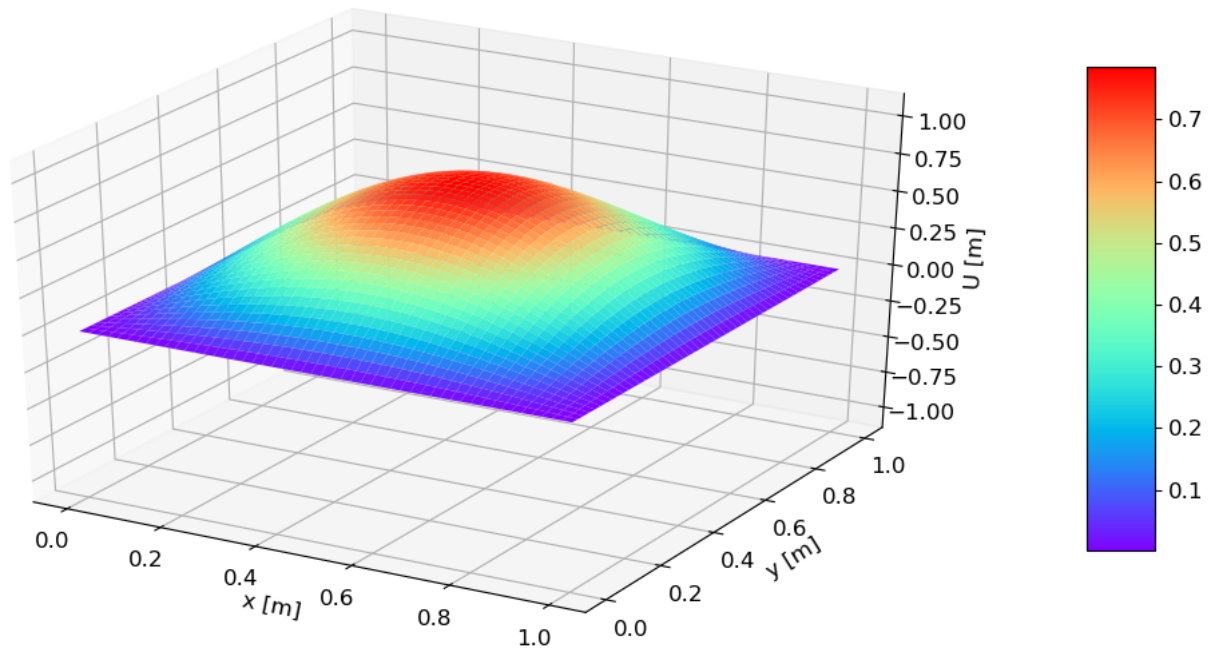
Figura 27 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500 \text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$)



Legenda: Solução numérica da equação da onda 2D para o modo (1, 1).

Fonte: O autor, 2022.

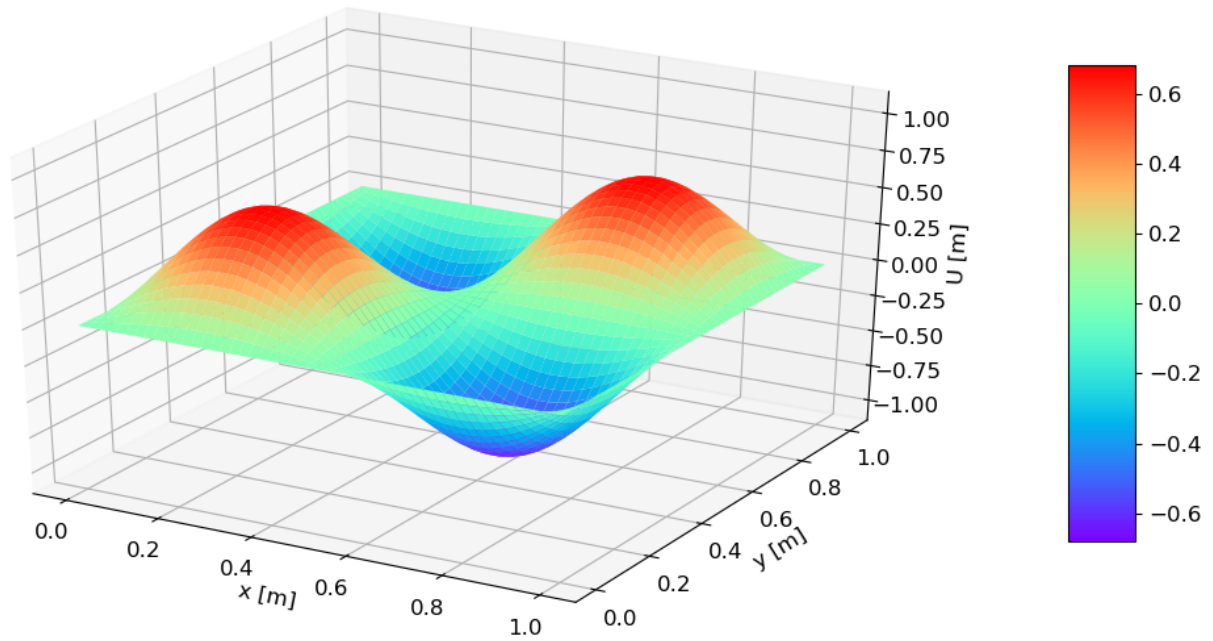
Figura 28 - Resultado obtido analiticamente para $t = 0.500 \text{ s}$



Legenda: Solução analítica da equação da onda 2D para o modo (1, 1).

Fonte: O autor, 2022.

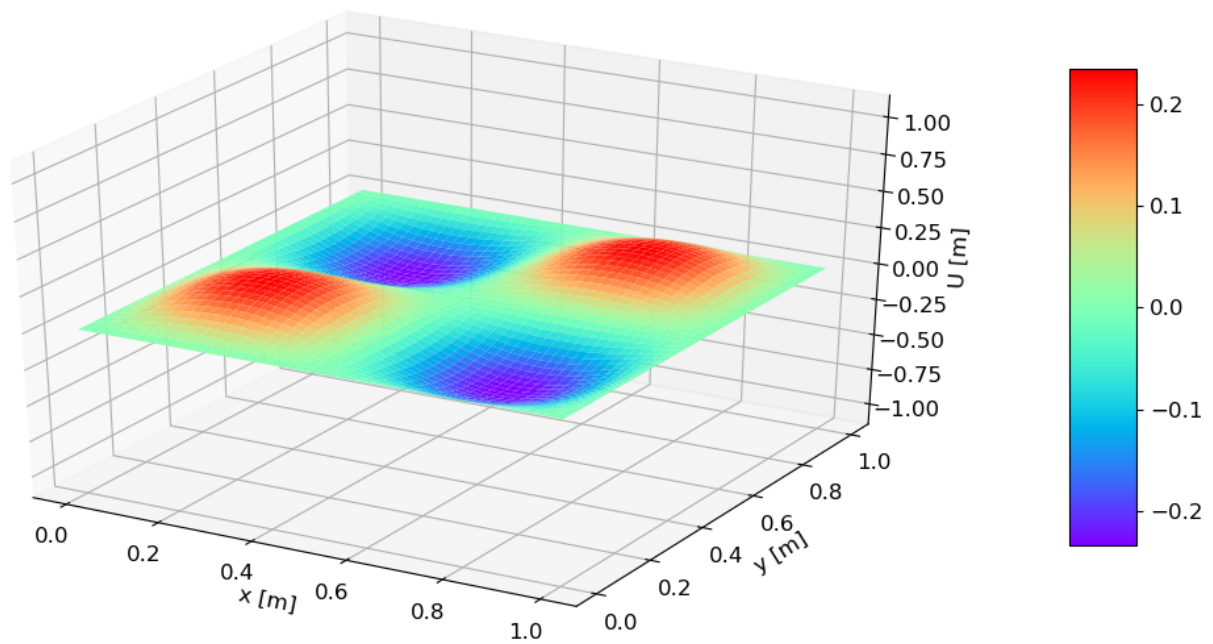
Figura 29 - Resultado obtido pelo MDF explícito para $t = 0.500 \text{ s}$ ($\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$)



Legenda: Solução numérica da equação da onda 2D para o modo (2, 2).

Fonte: O autor, 2022.

Figura 30 - Resultado obtido analiticamente para $t = 0.500 \text{ s}$



Legenda: Solução analítica da equação da onda 2D para o modo (2, 2).

Fonte: O autor, 2022.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme podemos observar, no decorrer do trabalho, as soluções numéricas pelos métodos de diferenças finitas, tanto no formalismo explícito, quanto no implícito, foram satisfatórias, com resultados semelhantes aos da solução analítica para uma certa quantidade de casas decimais, o que confirma a assertividade da escrita dos códigos computacionais. Os programas desenvolvidos foram eficientes e os métodos numéricos adequados, contribuindo para resultados coerentes com os esperados.

Para trabalhos futuros, sugerimos aplicar o método de diferenças finitas para, também em linguagem *Python*, desenvolver um código de solução da equação da onda bidimensional, conforme ilustrado na seção 3.6. Os primeiros passos desta empreitada já foram iniciados e o código fonte de um primeiro programa com este intuito, ainda com ajustes pendentes, foi incluso no apêndice A. Este programa refere-se à forma explícita do método de diferenças finitas para a equação da onda em duas dimensões. Também no apêndice A, incluímos tabelas contendo os resultados obtidos em cada nó da malha unidimensional, e que foram utilizados para gerarem nossos gráficos.

REFERÊNCIAS

- ALVIM, Antonio CM. Métodos numéricos em engenharia nuclear. *primeira edição*, Editora Certa, Curitiba, 2007.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- BUTKOV, E. *Mathematical physics, volume unico*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1973.
- CENGEL, Yunus A.; PALM III, William J. *Differential Equations For Engineers and Scientists*. 1. ed. New York: Mc Graw Hill Education, 2012.
- CHAPRA, Steven C; CANALE, Raymond P. *Métodos Numéricos para Engenharia-7ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2016.
- FERNANDES, Lindemberg Lima et al. Modelagem sísmica via métodos das diferenças finitas: caso da bacia do amazonas. *Acta Amazonica*, SciELO Brasil, v. 39, p. 155–163, 2009.
- JUSTO, Dagoberto Adriano Rizzoto et al. Cálculo numérico: Um livro colaborativo. *Versão Python*, 2020.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, [S.l.], v. 20, n. 2, p. 130–141, Jan. 1963.
- NETO, Gustavo Cunha da Silva; VALDA, Luiz Henrique Carneiro; LOPES, Arlindo Pires. O método das diferenças finitas aplicado a problemas de transmissão de calor em regime transiente.
- NUSSENZVEIG, Herch Moysés. *Curso de Física Básica*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1981.
- ROCHA, Alex Fraga. *Integração associativa em métodos de Runge-Kutta*. 2016. 77 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- STEWART, James. *Cálculo volume 2*. [S.l.]: 2013, 2013.
- WAGNER, Bradley Dean. *An analysis of the numerical error as a function of the Peclet number, Courant number and time weighting factor in the use of the groundwater mass transport program, MOTIF*. [S.l.]: Faculty of Graduate Studies and Research, University of Regina, 2000.

APÊNDICE A – Códigos fontes

A.1 Código referente às figuras de 1 a 4

```
# Programa para calcular a velocidade e a posicao de um carrinho
num piso horizontal sob efeito de atrito.
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import*

print(f'\033[0;34m{" Entrada dos dados " :=^55}\033[m')

k = 0.1
m = 1
v0 = float(input('Digite a velocidade inicial do carro (10): '))
x0 = float(input('Digite a Posicao inicial do carro (0): '))
dt = float(input('Digite o tamanho do passo de tempo '))
nt = int(input('Digite a quantidade de passos: '))

v = np.zeros((nt+1, 1)) # Vetor Velocidade
x = np.zeros((nt+1, 1)) # Vetor Posicao
v[0] = v0 # velocidade inicial
x[0] = x0 # Posicao inicial
T = nt*dt # Tempo total
t = arange(0, T+dt, dt) # Vetor de tempo

for i in range(0, nt):
    v[i+1] = v[i] - (dt*k/m)*v[i]
    x[i+1] = x[i] + dt*v[i]

# ===== Grafico da velocidade discretizada =====
plt.rcParams.update({'font.size': 12}) # Esse comando altera o
tamanho da fonte dos eixos e legenda
# plt.rcParams['xtick.labelsize'] = 12 # Esse comando altera o
tamanho da fonte do eixo x
# plt.rcParams['ytick.labelsize'] = 12 # Esse comando altera o
tamanho da fonte do eixo y
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade [m/s]')
```

```

plot(t, v, 'r*', markersize='4', markerfacecolor='w')

# ===== Grafico da velocidade analitica =====
vf = v0*exp(-k*t/m) # Velocidade analitica
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Velocidade [m/s]')
plot(t, vf, 'b-')
plt.legend(['Numerico', 'Analitico'], loc='upper center',
fontsize=10)
plt.show()

# ===== Grafico da posicao discretizada =====
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Posicao [m]')
plot(t, x, 'r*', markersize='4', markerfacecolor='w')

# ===== Grafico da posicao analitica =====
xf = ((v0*m)/k)*(1 - exp(-k*t/m)) # Posicao analitica
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Posicao [m]')
plot(t, xf, 'b-')
plt.legend(['Numerico', 'Analitico'], loc='lower center',
fontsize=10)
plt.show()

```

A.2 Código referente à figura 5

```

# Borboleta de Lorenz: grafico em 3D.
from pylab import*
import numpy as np
import mpl_toolkits.mplot3d.axes3d as p3
import matplotlib.animation as animation
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from matplotlib import cm

b = beta = 8/3
r = ro = 28

```

```

s = sigma = 10

lista_x = []
lista_y = []
lista_z = []
x = y = z = 0.1
T = float(input('Digite um tempo desejado (100): '))
n = int(input('Digite o numero de passos (10000): '))
t = linspace(0, T, n)
h = deltat = T/n
print(f'A lista dos tempos e: {t}')

for c in range(0, n):
    lista_x.append(x)
    lista_y.append(y)
    lista_z.append(z)
    k1x = h*(s*(y - x))      # Constantes para dx/dt = f(t, x)
    k2x = h*(s*(y - (x + k1x/2)))
    k3x = h*(s*(y - (x + k2x/2)))
    k4x = h*(s*(y - (x + k3x)))

    k1y = h*(x*(r - z) - y) # Constantes para dy/dt = f(t, y)
    k2y = h*(x*(r - z) - (y + k1y/2))
    k3y = h*(x*(r - z) - (y + k2y/2))
    k4y = h*(x*(r - z) - (y + k3y))

    k1z = h*(x*y - b*z)     # Constantes para dz/dt = f(t, z)
    k2z = h*(x*y - b*(z + k1z/2))
    k3z = h*(x*y - b*(z + k2z/2))
    k4z = h*(x*y - b*(z + k3z))

    x = x + (1/6)*(k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x)
    y = y + (1/6)*(k1y + 2*k2y + 2*k3y + k4y)
    z = z + (1/6)*(k1z + 2*k2z + 2*k3z + k4z)

fig = plt.figure(1)
ax = fig.gca(projection='3d')
x, y, z = axes3d.get_test_data(0.10)
ax.set_xlim(-20, 25)

```

```

ax.set_ylim(-30, 30)
ax.set_zlim(0, 60)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
rect = fig.patch
rect.set_facecolor('#31312e')
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
plot(lista_x, lista_y, lista_z)
title('Borboleta de Lorenz')
xlabel('Eixo X')
ylabel('Eixo y')
ax.set_zlabel('Eixo Z')
plt.show()

```

A.3 Código referente à figura 6

```

# Programa para calcular a temperatura de uma barra
com conducao de calor em modo transiente com fonte
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import*
import numpy as np
nx = 101          # Numero de nos
L = 1.0          # Comprimento da barra
q = 1.0          # Fonte da calor
k = 1.2e-4       # Difusividade termica do material
dx = L/(nx - 1)  # Distancia entre os nos
dt = dx**2/(2*k) # Valor maximo de deltat

T = np.zeros((nx, 1), dtype='float')
n = 1200
X = linspace(0, L, nx)
h = k*dt/dx**2
# -----
# Condicoes de contorno
T[0] = 0        # Temperatura do primeiro no
T[nx-1] = 0    # Temperatura do ultimo no
# -----

```

```

for c in range(1, n):
    for i in range(1, nx-1):
        T[i] = h*(T[i-1] + T[i+1]) + (1-2*h)*T[i] + dt*q

plt.rcParams.update({'font.size': 12}) # Esse comando altera
o tamanho da fonte dos eixos e legenda
title(f't = {n*dt}s', fontsize=10)
xlabel('Distancia entre os nos [m]')
ylabel('Temperatura [K]')
plt.ylim(0, 770)
plot(X, T, 'k')
plt.show()

```

A.4 Código referente às figuras de 7 a 16

```

from pylab import*
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm

# =====
# Metodo explicito: Solucao numerica 1D
# =====

# ===== Equacao da onda 1D =====
#  $d^2u/dt^2 = c^2*d^2u/dx^2$ 

# ===== Dados iniciais =====
nx = 101          # Numero de nos em x
Lx = 1           # Distancia entre os extremos de x
onde fixa-se a onda
c = 1            # Velocidade da onda
nt = 0           # Numero de passos no tempo
dx = Lx/(nx - 1) # Distancia entre os nos em x
# dt = dx/c      #  $\Delta t \leq \Delta x/c$ 
dt = 0.001
x = arange(0, Lx+dx, dx) # Coordenadas do eixo x

```

```

CFL = c*dt/dx          # <= 1 Coeficiente de Courant
h = CFL**2

# ===== Dados auxiliares =====
Am = 1                 # Amplitude da onda
N = 1                  # Modos normais de vibracao
k = pi*N/Lx           # Numero de onda
U = np.zeros((nx, nt+2)) # Matriz que tem em cada coluna de
indice nt, todos os valores de x.
w = k*c                # Frequencia angular da onda

# ===== Condicoes de contorno =====
U[0, :] = 0            # Valor de U na extremidade esquerda
para qualquer passo de tempo n
U[nx-1, :] = 0        # Valor de U na extremidade direita
para qualquer passo de tempo n

# ===== Condicoes iniciais n = 0 =====
n = 0 # Passo de tempo inicial
for i in range(1, nx-1):
    U[i, n] = Am*sin(k*i*dx) # U[i, 0] = f(x)
for i in range(1, nx-1):
    U[i, n+1] = (1-h)*U[i, n] + (h/2)*(U[i+1, n] + U[i-1, n])
    # dU[i, t]/dt = 0 para t = 0

# Pontos internos para valores de n maiores ou igual a 1
for n in range(1, nt+1):
    for i in range(1, nx-1):
        U[i, n+1] = 2*(1-h)*U[i, n] + h*(U[i+1, n] + U[i-1, n])
        - U[i, n-1]

plt.rcParams.update({'font.size': 12})
# ===== Construcao do grafico =====
figura = plt.figure(figsize=(4, 4))
plt.title('Solucao numerica')
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('u(x, t) [m]')
plt.plot(x, U[:, nt], 'r*', label='Solucao numerica')

```

```

# =====
#                               Solucao analitica
# =====

# ===== Equacao da onda 1D =====
#  $d^2u/dt^2 = c^2*d^2u/dx^2$ 

# ===== Dados iniciais =====
Lx = 1                # Distancia entre os extremos de x
onde fixa-se a onda
c = 1                # Velocidade da onda
dx = Lx/(nx-1)      # Distancia entre os nos em x
x = arange(0, Lx+dx, dx) # Coordenadas do eixo x

# ===== Construcao do grafico =====
t = nt*dt    # Valor do tempo para o passo n
F = Am*sin(k*x)*cos(w*t)
plt.title(f't = {t}s')
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('u(x, t) [m]')
plt.ylim(-1.1, 1.1)
plt.plot(x, F, 'b-', label='Solucao analitica')
plt.legend(fontsize=10)
plt.show()

```

A.5 Código referente às figuras de 17 a 26

```

from pylab import*
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from numpy.linalg import inv, det, solve

# =====
# Metodo implicito: Solucao numerica 1D
# =====

# ===== Equacao da onda 1D =====

```

```

#  $d^2u/dt^2 = c^2*d^2u/dx^2$ 

# ===== Dados =====
nx = 101          # Numero de nos em x
Lx = 1           # Distancia entre os extremos
de x onde fixa-se a onda
c = 1            # Velocidade da onda
nt = 0           # Numero de passos no tempo
dx = Lx/(nx - 1) # Distancia entre os nos em x
dt = 0.001       # Deltat
x = arange(0, Lx+dx, dx) # Coordenadas do eixo x
CFL = c*dt/dx    # Coeficiente de Courant
h = CFL**2

A = np.zeros((nx, nx)) # Matriz dos coeficientes
U = np.zeros((nx, 1))  # Vetor solucao no tempo n+1
B = np.zeros((nx, 1))  # Vetor termo independente
no tempo n
C = np.zeros((nx, 1))  # Vetor termo independente
no tempo n-1
C_v = np.zeros((nx, 1)) # Vetor termo independente
no tempo n-1
D = np.zeros((nx, 1))  # Vetor diferenca de 2B com C

# ===== Dados auxiliares =====
Am = 1           # Amplitude da onda
N = 2            # Modos normais de vibracao
k = pi*N/Lx      # Numero de onda
w = k*c          # Frequencia angular da onda

# ===== Condicoes de contorno =====
U[0] = 0         # Valor de U na extremidade
esquerda para qualquer tempo n
U[nx-1] = 0     # Valor de U na extremidade
direita para qualquer tempo n

# ===== Condicoes iniciais: n = 0 =====
# Determinando U[i, 0]
for i in range(1, nx-1):
    U[i] = Am*sin(k*i*dx) # U[i, 0] = f(x)

```

```

C = 2*U                # U[i, 0] no instante n = 0
C_v = U                # Vetor para guardar U[i, 0]
# Determinando A
for i in range(1, nx-1):
    A[0, 0] = 1
    A[i, i-1] = - h
    A[i, i+1] = - h
    A[i, i] = (2 + 2*h) # Esse termo muda para valores
                        # de n maiores ou igual a 1
    A[nx-1, nx-1] = 1

# =====
#                 Metodo de Thomas: para n = 0
# =====
# usando a condição dU[i, 0]/dt = 0
# Solução do sistema linear: A*U[i, n+1] = 2*U[i, n]
# =====

# Calculando os novos valores dos elementos de A e C.
Obs: i = 1, 2, 3, ... , nx-1
for i in range(1, nx): # Nao entra o A[0, 0]
    A[i, i] = A[i, i] - (A[i, i-1]/A[i-1, i-1])*A[i-1, i]
    C[i] = C[i] - (A[i, i-1]/A[i-1, i-1])*C[i-1]

# Calculando os valores dos elementos do vetor U
# começando pelo ultimo elemento.
Obs: i é decrescente
U[nx-1] = C[nx-1]/A[nx-1, nx-1]
for i in range(nx-2, -1, -1):
    U[i] = (C[i] - A[i, i+1]*U[i+1])/A[i, i]

B = 2*U                # B assume o valor de 2*U[i, 1]
D = B - C_v            # D assume o papel de termo independente

# =====
#                 Metodo de Thomas: para n > 0
# =====
# Solucao do sistema linear: A*U[i, n+1] = 2*U[i, n]-U[i, n-1]
# Solucao do sistema linear: A*U[i, n+1] = D

```

```

# =====

# Refazendo o A !!!
A[:, :] = 0
for i in range(1, nx-1):
    A[0, 0] = 1
    A[i, i-1] = - h
    A[i, i+1] = - h
    A[i, i] = (1+2*h) # Esse termo mudou para valores de n
    maiores ou igual a 1
    A[nx-1, nx-1] = 1

for n in range(1, nt+1):
    # Calculando os novos valores dos elementos de A e D.
    Obs: i = 1, 2, 3, ... , nx-1
    for i in range(1, nx): # Não entra o A[0, 0]
        A[i, i] = A[i, i] - (A[i, i-1]/A[i-1, i-1])*A[i-1, i]
        D[i] = D[i] - (A[i, i-1]/A[i-1, i-1])*D[i-1]

    # Calculando os valores dos elementos do vetor U
    começando pelo ultimo elemento.
    Obs: i é decrescente
    U[nx-1] = D[nx-1]/A[nx-1, nx-1]
    for i in range(nx-2, -1, -1):
        U[i] = (D[i] - A[i, i+1]*U[i+1])/A[i, i]

    U[0] = 0
    U[nx-1] = 0
    C_v = 0.5*B
    B = 2*U
    D = B - C_v
    # Refazendo o A para n > 0
    A[:, :] = 0
    for i in range(1, nx-1):
        A[0, 0] = 1
        A[i, i-1] = - h
        A[i, i+1] = - h
        A[i, i] = (1+2*h)
        A[nx-1, nx-1] = 1

```

```

plt.rcParams.update({'font.size': 12})
# ===== Construcao do grafico =====
figura = plt.figure(figsize=(4, 4))
plt.title('Solucao numerica')
plt.xlabel('Distancia [m]')
plt.ylabel('U [m]')
plt.ylim(-1.1, 1.1)
plt.plot(x, U, 'r*', label='Solucao numerica')

# =====
#                               Solucao analitica
# =====

# === Equacao da onda 1D ===
#  $d^2u/dt^2 = c^2*d^2u/dx^2$ 

# ===== Dados iniciais =====
Lx = 1                # Distancia entre os extremos
de x onde fixa-se a onda
c = 1                # Velocidade da onda
dx = Lx/(nx-1)      # Distancia entre os nos em x
x = arange(0, Lx+dx, dx) # Coordenadas do eixo x

# ===== Construcao do grafico =====
t = nt*dt          # Valor do tempo para o passo n no tempo
F = Am*sin(k*x)*cos(w*t)
plt.title(f't = {nt*dt}s')
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('u(x, t) [m]')
plt.ylim(-1.1, 1.1)
plt.plot(x, F, 'b-', label='Solucao analitica')
plt.legend(fontsize=10)
plt.show()

```

A.6 Código referente à equação da onda 2D discretizada

```

nx = 51                # Numero de nos em x
ny = 51                # Numero de nos em y
Lx = 1                 # Distancia entre os extremos de x
Ly = 1                 # Distancia entre os extremos de y
dx = Lx/(nx - 1)      # Distancia entre os nos em x
dy = Ly/(ny - 1)      # Distancia entre os nos em y
x = arange(0, Lx+dx, dx) # Coordenadas do eixo x
y = arange(0, Ly+dy, dy) # Coordenadas do eixo y
x, y = np.meshgrid(x, y) # Malha no plano xy
c = 0.5                # Velocidade da onda
nt = 300               # Numero de iteracoes de tempo

# ===== Dados auxiliares =====
Am = 1                 # Amplitude da onda
m, n = 1, 1           # Modos normais de vibracao
C = np.zeros((nx, ny)) # Matriz solucao no instante n-1
B = np.zeros((nx, ny)) # Matriz solucao no instante n
U = np.zeros((nx, ny)) # Matriz solucao no instante n+1

# ===== Condicao de estabilidade =====
# deltat<= sqrt((deltax*deltay)**2/(c**2*(deltax**2+deltay**2)))
dt = sqrt((dx*dy)**2/(c**2*(dx**2 + dy**2)))
dt = float(input(f'Digite um valor de dt menor que {dt} '))

# ===== Variaveis auxiliares =====
L1 = (c**2)*(dt**2)/dx**2 # Lambda_1
L2 = (c**2)*(dt**2)/dy**2 # Lambda_2

# ===== Condicoes de Contorno =====
U[[0, -1], :] = 0 # Os elementos da primeira e ultima linhas
sao nulos
U[:, [0, -1]] = 0 # Os elementos da primeira e ultima colunas
sao nulos

# ===== Condicoes iniciais n = 0 =====
# u(x, y, 0) = Am*sin(m*pi*x/Lx)*sin(n*pi*y/Ly)
for i in range(1, nx-1):

```

```

    for j in range(1, ny-1):
        U[i, j] = Am*sin(m*pi*i*dx/Lx)*sin(n*pi*j*dy/Ly)
C = U          # C assume valores de U para n = 0

# du/dt(x, y, 0) = 0
for i in range(1, nx-1):
    for j in range(1, ny-1):
        U[i, j] = (1 - L1 - L2)*U[i, j] + L1/2*(U[i-1, j]
        + U[i+1, j]) + L2/2*(U[i, j-1]
        + U[i, j+1])
B = U          # B assume valores de U para n = 1

# ===== Determinando a matriz U para n = 1, 2, 3, ..., nt =====
for k in range(1, nt+1):
    for i in range(1, nx-1):
        for j in range(1, ny-1):
            U[i, j] = 2*(1 - L1 - L2)*B[i, j] + L1/2*(B[i-1, j]
            + B[i+1, j]) + L2/2*(B[i, j-1]
            + B[i, j+1]) - C[i, j]
        C = B
        B = U

# Grafico em 3D
# ===== Construcao do grafico =====
plt.rcParams.update({'font.size': 12})
fig = plt.figure() # Cria a figura
ax = fig.gca(projection='3d') # Cria a grade
superficie = ax.plot_surface(x, y, U, rstride=1, cstride=1,
linewidth=0, cmap="rainbow")
rect = fig.patch
# title('Solucao numerica da equacao de onda')
ax.set_xlabel('x [m]')
ax.set_ylabel('y [m]')
ax.set_zlabel('U [m]')
ax.set_zlim(-1.1, 1.1)
cbar = fig.colorbar(superficie, shrink=0.7, aspect=7)
plt.show()

```

```

# =====
#                               Solucao analitica
# =====
#  $U(x, y; t) = A_m \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \cos(W_{mn}t + \phi)$ 
#  $d^2u/dt^2 = c^2(d^2u/dx^2 + d^2u/dy^2)$ 
# ===== Dados iniciais =====
# nx = 101                # Numero de nos em x
# ny = 101                # Numero de nos em y
# Lx = 1                  # Distancia entre os extremos de x
# Ly = 1                  # Distancia entre os extremos de y
# dx = Lx/(nx - 1)       # Distancia entre os nos em x
# dy = Ly/(ny - 1)       # Distancia entre os nos em y
# x = arange(0, Lx+dx, dx) # Coordenadas do eixo x
# y = arange(0, Ly+dy, dy) # Coordenadas do eixo y
# x, y = np.meshgrid(x, y) # Malha no plano xy
# c = 1                   # Velocidade da onda
# nt = 1                  # Numero de iteracoes de tempo
# Am = 1                  # Amplitude da onda
# m, n = 1, 1             # Modos normais de vibracao
W = pi*c*sqrt((m/Lx)**2 + (n/Ly)**2) # Frequencia angular
# ===== Construcao do grafico 3D =====
t = nt*dt                # Valor do tempo para o passo n
F = Am*sin(m*pi*x/Lx)*sin(n*pi*y/Ly)*cos(W*t)
fig = plt.figure()      # Cria a figura
ax = fig.gca(projection='3d') # Cria a grade
superficie = ax.plot_surface(x, y, F, rstride=1, cstride=1,
linewidth=0, cmap="rainbow")
rect = fig.patch
# title('Analitica')
ax.set_xlabel('x [m]')
ax.set_ylabel('y [m]')
ax.set_zlabel('U [m]')
ax.set_zlim(-1.1, 1.1)
cbar = fig.colorbar(superficie, shrink=0.7, aspect=7)
plt.show()
print(f'o valor de deltat e {dt}')
print(f'o valor de t e {nt*dt}')
print(f'o valor de dx e {dx}')

===== Tabelas =====

```

Tabela 1 - Comparação das soluções analíticas e numéricas: explícito modo1

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000
1	0.031	0.031	0.022	0.022	0.000	0.000	-0.022	-0.022	-0.031	-0.031
2	0.063	0.063	0.044	0.044	0.000	0.000	-0.044	-0.044	-0.063	-0.063
3	0.094	0.094	0.067	0.067	0.000	0.000	-0.067	-0.067	-0.094	-0.094
4	0.125	0.125	0.089	0.089	0.000	0.000	-0.089	-0.089	-0.125	-0.125
5	0.156	0.156	0.111	0.111	0.000	0.000	-0.111	-0.111	-0.156	-0.156
6	0.187	0.187	0.133	0.132	0.000	0.000	-0.132	-0.132	-0.187	-0.187
7	0.218	0.218	0.154	0.154	0.000	0.000	-0.154	-0.154	-0.218	-0.218
8	0.249	0.249	0.176	0.176	0.000	0.000	-0.176	-0.176	-0.249	-0.249
9	0.279	0.279	0.197	0.197	0.000	0.000	-0.197	-0.197	-0.279	-0.279
10	0.309	0.309	0.219	0.219	0.000	0.000	-0.218	-0.219	-0.309	-0.309
11	0.339	0.339	0.240	0.240	0.000	0.000	-0.240	-0.240	-0.339	-0.339
12	0.368	0.368	0.260	0.260	0.000	0.000	-0.260	-0.260	-0.368	-0.368
13	0.397	0.397	0.281	0.281	0.000	0.000	-0.281	-0.281	-0.397	-0.397
14	0.426	0.426	0.301	0.301	0.000	0.000	-0.301	-0.301	-0.426	-0.426
15	0.454	0.454	0.321	0.321	0.000	0.000	-0.321	-0.321	-0.454	-0.454
16	0.482	0.482	0.341	0.341	0.000	0.000	-0.341	-0.341	-0.482	-0.482
17	0.509	0.509	0.360	0.360	0.000	0.000	-0.360	-0.360	-0.509	-0.509
18	0.536	0.536	0.379	0.379	0.000	0.000	-0.379	-0.379	-0.536	-0.536
19	0.562	0.562	0.397	0.397	0.000	0.000	-0.397	-0.397	-0.562	-0.562
20	0.588	0.588	0.416	0.416	0.000	0.000	-0.416	-0.416	-0.588	-0.588
21	0.613	0.613	0.433	0.433	0.000	0.000	-0.433	-0.433	-0.613	-0.613
22	0.637	0.637	0.451	0.451	0.000	0.000	-0.451	-0.451	-0.637	-0.637
23	0.661	0.661	0.468	0.468	0.000	0.000	-0.468	-0.468	-0.661	-0.661
24	0.685	0.685	0.484	0.484	0.000	0.000	-0.484	-0.484	-0.685	-0.685
25	0.707	0.707	0.500	0.500	0.000	0.000	-0.500	-0.500	-0.707	-0.707
26	0.729	0.729	0.515	0.515	0.000	0.000	-0.515	-0.515	-0.729	-0.729
27	0.750	0.750	0.530	0.530	0.000	0.000	-0.530	-0.530	-0.750	-0.750
28	0.771	0.771	0.545	0.545	0.000	0.000	-0.545	-0.545	-0.771	-0.771
29	0.790	0.790	0.559	0.559	0.000	0.000	-0.559	-0.559	-0.790	-0.790
30	0.809	0.809	0.572	0.572	0.000	0.000	-0.572	-0.572	-0.809	-0.809
31	0.827	0.827	0.585	0.585	0.000	0.000	-0.585	-0.585	-0.827	-0.827
32	0.844	0.844	0.597	0.597	0.000	0.000	-0.597	-0.597	-0.844	-0.844
33	0.861	0.861	0.609	0.609	0.000	0.000	-0.609	-0.609	-0.861	-0.861
34	0.876	0.876	0.620	0.620	0.000	0.000	-0.620	-0.620	-0.876	-0.876
35	0.891	0.891	0.630	0.630	0.000	0.000	-0.630	-0.630	-0.891	-0.891

Continuação da tabela 1

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
36	0.905	0.905	0.640	0.640	0.000	0.000	-0.640	-0.640	-0.905	-0.905
37	0.918	0.918	0.649	0.649	0.000	0.000	-0.649	-0.649	-0.918	-0.918
38	0.930	0.930	0.657	0.657	0.000	0.000	-0.657	-0.657	-0.930	-0.930
39	0.941	0.941	0.665	0.665	0.000	0.000	-0.665	-0.665	-0.941	-0.941
40	0.951	0.951	0.673	0.672	0.000	0.000	-0.672	-0.672	-0.951	-0.951
41	0.960	0.960	0.679	0.679	0.000	0.000	-0.679	-0.679	-0.960	-0.960
42	0.969	0.969	0.685	0.685	0.000	0.000	-0.685	-0.685	-0.969	-0.969
43	0.976	0.976	0.690	0.690	0.000	0.000	-0.690	-0.690	-0.976	-0.976
44	0.982	0.982	0.695	0.695	0.000	0.000	-0.695	-0.695	-0.982	-0.982
45	0.988	0.988	0.698	0.698	0.000	0.000	-0.698	-0.698	-0.988	-0.988
46	0.992	0.992	0.702	0.702	0.000	0.000	-0.701	-0.702	-0.992	-0.992
47	0.996	0.996	0.704	0.704	0.000	0.000	-0.704	-0.704	-0.996	-0.996
48	0.998	0.998	0.706	0.706	0.000	0.000	-0.706	-0.706	-0.998	-0.998
49	1.000	1.000	0.707	0.707	0.000	0.000	-0.707	-0.707	-1.000	-1.000
50	1.000	1.000	0.707	0.707	0.000	0.000	-0.707	-0.707	-1.000	-1.000
51	1.000	1.000	0.707	0.707	0.000	0.000	-0.707	-0.707	-1.000	-1.000
52	0.998	0.998	0.706	0.706	0.000	0.000	-0.706	-0.706	-0.998	-0.998
53	0.996	0.996	0.704	0.704	0.000	0.000	-0.704	-0.704	-0.996	-0.996
54	0.992	0.992	0.702	0.702	0.000	0.000	-0.701	-0.702	-0.992	-0.992
55	0.988	0.988	0.698	0.698	0.000	0.000	-0.698	-0.698	-0.988	-0.988
56	0.982	0.982	0.695	0.695	0.000	0.000	-0.695	-0.695	-0.982	-0.982
57	0.976	0.976	0.690	0.690	0.000	0.000	-0.690	-0.690	-0.976	-0.976
58	0.969	0.969	0.685	0.685	0.000	0.000	-0.685	-0.685	-0.969	-0.969
59	0.960	0.960	0.679	0.679	0.000	0.000	-0.679	-0.679	-0.960	-0.960
60	0.951	0.951	0.673	0.672	0.000	0.000	-0.672	-0.672	-0.951	-0.951
61	0.941	0.941	0.665	0.665	0.000	0.000	-0.665	-0.665	-0.941	-0.941
62	0.930	0.930	0.657	0.657	0.000	0.000	-0.657	-0.657	-0.930	-0.930
63	0.918	0.918	0.649	0.649	0.000	0.000	-0.649	-0.649	-0.918	-0.918
64	0.905	0.905	0.640	0.640	0.000	0.000	-0.640	-0.640	-0.905	-0.905
65	0.891	0.891	0.630	0.630	0.000	0.000	-0.630	-0.630	-0.891	-0.891
66	0.876	0.876	0.620	0.620	0.000	0.000	-0.620	-0.620	-0.876	-0.876
67	0.861	0.861	0.609	0.609	0.000	0.000	-0.609	-0.609	-0.861	-0.861
68	0.844	0.844	0.597	0.597	0.000	0.000	-0.597	-0.597	-0.844	-0.844
69	0.827	0.827	0.585	0.585	0.000	0.000	-0.585	-0.585	-0.827	-0.827
70	0.809	0.809	0.572	0.572	0.000	0.000	-0.572	-0.572	-0.809	-0.809

Continuação da tabela 1

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
71	0.790	0.790	0.559	0.559	0.000	0.000	-0.559	-0.559	-0.790	-0.790
72	0.771	0.771	0.545	0.545	0.000	0.000	-0.545	-0.545	-0.771	-0.771
73	0.750	0.750	0.530	0.530	0.000	0.000	-0.530	-0.530	-0.750	-0.750
74	0.729	0.729	0.515	0.515	0.000	0.000	-0.515	-0.515	-0.729	-0.729
75	0.707	0.707	0.500	0.500	0.000	0.000	-0.500	-0.500	-0.707	-0.707
76	0.685	0.685	0.484	0.484	0.000	0.000	-0.484	-0.484	-0.685	-0.685
77	0.661	0.661	0.468	0.468	0.000	0.000	-0.468	-0.468	-0.661	-0.661
78	0.637	0.637	0.451	0.451	0.000	0.000	-0.451	-0.451	-0.637	-0.637
79	0.613	0.613	0.433	0.433	0.000	0.000	-0.433	-0.433	-0.613	-0.613
80	0.588	0.588	0.416	0.416	0.000	0.000	-0.416	-0.416	-0.588	-0.588
81	0.562	0.562	0.397	0.397	0.000	0.000	-0.397	-0.397	-0.562	-0.562
82	0.536	0.536	0.379	0.379	0.000	0.000	-0.379	-0.379	-0.536	-0.536
83	0.509	0.509	0.360	0.360	0.000	0.000	-0.360	-0.360	-0.509	-0.509
84	0.482	0.482	0.341	0.341	0.000	0.000	-0.341	-0.341	-0.482	-0.482
85	0.454	0.454	0.321	0.321	0.000	0.000	-0.321	-0.321	-0.454	-0.454
86	0.426	0.426	0.301	0.301	0.000	0.000	-0.301	-0.301	-0.426	-0.426
87	0.397	0.397	0.281	0.281	0.000	0.000	-0.281	-0.281	-0.397	-0.397
88	0.368	0.368	0.260	0.260	0.000	0.000	-0.260	-0.260	-0.368	-0.368
89	0.339	0.339	0.240	0.240	0.000	0.000	-0.240	-0.240	-0.339	-0.339
90	0.309	0.309	0.219	0.219	0.000	0.000	-0.218	-0.219	-0.309	-0.309
91	0.279	0.279	0.197	0.197	0.000	0.000	-0.197	-0.197	-0.279	-0.279
92	0.249	0.249	0.176	0.176	0.000	0.000	-0.176	-0.176	-0.249	-0.249
93	0.218	0.218	0.154	0.154	0.000	0.000	-0.154	-0.154	-0.218	-0.218
94	0.187	0.187	0.133	0.132	0.000	0.000	-0.132	-0.132	-0.187	-0.187
95	0.156	0.156	0.111	0.111	0.000	0.000	-0.111	-0.111	-0.156	-0.156
96	0.125	0.125	0.089	0.089	0.000	0.000	-0.089	-0.089	-0.125	-0.125
97	0.094	0.094	0.067	0.067	0.000	0.000	-0.067	-0.067	-0.094	-0.094
98	0.063	0.063	0.044	0.044	0.000	0.000	-0.044	-0.044	-0.063	-0.063
99	0.031	0.031	0.022	0.022	0.000	0.000	-0.022	-0.022	-0.031	-0.031
100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000

Legenda: Comparação dos valores analíticos e numéricos

Fonte: O autor, 2022.

Tabela 2 - Comparação das soluções analíticas e numéricas: explícito modo2

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
1	0.063	0.063	0.000	0.000	-0.063	-0.063	0.000	-0.000	0.063	0.063
2	0.125	0.125	0.000	0.000	-0.125	-0.125	0.000	-0.000	0.125	0.125
3	0.187	0.187	0.000	0.000	-0.187	-0.187	0.000	-0.000	0.187	0.187
4	0.249	0.249	0.000	0.000	-0.249	-0.249	0.000	-0.000	0.249	0.249
5	0.309	0.309	0.000	0.000	-0.309	-0.309	0.000	-0.000	0.309	0.309
6	0.368	0.368	0.000	0.000	-0.368	-0.368	0.000	-0.000	0.368	0.368
7	0.426	0.426	0.000	0.000	-0.426	-0.426	0.000	-0.000	0.426	0.426
8	0.482	0.482	0.000	0.000	-0.482	-0.482	0.000	-0.000	0.482	0.482
9	0.536	0.536	0.000	0.000	-0.536	-0.536	0.000	-0.000	0.536	0.536
10	0.588	0.588	0.000	0.000	-0.588	-0.588	0.000	-0.000	0.588	0.588
11	0.637	0.637	0.000	0.000	-0.637	-0.637	0.000	-0.000	0.637	0.637
12	0.685	0.685	0.000	0.000	-0.685	-0.685	0.000	-0.000	0.685	0.685
13	0.729	0.729	0.000	0.000	-0.729	-0.729	0.000	-0.000	0.729	0.729
14	0.771	0.771	0.000	0.000	-0.771	-0.771	0.000	-0.000	0.771	0.771
15	0.809	0.809	0.000	0.000	-0.809	-0.809	0.000	-0.000	0.809	0.809
16	0.844	0.844	0.000	0.000	-0.844	-0.844	0.000	-0.000	0.844	0.844
17	0.876	0.876	0.000	0.000	-0.876	-0.876	0.000	-0.000	0.876	0.876
18	0.905	0.905	0.000	0.000	-0.905	-0.905	0.000	-0.000	0.905	0.905
19	0.930	0.930	0.000	0.000	-0.930	-0.930	0.000	-0.000	0.930	0.930
20	0.951	0.951	0.000	0.000	-0.951	-0.951	0.000	-0.000	0.951	0.951
21	0.969	0.969	0.000	0.000	-0.969	-0.969	0.000	-0.000	0.969	0.969
22	0.982	0.982	0.000	0.000	-0.982	-0.982	0.000	-0.000	0.982	0.982
23	0.992	0.992	0.000	0.000	-0.992	-0.992	0.000	-0.000	0.992	0.992
24	0.998	0.998	0.000	0.000	-0.998	-0.998	0.000	-0.000	0.998	0.998
25	1.000	1.000	0.000	0.000	-1.000	-1.000	0.000	-0.000	1.000	1.000
26	0.998	0.998	0.000	0.000	-0.998	-0.998	0.000	-0.000	0.998	0.998
27	0.992	0.992	0.000	0.000	-0.992	-0.992	0.000	-0.000	0.992	0.992
28	0.982	0.982	0.000	0.000	-0.982	-0.982	0.000	-0.000	0.982	0.982
29	0.969	0.969	0.000	0.000	-0.969	-0.969	0.000	-0.000	0.969	0.969
30	0.951	0.951	0.000	0.000	-0.951	-0.951	0.000	-0.000	0.951	0.951
31	0.930	0.930	0.000	0.000	-0.930	-0.930	0.000	-0.000	0.930	0.930
32	0.905	0.905	0.000	0.000	-0.905	-0.905	0.000	-0.000	0.905	0.905
33	0.876	0.876	0.000	0.000	-0.876	-0.876	0.000	-0.000	0.876	0.876
34	0.844	0.844	0.000	0.000	-0.844	-0.844	0.000	-0.000	0.844	0.844
35	0.809	0.809	0.000	0.000	-0.809	-0.809	0.000	-0.000	0.809	0.809

Continuação da tabela 2

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
36	0.771	0.771	0.000	0.000	-0.771	-0.771	0.000	-0.000	0.771	0.771
37	0.729	0.729	0.000	0.000	-0.729	-0.729	0.000	-0.000	0.729	0.729
38	0.685	0.685	0.000	0.000	-0.685	-0.685	0.000	-0.000	0.685	0.685
39	0.637	0.637	0.000	0.000	-0.637	-0.637	0.000	-0.000	0.637	0.637
40	0.588	0.588	0.000	0.000	-0.588	-0.588	0.000	-0.000	0.588	0.588
41	0.536	0.536	0.000	0.000	-0.536	-0.536	0.000	-0.000	0.536	0.536
42	0.482	0.482	0.000	0.000	-0.482	-0.482	0.000	-0.000	0.482	0.482
43	0.426	0.426	0.000	0.000	-0.426	-0.426	0.000	-0.000	0.426	0.426
44	0.368	0.368	0.000	0.000	-0.368	-0.368	0.000	-0.000	0.368	0.368
45	0.309	0.309	0.000	0.000	-0.309	-0.309	0.000	-0.000	0.309	0.309
46	0.249	0.249	0.000	0.000	-0.249	-0.249	0.000	-0.000	0.249	0.249
47	0.187	0.187	0.000	0.000	-0.187	-0.187	0.000	-0.000	0.187	0.187
48	0.125	0.125	0.000	0.000	-0.125	-0.125	0.000	-0.000	0.125	0.125
49	0.063	0.063	0.000	0.000	-0.063	-0.063	0.000	-0.000	0.063	0.063
50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
51	-0.063	-0.063	0.000	0.000	0.063	0.063	0.000	-0.000	-0.063	-0.063
52	-0.125	-0.125	0.000	0.000	0.125	0.125	0.000	-0.000	-0.125	-0.125
53	-0.187	-0.187	0.000	0.000	0.187	0.187	0.000	-0.000	-0.187	-0.187
54	-0.249	-0.249	0.000	0.000	0.249	0.249	0.000	-0.000	-0.249	-0.249
55	-0.309	-0.309	0.000	0.000	0.309	0.309	0.000	-0.000	-0.309	-0.309
56	-0.368	-0.368	0.000	0.000	0.368	0.368	0.000	-0.000	-0.368	-0.368
57	-0.426	-0.426	0.000	0.000	0.426	0.426	0.000	-0.000	-0.426	-0.426
58	-0.482	-0.482	0.000	0.000	0.482	0.482	0.000	-0.000	-0.482	-0.482
59	-0.536	-0.536	0.000	0.000	0.536	0.536	0.000	-0.000	-0.536	-0.536
60	-0.588	-0.588	0.000	0.000	0.588	0.588	0.000	-0.000	-0.588	-0.588
61	-0.637	-0.637	0.000	0.000	0.637	0.637	0.000	-0.000	-0.637	-0.637
62	-0.685	-0.685	0.000	0.000	0.685	0.685	0.000	-0.000	-0.685	-0.685
63	-0.729	-0.729	0.000	0.000	0.729	0.729	0.000	-0.000	-0.729	-0.729
64	-0.771	-0.771	0.000	0.000	0.771	0.771	0.000	-0.000	-0.771	-0.771
65	-0.809	-0.809	0.000	0.000	0.809	0.809	0.000	-0.000	-0.809	-0.809
66	-0.844	-0.844	0.000	0.000	0.844	0.844	0.000	-0.000	-0.844	-0.844
67	-0.876	-0.876	0.000	0.000	0.876	0.876	0.000	-0.000	-0.876	-0.876
68	-0.905	-0.905	0.000	0.000	0.905	0.905	0.000	-0.000	-0.905	-0.905
69	-0.930	-0.930	0.000	0.000	0.930	0.930	0.000	-0.000	-0.930	-0.930
70	-0.951	-0.951	0.000	0.000	0.951	0.951	0.000	-0.000	-0.951	-0.951

Continuação da tabela 2

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
71	-0.969	-0.969	0.000	0.000	0.969	0.969	0.000	-0.000	-0.969	-0.969
72	-0.982	-0.982	0.000	0.000	0.982	0.982	0.000	-0.000	-0.982	-0.982
73	-0.992	-0.992	0.000	0.000	0.992	0.992	0.000	-0.000	-0.992	-0.992
74	-0.998	-0.998	0.000	0.000	0.998	0.998	0.000	-0.000	-0.998	-0.998
75	-1.000	-1.000	0.000	0.000	1.000	1.000	0.000	-0.000	-1.000	-1.000
76	-0.998	-0.998	0.000	0.000	0.998	0.998	0.000	-0.000	-0.998	-0.998
77	-0.992	-0.992	0.000	0.000	0.992	0.992	0.000	-0.000	-0.992	-0.992
78	-0.982	-0.982	0.000	0.000	0.982	0.982	0.000	-0.000	-0.982	-0.982
79	-0.969	-0.969	0.000	0.000	0.969	0.969	0.000	-0.000	-0.969	-0.969
80	-0.951	-0.951	0.000	0.000	0.951	0.951	0.000	-0.000	-0.951	-0.951
81	-0.930	-0.930	0.000	0.000	0.930	0.930	0.000	-0.000	-0.930	-0.930
82	-0.905	-0.905	0.000	0.000	0.905	0.905	0.000	-0.000	-0.905	-0.905
83	-0.876	-0.876	0.000	0.000	0.876	0.876	0.000	-0.000	-0.876	-0.876
84	-0.844	-0.844	0.000	0.000	0.844	0.844	0.000	-0.000	-0.844	-0.844
85	-0.809	-0.809	0.000	0.000	0.809	0.809	0.000	-0.000	-0.809	-0.809
86	-0.771	-0.771	0.000	0.000	0.771	0.771	0.000	-0.000	-0.771	-0.771
87	-0.729	-0.729	0.000	0.000	0.729	0.729	0.000	-0.000	-0.729	-0.729
88	-0.685	-0.685	0.000	0.000	0.685	0.685	0.000	-0.000	-0.685	-0.685
89	-0.637	-0.637	0.000	0.000	0.637	0.637	0.000	-0.000	-0.637	-0.637
90	-0.588	-0.588	0.000	0.000	0.588	0.588	0.000	-0.000	-0.588	-0.588
91	-0.536	-0.536	0.000	0.000	0.536	0.536	0.000	-0.000	-0.536	-0.536
92	-0.482	-0.482	0.000	0.000	0.482	0.482	0.000	-0.000	-0.482	-0.482
93	-0.426	-0.426	0.000	0.000	0.426	0.426	0.000	-0.000	-0.426	-0.426
94	-0.368	-0.368	0.000	0.000	0.368	0.368	0.000	-0.000	-0.368	-0.368
95	-0.309	-0.309	0.000	0.000	0.309	0.309	0.000	-0.000	-0.309	-0.309
96	-0.249	-0.249	0.000	0.000	0.249	0.249	0.000	-0.000	-0.249	-0.249
97	-0.187	-0.187	0.000	0.000	0.187	0.187	0.000	-0.000	-0.187	-0.187
98	-0.125	-0.125	0.000	0.000	0.125	0.125	0.000	-0.000	-0.125	-0.125
99	-0.063	-0.063	0.000	0.000	0.063	0.063	0.000	-0.000	-0.063	-0.063
100	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000

Legenda: Comparação dos valores analíticos e numéricos

Fonte: O autor, 2022.

Tabela 3 - Comparação das soluções analíticas e numéricas: implícito modo1

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000
1	0.031	0.031	0.022	0.022	0.000	0.000	-0.022	-0.022	-0.031	-0.031
2	0.063	0.063	0.044	0.044	0.000	0.000	-0.044	-0.044	-0.062	-0.063
3	0.094	0.094	0.066	0.067	0.000	0.000	-0.066	-0.067	-0.094	-0.094
4	0.125	0.125	0.089	0.089	0.000	0.000	-0.088	-0.089	-0.125	-0.125
5	0.156	0.156	0.110	0.111	0.000	0.000	-0.110	-0.111	-0.156	-0.156
6	0.187	0.187	0.132	0.132	0.000	0.000	-0.132	-0.132	-0.186	-0.187
7	0.218	0.218	0.154	0.154	0.000	0.000	-0.154	-0.154	-0.217	-0.218
8	0.249	0.249	0.176	0.176	0.000	0.000	-0.175	-0.176	-0.247	-0.249
9	0.279	0.279	0.197	0.197	0.000	0.000	-0.197	-0.197	-0.278	-0.279
10	0.309	0.309	0.218	0.219	0.000	0.000	-0.218	-0.219	-0.307	-0.309
11	0.339	0.339	0.239	0.240	0.000	0.000	-0.239	-0.240	-0.337	-0.339
12	0.368	0.368	0.260	0.260	0.000	0.000	-0.259	-0.260	-0.366	-0.368
13	0.397	0.397	0.280	0.281	0.000	0.000	-0.280	-0.281	-0.395	-0.397
14	0.426	0.426	0.301	0.301	0.000	0.000	-0.300	-0.301	-0.424	-0.426
15	0.454	0.454	0.321	0.321	0.000	0.000	-0.320	-0.321	-0.452	-0.454
16	0.482	0.482	0.340	0.341	0.000	0.000	-0.339	-0.341	-0.479	-0.482
17	0.509	0.509	0.360	0.360	0.000	0.000	-0.359	-0.360	-0.507	-0.509
18	0.536	0.536	0.378	0.379	0.000	0.000	-0.377	-0.379	-0.533	-0.536
19	0.562	0.562	0.397	0.397	0.000	0.000	-0.396	-0.397	-0.559	-0.562
20	0.588	0.588	0.415	0.416	0.000	0.000	-0.414	-0.416	-0.585	-0.588
21	0.613	0.613	0.433	0.433	0.000	0.000	-0.432	-0.433	-0.610	-0.613
22	0.637	0.637	0.450	0.451	0.000	0.000	-0.449	-0.451	-0.634	-0.637
23	0.661	0.661	0.467	0.468	0.000	0.000	-0.466	-0.468	-0.658	-0.661
24	0.685	0.685	0.483	0.484	0.000	0.000	-0.482	-0.484	-0.681	-0.685
25	0.707	0.707	0.499	0.500	0.000	0.000	-0.498	-0.500	-0.704	-0.707
26	0.729	0.729	0.515	0.515	0.000	0.000	-0.513	-0.515	-0.725	-0.729
27	0.750	0.750	0.530	0.530	0.000	0.000	-0.528	-0.530	-0.746	-0.750
28	0.771	0.771	0.544	0.545	0.000	0.000	-0.543	-0.545	-0.767	-0.771
29	0.790	0.790	0.558	0.559	0.000	0.000	-0.557	-0.559	-0.786	-0.790
30	0.809	0.809	0.571	0.572	0.000	0.000	-0.570	-0.572	-0.805	-0.809
31	0.827	0.827	0.584	0.585	0.000	0.000	-0.583	-0.585	-0.823	-0.827
32	0.844	0.844	0.596	0.597	0.000	0.000	-0.595	-0.597	-0.840	-0.844
33	0.861	0.861	0.608	0.609	0.000	0.000	-0.606	-0.609	-0.857	-0.861
34	0.876	0.876	0.619	0.620	0.000	0.000	-0.617	-0.620	-0.872	-0.876
35	0.891	0.891	0.629	0.630	0.000	0.000	-0.628	-0.630	-0.887	-0.891

Continuação da tabela 3

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
36	0.905	0.905	0.639	0.640	0.000	0.000	-0.637	-0.640	-0.900	-0.905
37	0.918	0.918	0.648	0.649	0.000	0.000	-0.646	-0.649	-0.913	-0.918
38	0.930	0.930	0.657	0.657	0.000	0.000	-0.655	-0.657	-0.925	-0.930
39	0.941	0.941	0.665	0.665	0.000	0.000	-0.663	-0.665	-0.936	-0.941
40	0.951	0.951	0.672	0.672	0.000	0.000	-0.670	-0.672	-0.946	-0.951
41	0.960	0.960	0.678	0.679	0.000	0.000	-0.676	-0.679	-0.956	-0.960
42	0.969	0.969	0.684	0.685	0.000	0.000	-0.682	-0.685	-0.964	-0.969
43	0.976	0.976	0.689	0.690	0.000	0.000	-0.687	-0.690	-0.971	-0.976
44	0.982	0.982	0.694	0.695	0.000	0.000	-0.692	-0.695	-0.977	-0.982
45	0.988	0.988	0.698	0.698	0.000	0.000	-0.696	-0.698	-0.983	-0.988
46	0.992	0.992	0.701	0.702	0.000	0.000	-0.699	-0.702	-0.987	-0.992
47	0.996	0.996	0.703	0.704	0.000	0.000	-0.701	-0.704	-0.991	-0.996
48	0.998	0.998	0.705	0.706	0.000	0.000	-0.703	-0.706	-0.993	-0.998
49	1.000	1.000	0.706	0.707	0.000	0.000	-0.704	-0.707	-0.995	-1.000
50	1.000	1.000	0.706	0.707	0.000	0.000	-0.704	-0.707	-0.995	-1.000
51	1.000	1.000	0.706	0.707	0.000	0.000	-0.704	-0.707	-0.995	-1.000
52	0.998	0.998	0.705	0.706	0.000	0.000	-0.703	-0.706	-0.993	-0.998
53	0.996	0.996	0.703	0.704	0.000	0.000	-0.701	-0.704	-0.991	-0.996
54	0.992	0.992	0.701	0.702	0.000	0.000	-0.699	-0.702	-0.987	-0.992
55	0.988	0.988	0.698	0.698	0.000	0.000	-0.696	-0.698	-0.983	-0.988
56	0.982	0.982	0.694	0.695	0.000	0.000	-0.692	-0.695	-0.977	-0.982
57	0.976	0.976	0.689	0.690	0.000	0.000	-0.687	-0.690	-0.971	-0.976
58	0.969	0.969	0.684	0.685	0.000	0.000	-0.682	-0.685	-0.964	-0.969
59	0.960	0.960	0.678	0.679	0.000	0.000	-0.676	-0.679	-0.956	-0.960
60	0.951	0.951	0.672	0.672	0.000	0.000	-0.670	-0.672	-0.946	-0.951
61	0.941	0.941	0.665	0.665	0.000	0.000	-0.663	-0.665	-0.936	-0.941
62	0.930	0.930	0.657	0.657	0.000	0.000	-0.655	-0.657	-0.925	-0.930
63	0.918	0.918	0.648	0.649	0.000	0.000	-0.646	-0.649	-0.913	-0.918
64	0.905	0.905	0.639	0.640	0.000	0.000	-0.637	-0.640	-0.900	-0.905
65	0.891	0.891	0.629	0.630	0.000	0.000	-0.628	-0.630	-0.887	-0.891
66	0.876	0.876	0.619	0.620	0.000	0.000	-0.617	-0.620	-0.872	-0.876
67	0.861	0.861	0.608	0.609	0.000	0.000	-0.606	-0.609	-0.857	-0.861
68	0.844	0.844	0.596	0.597	0.000	0.000	-0.595	-0.597	-0.840	-0.844
69	0.827	0.827	0.584	0.585	0.000	0.000	-0.583	-0.585	-0.823	-0.827
70	0.809	0.809	0.571	0.572	0.000	0.000	-0.570	-0.572	-0.805	-0.809

Continuação da tabela 3

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
71	0.790	0.790	0.558	0.559	0.000	0.000	-0.557	-0.559	-0.786	-0.790
72	0.771	0.771	0.544	0.545	0.000	0.000	-0.543	-0.545	-0.767	-0.771
73	0.750	0.750	0.530	0.530	0.000	0.000	-0.528	-0.530	-0.746	-0.750
74	0.729	0.729	0.515	0.515	0.000	0.000	-0.513	-0.515	-0.725	-0.729
75	0.707	0.707	0.499	0.500	0.000	0.000	-0.498	-0.500	-0.704	-0.707
76	0.685	0.685	0.483	0.484	0.000	0.000	-0.482	-0.484	-0.681	-0.685
77	0.661	0.661	0.467	0.468	0.000	0.000	-0.466	-0.468	-0.658	-0.661
78	0.637	0.637	0.450	0.451	0.000	0.000	-0.449	-0.451	-0.634	-0.637
79	0.613	0.613	0.433	0.433	0.000	0.000	-0.432	-0.433	-0.610	-0.613
80	0.588	0.588	0.415	0.416	0.000	0.000	-0.414	-0.416	-0.585	-0.588
81	0.562	0.562	0.397	0.397	0.000	0.000	-0.396	-0.397	-0.559	-0.562
82	0.536	0.536	0.378	0.379	0.000	0.000	-0.377	-0.379	-0.533	-0.536
83	0.509	0.509	0.360	0.360	0.000	0.000	-0.359	-0.360	-0.507	-0.509
84	0.482	0.482	0.340	0.341	0.000	0.000	-0.339	-0.341	-0.479	-0.482
85	0.454	0.454	0.321	0.321	0.000	0.000	-0.320	-0.321	-0.452	-0.454
86	0.426	0.426	0.301	0.301	0.000	0.000	-0.300	-0.301	-0.424	-0.426
87	0.397	0.397	0.280	0.281	0.000	0.000	-0.280	-0.281	-0.395	-0.397
88	0.368	0.368	0.260	0.260	0.000	0.000	-0.259	-0.260	-0.366	-0.368
89	0.339	0.339	0.239	0.240	0.000	0.000	-0.239	-0.240	-0.337	-0.339
90	0.309	0.309	0.218	0.219	0.000	0.000	-0.218	-0.219	-0.307	-0.309
91	0.279	0.279	0.197	0.197	0.000	0.000	-0.197	-0.197	-0.278	-0.279
92	0.249	0.249	0.176	0.176	0.000	0.000	-0.175	-0.176	-0.247	-0.249
93	0.218	0.218	0.154	0.154	0.000	0.000	-0.154	-0.154	-0.217	-0.218
94	0.187	0.187	0.132	0.132	0.000	0.000	-0.132	-0.132	-0.186	-0.187
95	0.156	0.156	0.110	0.111	0.000	0.000	-0.110	-0.111	-0.156	-0.156
96	0.125	0.125	0.089	0.089	0.000	0.000	-0.088	-0.089	-0.125	-0.125
97	0.094	0.094	0.066	0.067	0.000	0.000	-0.066	-0.067	-0.094	-0.094
98	0.063	0.063	0.044	0.044	0.000	0.000	-0.044	-0.044	-0.062	-0.063
99	0.031	0.031	0.022	0.022	0.000	0.000	-0.022	-0.022	-0.031	-0.031
100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000

Legenda: Comparação dos valores analíticos e numéricos

Fonte: O autor, 2022.

Tabela 4 - Comparação das soluções analíticas e numéricas: implícito modo2

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
1	0.063	0.063	0.000	0.000	-0.062	-0.063	0.000	-0.000	0.062	0.063
2	0.125	0.125	0.000	0.000	-0.124	-0.125	0.000	-0.000	0.123	0.125
3	0.187	0.187	0.000	0.000	-0.186	-0.187	0.000	-0.000	0.184	0.187
4	0.249	0.249	0.000	0.000	-0.246	-0.249	0.000	-0.000	0.244	0.249
5	0.309	0.309	0.000	0.000	-0.306	-0.309	0.000	-0.000	0.303	0.309
6	0.368	0.368	0.000	0.000	-0.365	-0.368	0.000	-0.000	0.361	0.368
7	0.426	0.426	0.000	0.000	-0.422	-0.426	0.000	-0.000	0.417	0.426
8	0.482	0.482	0.000	0.000	-0.477	-0.482	0.000	-0.000	0.472	0.482
9	0.536	0.536	0.000	0.000	-0.531	-0.536	0.000	-0.000	0.525	0.536
10	0.588	0.588	0.000	0.000	-0.582	-0.588	0.000	-0.000	0.576	0.588
11	0.637	0.637	0.000	0.000	-0.631	-0.637	0.000	-0.000	0.625	0.637
12	0.685	0.685	0.000	0.000	-0.678	-0.685	0.000	-0.000	0.671	0.685
13	0.729	0.729	0.000	0.000	-0.722	-0.729	0.000	-0.000	0.715	0.729
14	0.770	0.771	0.000	0.000	-0.763	-0.771	0.000	-0.000	0.755	0.771
15	0.809	0.809	0.000	0.000	-0.801	-0.809	0.000	-0.000	0.793	0.809
16	0.844	0.844	0.000	0.000	-0.836	-0.844	0.000	-0.000	0.828	0.844
17	0.876	0.876	0.000	0.000	-0.868	-0.876	0.000	-0.000	0.859	0.876
18	0.905	0.905	0.000	0.000	-0.896	-0.905	0.000	-0.000	0.887	0.905
19	0.930	0.930	0.000	0.000	-0.921	-0.930	0.000	-0.000	0.912	0.930
20	0.951	0.951	0.000	0.000	-0.942	-0.951	0.000	-0.000	0.932	0.951
21	0.969	0.969	0.000	0.000	-0.959	-0.969	0.000	-0.000	0.950	0.969
22	0.982	0.982	0.000	0.000	-0.973	-0.982	0.000	-0.000	0.963	0.982
23	0.992	0.992	0.000	0.000	-0.982	-0.992	0.000	-0.000	0.973	0.992
24	0.998	0.998	0.000	0.000	-0.988	-0.998	0.000	-0.000	0.979	0.998
25	1.000	1.000	0.000	0.000	-0.990	-1.000	0.000	-0.000	0.980	1.000
26	0.998	0.998	0.000	0.000	-0.988	-0.998	0.000	-0.000	0.979	0.998
27	0.992	0.992	0.000	0.000	-0.982	-0.992	0.000	-0.000	0.973	0.992
28	0.982	0.982	0.000	0.000	-0.973	-0.982	0.000	-0.000	0.963	0.982
29	0.969	0.969	0.000	0.000	-0.959	-0.969	0.000	-0.000	0.950	0.969
30	0.951	0.951	0.000	0.000	-0.942	-0.951	0.000	-0.000	0.932	0.951
31	0.930	0.930	0.000	0.000	-0.921	-0.930	0.000	-0.000	0.912	0.930
32	0.905	0.905	0.000	0.000	-0.896	-0.905	0.000	-0.000	0.887	0.905
33	0.876	0.876	0.000	0.000	-0.868	-0.876	0.000	-0.000	0.859	0.876
34	0.844	0.844	0.000	0.000	-0.836	-0.844	0.000	-0.000	0.828	0.844
35	0.809	0.809	0.000	0.000	-0.801	-0.809	0.000	-0.000	0.793	0.809

Continuação da tabela 4

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
36	0.770	0.771	0.000	0.000	-0.763	-0.771	0.000	-0.000	0.755	0.771
37	0.729	0.729	0.000	0.000	-0.722	-0.729	0.000	-0.000	0.715	0.729
38	0.685	0.685	0.000	0.000	-0.678	-0.685	0.000	-0.000	0.671	0.685
39	0.637	0.637	0.000	0.000	-0.631	-0.637	0.000	-0.000	0.625	0.637
40	0.588	0.588	0.000	0.000	-0.582	-0.588	0.000	-0.000	0.576	0.588
41	0.536	0.536	0.000	0.000	-0.531	-0.536	0.000	-0.000	0.525	0.536
42	0.482	0.482	0.000	0.000	-0.477	-0.482	0.000	-0.000	0.472	0.482
43	0.426	0.426	0.000	0.000	-0.422	-0.426	0.000	-0.000	0.417	0.426
44	0.368	0.368	0.000	0.000	-0.365	-0.368	0.000	-0.000	0.361	0.368
45	0.309	0.309	0.000	0.000	-0.306	-0.309	0.000	-0.000	0.303	0.309
46	0.249	0.249	0.000	0.000	-0.246	-0.249	0.000	-0.000	0.244	0.249
47	0.187	0.187	0.000	0.000	-0.186	-0.187	0.000	-0.000	0.184	0.187
48	0.125	0.125	0.000	0.000	-0.124	-0.125	0.000	-0.000	0.123	0.125
49	0.063	0.063	0.000	0.000	-0.062	-0.063	0.000	-0.000	0.062	0.063
50	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
51	-0.063	-0.063	0.000	0.000	0.062	0.063	0.000	-0.000	-0.062	-0.063
52	-0.125	-0.125	0.000	0.000	0.124	0.125	0.000	-0.000	-0.123	-0.125
53	-0.187	-0.187	0.000	0.000	0.186	0.187	0.000	-0.000	-0.184	-0.187
54	-0.249	-0.249	0.000	0.000	0.246	0.249	0.000	-0.000	-0.244	-0.249
55	-0.309	-0.309	0.000	0.000	0.306	0.309	0.000	-0.000	-0.303	-0.309
56	-0.368	-0.368	0.000	0.000	0.365	0.368	0.000	-0.000	-0.361	-0.368
57	-0.426	-0.426	0.000	0.000	0.422	0.426	0.000	-0.000	-0.417	-0.426
58	-0.482	-0.482	0.000	0.000	0.477	0.482	0.000	-0.000	-0.472	-0.482
59	-0.536	-0.536	0.000	0.000	0.531	0.536	0.000	-0.000	-0.525	-0.536
60	-0.588	-0.588	0.000	0.000	0.582	0.588	0.000	-0.000	-0.576	-0.588
61	-0.637	-0.637	0.000	0.000	0.631	0.637	0.000	-0.000	-0.625	-0.637
62	-0.685	-0.685	0.000	0.000	0.678	0.685	0.000	-0.000	-0.671	-0.685
63	-0.729	-0.729	0.000	0.000	0.722	0.729	0.000	-0.000	-0.715	-0.729
64	-0.770	-0.771	0.000	0.000	0.763	0.771	0.000	-0.000	-0.755	-0.771
65	-0.809	-0.809	0.000	0.000	0.801	0.809	0.000	-0.000	-0.793	-0.809
66	-0.844	-0.844	0.000	0.000	0.836	0.844	0.000	-0.000	-0.828	-0.844
67	-0.876	-0.876	0.000	0.000	0.868	0.876	0.000	-0.000	-0.859	-0.876
68	-0.905	-0.905	0.000	0.000	0.896	0.905	0.000	-0.000	-0.887	-0.905
69	-0.930	-0.930	0.000	0.000	0.921	0.930	0.000	-0.000	-0.912	-0.930
70	-0.951	-0.951	0.000	0.000	0.942	0.951	0.000	-0.000	-0.932	-0.951

Continuação da tabela 4

$t(s)$	0.000		0.250		0.500		0.750		1.000	
n	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>	<i>Anal.</i>	<i>Num.</i>
71	-0.969	-0.969	0.000	0.000	0.959	0.969	0.000	-0.000	-0.950	-0.969
72	-0.982	-0.982	0.000	0.000	0.973	0.982	0.000	-0.000	-0.963	-0.982
73	-0.992	-0.992	0.000	0.000	0.982	0.992	0.000	-0.000	-0.973	-0.992
74	-0.998	-0.998	0.000	0.000	0.988	0.998	0.000	-0.000	-0.979	-0.998
75	-1.000	-1.000	0.000	0.000	0.990	1.000	0.000	-0.000	-0.980	-1.000
76	-0.998	-0.998	0.000	0.000	0.988	0.998	0.000	-0.000	-0.979	-0.998
77	-0.992	-0.992	0.000	0.000	0.982	0.992	0.000	-0.000	-0.973	-0.992
78	-0.982	-0.982	0.000	0.000	0.973	0.982	0.000	-0.000	-0.963	-0.982
79	-0.969	-0.969	0.000	0.000	0.959	0.969	0.000	-0.000	-0.950	-0.969
80	-0.951	-0.951	0.000	0.000	0.942	0.951	0.000	-0.000	-0.932	-0.951
81	-0.930	-0.930	0.000	0.000	0.921	0.930	0.000	-0.000	-0.912	-0.930
82	-0.905	-0.905	0.000	0.000	0.896	0.905	0.000	-0.000	-0.887	-0.905
83	-0.876	-0.876	0.000	0.000	0.868	0.876	0.000	-0.000	-0.859	-0.876
84	-0.844	-0.844	0.000	0.000	0.836	0.844	0.000	-0.000	-0.828	-0.844
85	-0.809	-0.809	0.000	0.000	0.801	0.809	0.000	-0.000	-0.793	-0.809
86	-0.770	-0.771	0.000	0.000	0.763	0.771	0.000	-0.000	-0.755	-0.771
87	-0.729	-0.729	0.000	0.000	0.722	0.729	0.000	-0.000	-0.715	-0.729
88	-0.685	-0.685	0.000	0.000	0.678	0.685	0.000	-0.000	-0.671	-0.685
89	-0.637	-0.637	0.000	0.000	0.631	0.637	0.000	-0.000	-0.625	-0.637
90	-0.588	-0.588	0.000	0.000	0.582	0.588	0.000	-0.000	-0.576	-0.588
91	-0.536	-0.536	0.000	0.000	0.531	0.536	0.000	-0.000	-0.525	-0.536
92	-0.482	-0.482	0.000	0.000	0.477	0.482	0.000	-0.000	-0.472	-0.482
93	-0.426	-0.426	0.000	0.000	0.422	0.426	0.000	-0.000	-0.417	-0.426
94	-0.368	-0.368	0.000	0.000	0.365	0.368	0.000	-0.000	-0.361	-0.368
95	-0.309	-0.309	0.000	0.000	0.306	0.309	0.000	-0.000	-0.303	-0.309
96	-0.249	-0.249	0.000	0.000	0.246	0.249	0.000	-0.000	-0.244	-0.249
97	-0.187	-0.187	0.000	0.000	0.186	0.187	0.000	-0.000	-0.184	-0.187
98	-0.125	-0.125	0.000	0.000	0.124	0.125	0.000	-0.000	-0.123	-0.125
99	-0.063	-0.063	0.000	0.000	0.062	0.063	0.000	-0.000	-0.062	-0.063
100	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000

Legenda: Comparação dos valores analíticos e numéricos

Fonte: O autor, 2022.