

MODELAGEM E ANÁLISE AERODINÂMICA DE CORPOS
BIDIMENSIONAIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

Vinicius Waldileme Coelho Mota

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro

Abril de 2026



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO**

Departamento de Engenharia Mecânica
DEM/POLI/UFRJ



**MODELAGEM E ANÁLISE AERODINÂMICA DE CORPOS
BIDIMENSIONAIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.**

Vinicius Waldileme Coelho Mota

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, Ph.D.

Prof. Nome Completo, Ph.D.

Prof. Nome Completo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2026

Waldileme Coelho Mota, Vinicius

Modelagem e Análise Aerodinâmica de Corpos Bidimensionais via Método dos Elementos Finitos./ Vinicius Waldileme Coelho Mota. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2026.

XV, 85 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Mecânica, 2026.

Referências Bibliográficas: p. 68 – 70.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Método Semi-Lagrangeano. 3. Coeficientes Aerodinâmicos. 4. Aerofólio. 5. Navier-Stokes. 6. Aerodinâmica. I. Rabello dos Anjos, Gustavo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica. III. Modelagem e Análise Aerodinâmica de Corpos Bidimensionais via Método dos Elementos Finitos..

*“A ciência revela o mundo como
ele é, a engenharia o transforma
no que jamais foi.”*
- Theodore von Kármán.

Agradecimentos

Aos meus pais, Rejane e Francisco, meu mais profundo agradecimento. Antes de qualquer resultado, esta conquista nasce do amor, do esforço e da confiança em mim depositada. Foram vocês que, com trabalho e dedicação silenciosa, construíram as condições para que eu pudesse sonhar, estudar e chegar até aqui. Em cada etapa desta caminhada, houve apoio integral, nas certezas e também nas dúvidas, nos avanços e nos momentos difíceis. Se este trabalho representa o fim de um ciclo, ele também é reflexo dos valores que recebi em casa: resiliência, perseverança, honestidade e compromisso. A vocês, devo mais do que palavras podem expressar. Aos meus irmãos, Pablo e Tiago, agradeço pelo companheirismo, pela presença e pelo apoio que tornaram esta trajetória possível. Ao permanecerem ao lado dos nossos pais enquanto precisei me mudar para seguir meus estudos, vocês contribuíram de forma generosa para que eu pudesse me dedicar a este caminho com maior tranquilidade. Esta conquista também carrega a parte de vocês.

Aos amigos da UFRJ Nautilus, agradeço por terem transformado a graduação em uma experiência muito maior do que salas de aula e disciplinas. Entre projetos, desafios e aprendizados, encontrei um espaço de troca genuína, onde o conhecimento era construído de forma coletiva. Muito do que aprendi sobre engenharia, e também sobre colaboração, nasceu dessas experiências.

Ao Prof. Gustavo, agradeço pela orientação cuidadosa, pela confiança e pelo apoio em todas as etapas deste trabalho. Sua contribuição foi essencial não apenas na construção técnica, mas também na condução de um processo que exigiu reflexão, disciplina e amadurecimento. Aos colegas do LabMFA, meu agradecimento pelas discussões e sugestões ao longo deste processo, que contribuíram, direta ou indiretamente, para a maturação deste trabalho.

Aos amigos que a graduação me trouxe, deixo também meu agradecimento pe-

las parcerias, pelas conversas nos corredores, pelas dificuldades divididas e pelos momentos que tornaram essa caminhada mais leve. São lembranças e vínculos que levarei comigo para além da universidade.

Por fim, agradeço ao corpo docente do curso de Engenharia Mecânica e aos servidores da universidade, que também são parte desta conquista. Aos professores, por compartilharem conhecimento, despertarem questionamentos e contribuírem para a formação que levo comigo. Aos funcionários, pela dedicação, muitas vezes silenciosa, que sustenta a vida acadêmica cotidiana. De formas distintas, todos ajudaram a construir o ambiente em que esta trajetória se tornou possível.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

MODELAGEM E ANÁLISE AERODINÂMICA DE CORPOS
BIDIMENSIONAIS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.

Vinicius Waldileme Coelho Mota

Abril/2026

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Departamento: Engenharia Mecânica

Este trabalho apresenta uma simulação numérica bidimensional do escoamento viscoso e incompressível ao redor de um aerofólio simétrico, posicionado em túnel de vento, operando em regime de transição, com número de Reynolds da ordem de 11.400. O objetivo principal é analisar o comportamento das forças aerodinâmicas em diferentes ângulos de ataque e em baixa velocidade de escoamento. O modelo adotado baseia-se nas equações de Navier–Stokes em variáveis primitivas, resolvidas por meio do Método dos Elementos Finitos com interpolação P1P1+ e esquema temporal semi-Lagrangeano, garantindo a estabilidade numérica do acoplamento pressão–velocidade e do termo convectivo. A implementação foi realizada em linguagem Python, utilizando bibliotecas numéricas eficientes para manipulação de matrizes esparsas. O código desenvolvido foi previamente validado por meio de casos de referência disponíveis na literatura. Além disso, realizou-se um estudo comparativo de desempenho entre CPU e GPU na resolução do sistema linear, destacando o impacto do crescimento da malha na eficiência computacional. Os resultados obtidos demonstram boa acurácia física e revelam tendências relevantes sobre o custo computacional das diferentes arquiteturas.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

AERODYNAMIC MODELING AND ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL
BODIES USING THE FINITE ELEMENT METHOD

Vinicius Waldileme Coelho Mota

April/2026

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

This work presents a two-dimensional numerical simulation of viscous and incompressible flow around a symmetric airfoil placed in a wind tunnel, operating in a transitional regime with a Reynolds number on the order of 11,400. The primary objective is to analyze the behavior of aerodynamic forces at different angles of attack and under low flow velocity. The adopted model is based on the primitive variable formulation of the Navier-Stokes equations, solved using the Finite Element Method with P1P1+ interpolation and a semi-Lagrangian time integration scheme, ensuring numerical stability of the pressure-velocity coupling and the convective term. The implementation was carried out in Python, employing efficient numerical libraries for sparse matrix operations. The developed code was validated through benchmark cases from the literature. Additionally, a comparative performance analysis between CPU and GPU was conducted for the linear system solution, highlighting the influence of mesh size on computational efficiency. The results demonstrate good physical accuracy and reveal relevant trends regarding the computational cost of different hardware architectures.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Aerodinâmica	5
2.2 Fluidodinâmica Computacional e Método dos Elementos Finitos	8
3 Equações de Governo	11
3.1 Conservação de Massa	11
3.2 Conservação de Quantidade de Movimento	13
3.3 Equações de Navier-Stokes	17
3.4 Adimensionalização	18
3.5 Forças Aerodinâmicas	21
3.6 Condições de Contorno e Condição Inicial	23
4 Método dos Elementos Finitos	26
4.1 Formulação Variacional	26
4.2 Método de Galerkin Semi-Discreto	30
4.3 Método Semi-Lagrangeano	34
4.4 Elementos de Malha	37
4.5 Cálculo Numérico de Coeficientes Aerodinâmicos	43
5 Algoritmo e Metodologia	45
5.1 Geração de Malha	45

5.2	Estrutura de Algoritmo Numérico	46
5.3	Análise de Eficiência Computacional: CPU vs GPU	51
6	Validação	55
6.1	Escoamento de Poiseuille	55
6.2	Escoamento em Cavidade com Tampa Móvel	58
6.3	Escoamento em Torno de um Cilindro	63
7	Resultados	67
8	Conclusões	80

Lista de Figuras

1.1	Aerofólio em análise: Perfil simétrico confeccionado em madeira com corda de 12,85 cm e espessura máxima de 2,77 cm.	2
1.2	Modelo aproximado de túnel de vento presente no LabMFA - UFRJ.	3
2.1	Forças aerodinâmicas presentes em um corpo durante o escoamento. A sustentação L é perpendicular e o arrasto D é paralelo à direção do fluido livre. Adaptado de Anderson (2015).	6
2.2	Nomenclatura da geometria de um aerofólio - Modelo NACA 4415. Adaptado de Anderson (2015).	8
4.1	Esquema unidimensional do método semi-Lagrangeano. O ponto \mathbf{x}_d é encontrado integrando a malha para trás no tempo, de acordo com a Eq. 4.40.	35
4.2	Representação de quatro trajetórias possíveis do algoritmo de busca do nó de partida em uma malha triangular.	36
4.3	Elemento P1P1+. Para o cálculo da velocidade são utilizados os quatro nós do elemento, já para a pressão usa-se apenas três. Na região próxima ao contorno, uma das arestas do elemento triangular forma também um elemento de contorno, como indica a linha tracejada.	38
5.1	Esquema de refinamento de malha adotado. Os elementos próximos ao sólido devem ser mais refinados para capturar com mais precisão os valores de velocidade e pressão. O mesmo é válido para a região a jusante que é onde ocorrem fenômenos como separação do escoamento e vórtices.	46

5.2	Esquema de funcionamento do código implementado. A estrutura do algoritmo é mostrada passo a passo até a resolução das equações de governo e posterior cálculo de coeficientes aerodinâmicos.	47
5.3	Tempo decorrido pelo número de nós, para CPU e GPU, em escala log-log. É possível observar uma vantagem inicial do processamento via CPU que tende a ser superada pela GPU com o aumento da malha.	53
6.1	Representação do escoamento de Poiseuille. A velocidade é unidirecional e o gradiente de pressão é constante.	55
6.2	Comparativo entre o resultado numérico, obtido via simulação, e o analítico, calculado a partir da Equação 6.1.	56
6.3	Ordem de convergência em escala log-log. É possível observar uma convergência aproximada de primeira ordem para a velocidade.	58
6.4	Representação do escoamento em cavidade com tampa móvel. As paredes são estacionárias com exceção da tampa superior, que se move a uma velocidade $U = 1$	59
6.5	Perfil de velocidades horizontal u e vertical v para $Re = 10$. A concordância entre os resultados obtidos na simulação com a referência, Marchi et al. (2009), é alta.	60
6.6	Perfil de velocidades horizontal u e vertical v para $Re = 100$. Mesmo aumentando o Re em 10 vezes, os resultados obtidos são bem próximos aos valores de Marchi et al. (2009).	61
6.7	Perfil de velocidades horizontal u e vertical v para $Re = 1000$. Com o valor cada vez maior de Re , o resultado numérico tende a se distanciar dos valores de referência, mantendo-se entretanto em uma uma faixa razoável.	62
6.8	Representação do escoamento em torno de um cilindro fixo em que no contorno de entrada do canal a velocidade tem perfil parabólico U .	63
6.9	Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU_m/D	64
6.10	Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU_m/D	65

6.11	Campos de velocidade e pressão de um cilindro para Re 100. As regiões de baixa pressão em (b) correspondem aproximadamente aos centros dos vórtices, os quais podem ser identificados na distribuição apresentada em (a).	66
7.1	Representação dos parâmetros do escoamento em torno do aerofólio em túnel de vento. A distância D_1 é dada partir da entrada, enquanto que D_2 é dada a partir da parede inferior. A velocidade U de entrada é constante e igual a 5km/h.	68
7.2	Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 0^\circ$	69
7.3	Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 0^\circ$	69
7.4	Campos de velocidade e pressão para um aerofólio simétrico em ângulo de ataque $\alpha = 0^\circ$. Como no caso do cilindro, existe a ocorrência de vórtices de von Kármán.	70
7.5	Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 3^\circ$	71
7.6	Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 3^\circ$	72
7.7	Campos de velocidade e pressão para um aerofólio simétrico em ângulo de ataque $\alpha = 3^\circ$. Há uma diminuição visível na frequência dos vórtices que é reforçada pelo decréscimo do valor de St	73
7.8	Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 6^\circ$	74
7.9	Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 6^\circ$	75
7.10	Campos de velocidade e pressão para um aerofólio simétrico em ângulo de ataque $\alpha = 6^\circ$. É possível observar os efeitos da separação do escoamento e entrada em Stall com o surgimento da zona de recirculação no extradorso, próximo ao bordo de fuga.	76

7.11	Coeficiente de sustentação C_L em função do ângulo de ataque α em um aerofólio simétrico. Ângulos simétricos não possuem os mesmos valores absolutos de C_L , o que é esperado devido a imperfeições de construção e modelagem.	78
7.12	Coeficiente de arrasto C_D em função do ângulo de ataque α em um aerofólio simétrico. O arrasto é mais suscetível a mudanças de ângulo na ocorrência do Stall.	78

Lista de Tabelas

5.1	Tempo aproximado de processamento do semi-Lagrangeano para malhas de diferentes tamanhos.	49
5.2	Tempo aproximado de processamento do sistema $\mathbf{A}w = b$ para malhas de diferentes tamanhos.	50
5.3	Tempo aproximado de processamento do sistema $\mathbf{A}w = b$ para GPU e CPU, com malhas de diferentes tamanhos.	52
6.1	Erro relativo para malhas de tamanhos diferentes.	57
6.2	Comparação de resultados obtidos na simulação com a literatura. . .	64
7.1	Valores de coeficientes aerodinâmicos e número de Strouhal para diferentes ângulos de ataque de um aerofólio simétrico.	77

Capítulo 1

Introdução

Desde os primeiros estudos de Arquimedes até os avanços teóricos de Euler e Reynolds, a Mecânica dos Fluidos tem desempenhado um papel decisivo no progresso da engenharia e da ciência. Com o surgimento da Aerodinâmica como subárea específica, voltada à análise do comportamento do ar ao redor de corpos sólidos, tornou-se possível compreender e modelar fenômenos fundamentais para o desenvolvimento de aeronaves, veículos terrestres e turbomáquinas. Ao longo do século XX, impulsionada pelas demandas da indústria aeronáutica e bélica, a Aerodinâmica consolidou-se como uma disciplina estratégica, cuja aplicação direta impacta o desempenho, a eficiência energética e a segurança de sistemas de transporte e geração de energia. Esse legado histórico destaca a importância contínua da dinâmica dos fluidos aplicada na solução de problemas tecnológicos contemporâneos.

Dentro desse contexto, a Fluidodinâmica Computacional (CFD – Computational Fluid Dynamics) consolidou-se como uma ferramenta indispensável na análise e previsão do comportamento de escoamentos. Por meio da resolução numérica das equações que regem a dinâmica dos fluidos, a CFD permite investigar fenômenos complexos sem a necessidade de experimentos físicos dispendiosos ou de difícil execução. Atualmente, grande parte dos avanços tecnológicos em aerodinâmica se apoia diretamente em simulações computacionais para guiar decisões de projeto, otimização e validação.

Este trabalho insere-se nesse panorama ao apresentar o desenvolvimento e a aplicação de um simulador numérico para o escoamento de ar ao redor de um perfil aerodinâmico bidimensional. A formulação adotada é baseada nas equações de

Navier-Stokes para variáveis primitivas, resolvidas por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), com discretização temporal semi-Lagrangeana. A implementação do modelo foi realizada na linguagem Python, utilizando bibliotecas como NumPy, SciPy, Meshio e outras que viabilizam a manipulação de malhas, operações matriciais esparsas e a resolução eficiente de sistemas lineares.

A simulação tem como base um aerofólio real de madeira, instalado em um túnel de vento do Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica (LabMFA), da Escola Politécnica da UFRJ. Este aerofólio, de perfil aparentemente simétrico, não possui dados técnicos específicos, sendo empregado em experimentações acadêmicas apenas com o propósito de visualização do escoamento. Um modelo 3D é ilustrado na Figura 1.1 com suas medidas aproximadas.



Figura 1.1: Aerofólio em análise: Perfil simétrico confeccionado em madeira com corda de 12,85 cm e espessura máxima de 2,77 cm.

O objetivo da simulação é investigar o comportamento do escoamento em torno do perfil sob condições realistas, com velocidade de entrada do túnel de aproximadamente 5 km/h, resultando em um número de Reynolds moderado da ordem de 11.400. São analisadas diferentes configurações de ângulo de ataque, com ênfase na distribuição das forças aerodinâmicas e na variação dos coeficientes de sustentação e arrasto. A Figura 1.2 representa um modelo aproximado do túnel de vento.

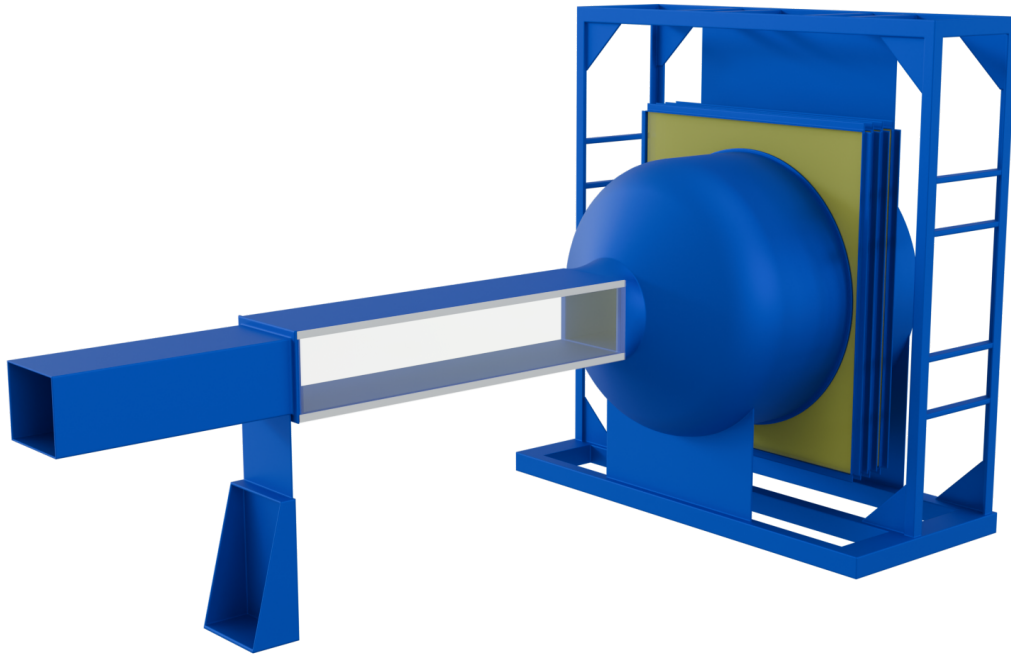


Figura 1.2: Modelo aproximado de túnel de vento presente no LabMFA - UFRJ.

Complementarmente, este trabalho também propõe uma análise comparativa entre o desempenho computacional de cálculos matriciais realizados em unidades de processamento central (CPU) e unidades de processamento gráfico (GPU), com foco específico na etapa de resolução do sistema linear gerado pelo método numérico. Essa avaliação é relevante, considerando o crescente interesse no uso de arquiteturas paralelas e bibliotecas aceleradas por GPU, como CuPy (equivalente à NumPy) e ferramentas para álgebra linear esparsa, que prometem significativa redução nos tempos de simulação em problemas de grande escala.

Assim, este estudo visa não apenas aplicar os fundamentos da CFD à análise de um escoamento aerodinâmico de interesse experimental, mas também contribuir para a compreensão do impacto do desempenho computacional no custo e na viabilidade de simulações em ambientes de pesquisa acadêmica.

Este trabalho está estruturado em oito capítulos. O Capítulo 1 introduz o tema, destacando a importância da análise aerodinâmica numérica e os objetivos do estudo. O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, abordando os fundamentos da aerodinâmica e os conceitos de fluidodinâmica computacional com ênfase no Método dos Elementos Finitos. O Capítulo 3 descreve as equações de governo, incluindo as

leis de conservação, as equações de Navier-Stokes e o tratamento das condições de contorno. No Capítulo 4, é detalhada a formulação numérica, com a abordagem variacional, o método de Galerkin, o esquema semi-Lagrangeano e o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos. O Capítulo 5 trata da metodologia computacional, desde a geração de malha até a estruturação do algoritmo e a análise de desempenho entre CPU e GPU. O Capítulo 6 trata da validação do modelo, por meio da simulação de três casos clássicos de referência: o escoamento de Poiseuille, a cavidade com tampa móvel e o escoamento em torno de um cilindro, cujos resultados são confrontados com dados da literatura. No Capítulo 7, são apresentados os resultados obtidos para o escoamento ao redor do aerofólio simétrico submetido a diferentes ângulos de ataque, com análise dos coeficientes de arrasto e sustentação. Por fim, o Capítulo 8 traz as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Aerodinâmica

A Aerodinâmica é um ramo fundamental da mecânica dos fluidos que se dedica ao estudo do comportamento do escoamento ao redor de corpos imersos em um fluido em movimento. Esse campo tem aplicação direta em diversas áreas da engenharia, como a aeronáutica, automotiva, aeroespacial, naval e civil, sendo especialmente relevante na análise de dispositivos que interagem com o ar, como asas de aeronaves, carrocerias de automóveis e estruturas arquitetônicas (Rubio, 2023).

Um dos principais objetivos dessa área de estudo é compreender e quantificar as forças que surgem da interação entre o fluido e a superfície do corpo, possibilitando a previsão do desempenho aerodinâmico da geometria em análise. Entre essas forças, destacam-se a sustentação e o arrasto, e a avaliação de ambas permite, por meio de sua normalização pelas variáveis de escala do problema, a obtenção dos coeficientes aerodinâmicos, em especial o coeficiente de sustentação (C_L) e o coeficiente de arrasto (C_D), grandezas adimensionais amplamente utilizadas para comparação de desempenho entre diferentes configurações, independentemente da escala física (Anderson, 2015).

Dois efeitos principais influenciam na origem dessas duas forças ao mesmo tempo, são eles: a pressão e a tensão de cisalhamento. A pressão atua sempre de maneira perpendicular à superfície do corpo e exerce influência direta na geração, principalmente, de sustentação, especialmente em superfícies com curvatura ou com ângulo de ataque em relação ao escoamento. Já a tensão de cisalhamento é resultado direto

da viscosidade do fluido, manifestando-se tangencialmente à superfície e sendo responsável, em especial, pelo arrasto de atrito, que corresponde à resistência imposta pelo fluido ao movimento do corpo.

O cálculo preciso dessas forças exige o conhecimento da distribuição da pressão e das tensões ao longo de toda a superfície. A partir da integração dessas distribuições obtêm-se as componentes normal (N) e axial (A) da força resultante (R), que são posteriormente decompostas nas direções paralela e perpendicular ao escoamento livre, dando origem às forças de arrasto (D) e sustentação (L), respectivamente, conforme mostrado na Figura 2.1.

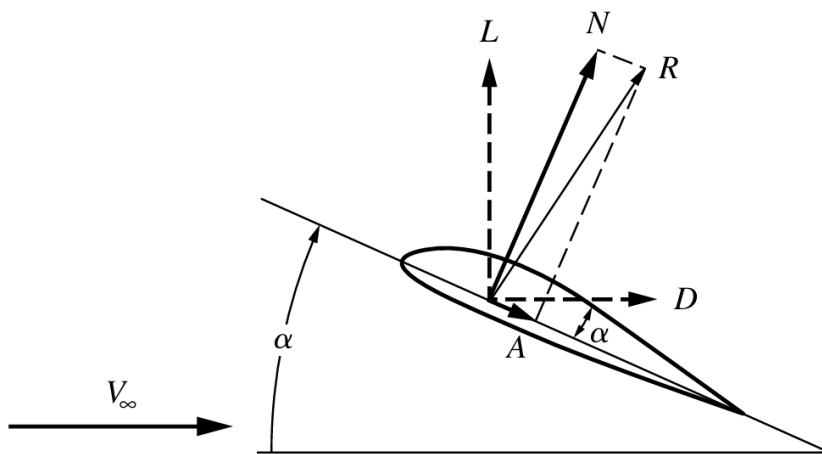


Figura 2.1: Forças aerodinâmicas presentes em um corpo durante o escoamento. A sustentação L é perpendicular e o arrasto D é paralelo à direção do fluido livre. Adaptado de Anderson (2015).

Para permitir uma comparação eficiente entre diferentes geometrias, condições de escoamento e regimes operacionais, utilizam-se grandezas adimensionais, dentre as quais se destacam o número de Reynolds e o número de Mach (Bertin and Smith, 1998). O número de Reynolds, definido pela razão entre forças inerciais e viscosas, governa o regime do escoamento, seja ele laminar ou turbulento, e influencia diretamente a distribuição de pressão e a formação de camadas-limite. Escoamentos com baixo Re tendem a apresentar comportamento laminar, enquanto valores elevados favorecem a transição para o regime turbulento, afetando a eficiência aerodinâmica e a estabilidade do fluxo.

O número de Mach, por sua vez, representa a razão entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no fluido. Este parâmetro é de especial importância em aplicações aeronáuticas, nas quais o regime compressível passa a ser dominante (Anyoji et al., 2014). Em escoamentos subsônicos ($M < 1$), os efeitos de compressibilidade são desprezíveis; no entanto, à medida que o número de Mach se aproxima ou ultrapassa a unidade, surgem fenômenos característicos, como ondas de choque e regiões de expansão, que afetam significativamente as distribuições de pressão e, conseqüentemente, os coeficientes aerodinâmicos. A correta modelagem desses efeitos é crucial em projetos de alta velocidade (Wang et al., 2021). A velocidade máxima de escoamento adotada neste trabalho foi de aproximadamente 5 km/h , correspondente a cerca de $1,39 \text{ m/s}$. Considerando a velocidade do som no ar em condições ambientes da ordem de 340 m/s , obtém-se um número de Mach da ordem de $M \approx 0,004$, valor muito inferior ao limite em que efeitos de compressibilidade se tornam relevantes. Desse modo, adotou-se a hipótese de escoamento incompressível.

No âmbito da aerodinâmica, os aerofólios desempenham um papel central, uma vez que são projetados especificamente para maximizar a sustentação e minimizar o arrasto durante a interação com o escoamento de ar. Um aerofólio pode ser definido como o perfil bidimensional de uma superfície cujo formato foi otimizado com o objetivo de controlar eficientemente o comportamento do fluido ao seu redor (Ira and Doenhoff, 2013).

Desse modo, a compreensão detalhada da sua geometria é essencial para a análise de seu desempenho. Conforme ilustrado na Figura 2.2, destacam-se como elementos principais o bordo de ataque, que representa a extremidade frontal e é o primeiro ponto de contato com o escoamento, e o bordo de fuga, situado na extremidade posterior, onde as linhas de corrente se reencontram. A linha de corda, que conecta esses dois pontos extremos, serve como base para a definição de outras propriedades geométricas importantes. A espessura do aerofólio corresponde à distância entre a superfície superior e inferior, medida perpendicularmente à corda. Já a linha média é traçada equidistantemente entre essas duas superfícies, e sua curvatura define o arqueamento, característica diretamente relacionada à capacidade do aerofólio de gerar sustentação (Shen et al., 2016).

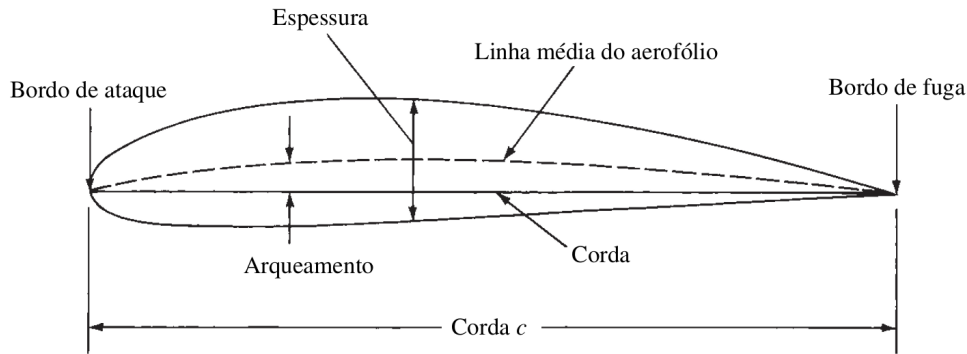


Figura 2.2: Nomenclatura da geometria de um aerofólio - Modelo NACA 4415. Adaptado de Anderson (2015).

Os aerofólios são largamente utilizados em componentes críticos da indústria, como asas de aeronaves, pás de hélices, rotores e turbinas. Seu estudo é essencial para a otimização do desempenho aerodinâmico, a redução do consumo energético e a melhoria da estabilidade e segurança de sistemas mecânicos em múltiplas aplicações. Em razão de sua relevância prática e teórica, os aerofólios foram escolhidos como objeto de análise neste trabalho.

2.2 Fluidodinâmica Computacional e Método dos Elementos Finitos

A análise do comportamento de fluidos em escoamento, sobretudo em contextos de engenharia, requer a resolução das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) que governam a dinâmica dos fluidos — em especial, as equações de Navier-Stokes. No entanto, devido à complexidade não linear e acoplada dessas equações, as soluções analíticas são limitadas a situações altamente idealizadas. Para a grande maioria dos problemas reais, torna-se imprescindível o uso de métodos numéricos.

É nesse contexto que surge a Fluidodinâmica Computacional, ou CFD como também é conhecida, uma disciplina que combina física dos fluidos, matemática aplicada e ciência da computação para simular e prever o comportamento de escoamentos. O desenvolvimento da CFD está diretamente ligado à evolução da capacidade computacional, e teve seu embrião ainda nos anos 1950, com as primeiras tentativas de resolver numericamente escoamentos unidimensionais utilizando o

Método das Diferenças Finitas (Tannehill et al., 1997). O campo se consolidou como uma área de estudo própria nas décadas seguintes, ganhando relevância em diversas indústrias.

A base da CFD é a discretização das equações governantes — continuidade, quantidade de movimento e, quando aplicável, energia — que são expressas na forma de EDPs. A impossibilidade de obter soluções analíticas para essas equações em geometrias e condições reais levou ao surgimento de métodos numéricos como o Método das Diferenças Finitas (FDM), o Método dos Volumes Finitos (FVM) e o Método dos Elementos Finitos. Cada método tem suas particularidades e domínios de aplicação, sendo o FVM amplamente utilizado em códigos comerciais de CFD, enquanto o MEF tem conquistado crescente destaque em razão de sua flexibilidade e fundamentação variacional.

O Método dos Elementos Finitos, inicialmente desenvolvido para análise estrutural, teve sua base teórica formalizada nos trabalhos de Courant (1943), e ganhou tração na engenharia a partir das décadas de 1950 e 1960, com os trabalhos de Zienkiewicz and Cheung (1967). Sua introdução na fluidodinâmica foi mais tardia, em razão dos desafios associados à instabilidade numérica e à dificuldade em tratar escoamentos incompressíveis. Diferente de métodos baseados em malhas estruturadas, o MEF é baseado na formulação fraca das EDPs, sendo particularmente eficaz em domínios com geometrias complexas, e oferecendo grande flexibilidade na escolha das funções de interpolação.

Entretanto, o uso do MEF para escoamentos incompressíveis enfrenta desafios clássicos, como a ocorrência de oscilações espúrias no campo de pressão ou de velocidade. Tais instabilidades decorrem da violação da condição de inf-sup (também conhecida como condição de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi), que impõe restrições sobre os espaços de aproximação utilizados para pressão e velocidade. Para mitigar esses efeitos, diversas técnicas de estabilização foram desenvolvidas ao longo dos anos. Destacam-se os métodos SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) e PSPG (Pressure-Stabilized Petrov-Galerkin), amplamente utilizados para aumentar a robustez e acurácia das simulações (Zienkiewicz et al., 2005).

Além disso, para lidar com termos convectivos dominantes em altos números de Reynolds, técnicas como o método semi-Lagrangeano passaram a ser incorporadas.

Esse método consiste em seguir o trajeto de partículas do fluido no tempo (linha de corrente ou trajetória) para calcular a derivada material de forma mais estável, sendo extremamente eficaz para problemas advectivos onde os métodos puramente Eulerianos se tornam instáveis (Donea et al., 1982). O semi-Lagrangeano permite o uso de passos de tempo maiores sem comprometer a estabilidade da solução, o que é vantajoso em simulações de longo prazo ou com malhas mais refinadas.

Em suma, o MEF representa hoje uma das abordagens mais sofisticadas e versáteis para a simulação computacional de escoamentos. Sua capacidade de lidar com malhas não estruturadas, geometrias complexas, e sua base teórica sólida, faz dele uma ferramenta indispensável em diversas áreas da engenharia.

Capítulo 3

Equações de Governo

3.1 Conservação de Massa

A conservação de massa é um dos princípios fundamentais da mecânica dos fluidos, estabelecendo que a massa de um fluido não pode ser criada nem destruída durante o escoamento. Quando se considera um volume de controle fixo no espaço, todo o fluido que entra ou sai pelas superfícies desse volume deve ser contabilizado de forma que a variação total de massa dentro do domínio seja exatamente igual à diferença entre o fluxo de entrada e saída.

Assim, o aumento ou diminuição da massa contida no interior do volume, ao longo do tempo, corresponde diretamente ao balanço de massa que atravessa suas fronteiras. Em termos matemáticos, a taxa de variação da massa contida no volume é representada por:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm \quad (3.1)$$

Considerando-se que a massa de um fluido pode ser expressa em termos de sua massa específica ρ , a quantidade de massa contida em um elemento de volume dV é dada por $dm = \rho dV$. Substituindo na Eq. 3.1:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.2)$$

Em paralelo, o fluxo de massa que atravessa o volume dV considera somente a componente de velocidade \mathbf{v} que se encontra na direção normal \mathbf{n} à superfície desse volume:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.3)$$

A utilização do Teorema de Gauss para transformar essa integral de superfície em uma integral de volume resulta em uma expressão mais conveniente para análises locais:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (3.4)$$

Desse modo, a forma integral da equação de conservação de massa pode ser escrita como:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (3.5)$$

Assim, sendo essa equação válida para qualquer volume de controle, a sua representação para o volume de controle infinitesimal torna-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (3.6)$$

ou:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.7)$$

Como no presente trabalho é abordado um domínio bidimensional em coordenadas cartesianas, pode-se reescrever a Eq. 3.7 na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

Ademais, a hipótese da incompressibilidade deve ser aplicada, visto que a massa específica permanece constante em todo o escoamento. Isso reduz a Eq. 3.7 à sua forma final:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.9)$$

A Eq. 3.9 é denominada equação da conservação de massa para fluidos incompressíveis, também conhecida popularmente como equação da continuidade.

3.2 Conservação de Quantidade de Movimento

A dedução das equações de conservação da quantidade de movimento segue um raciocínio análogo ao empregado na formulação da equação de conservação de massa. Conforme o princípio da conservação da quantidade de movimento, considera-se um fluido de massa específica ρ escoando através de um volume de

controle fixo no tempo. Nesse cenário, a variação temporal da quantidade de movimento contida no interior do volume é equilibrada pelo fluxo líquido que atravessa sua superfície, acrescido das forças que atuam sobre o fluido. Essas forças podem ser volumétricas, como o campo gravitacional, ou aplicadas nas superfícies do controle, como a pressão e as tensões viscosas. Assim, a taxa de variação da quantidade de movimento é expressa por:

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV \quad (3.10)$$

A Eq. 3.3 representa o fluxo de massa através do volume de controle. Para se obter o fluxo correspondente de quantidade de movimento, é necessário multiplicar o elemento integrando por um vetor velocidade, orientado na direção do escoamento, resultando em:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.11)$$

Considerando σ o tensor de tensões que age em cada elemento de fluido da superfície de controle, a força de superfície resultante é representada pela seguinte integral:

$$\oint_S \sigma \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.12)$$

Do mesmo modo, a resultante das forças de volume é definida por:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.13)$$

Conseqüentemente, a equação da conservação da quantidade de movimento assume a forma:

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.14)$$

Mais uma vez, recorre-se ao Teorema de Gauss a fim de converter as integrais de superfície em integrais de volume, conforme segue:

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.15)$$

A Eq. 3.15 deve ser válida para qualquer volume de controle, então para um volume de controle infinitesimal:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (3.16)$$

Deve-se expandir o termo temporal:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \rho \frac{\partial(\mathbf{v})}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} \quad (3.17)$$

O mesmo ocorre com o termo de divergência do tensor de momento linear convectivo:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) \quad (3.18)$$

Assim, a Eq. 3.16 é reescrita como:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (3.19)$$

Entretanto, em virtude da validade da equação da continuidade, o segundo termo do lado esquerdo da Eq. 3.19 torna-se nulo, de modo que:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (3.20)$$

O tensor de tensões σ é formado pela seguinte equação:

$$\sigma = -p \mathbf{I} + \tau \quad (3.21)$$

onde p representa a pressão, \mathbf{I} é a matriz identidade e τ o tensor de tensões viscosas. Substituindo σ na Eq. 3.20:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{g} \quad (3.22)$$

A Eq. 3.22 representa a equação de conservação da quantidade de movimento. As tensões internas associadas à viscosidade do fluido são representadas pelo tensor

de tensões viscosas τ , o qual está diretamente relacionado aos gradientes espaciais do campo de velocidades.

3.3 Equações de Navier-Stokes

Neste estudo, considera-se que a tensão de cisalhamento em cada ponto do fluido é linearmente proporcional à taxa de deformação angular local, caracterizando um comportamento de fluido newtoniano. Assim, a relação constitutiva que define o tensor de tensões viscosas τ é dada por:

$$\tau = 2\mu D(\mathbf{v}) = \mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \quad (3.23)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido, \mathbf{v} é o vetor velocidade, $\nabla\mathbf{v}$ é o gradiente de velocidade e $\nabla\mathbf{v}^T$ é a transposta desse gradiente. O termo $D(\mathbf{v})$ representa o tensor taxa de deformação (ou tensor de deformação angular), que é a parte simétrica do gradiente de velocidade e descreve como o fluido se deforma localmente sem considerar rotações rígidas.

Essa formulação implica que, em um fluido newtoniano, as forças viscosas são determinadas exclusivamente pela taxa de deformação e não dependem, por exemplo, da história do escoamento ou de efeitos não lineares. Substituindo a expressão da Eq. 3.23 na Eq. 3.22:

$$\rho\left[\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)] + \rho\mathbf{g} \quad (3.24)$$

O membro esquerdo da Eq. 3.24 pode ser convenientemente reescrito utilizando uma notação especial que combina os efeitos da variação temporal local e da variação espacial associada ao movimento do fluido. Essa combinação resulta na chamada derivada material (ou derivada substantiva), que representa a taxa de variação de uma propriedade física observada ao longo de uma partícula fluida em

movimento. Assim:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] \quad (3.25)$$

Finalmente, substituindo a expressão anterior na Eq. 3.24, dividindo tudo por ρ , aplicando a incompressibilidade e trazendo de volta a equação 3.9, temos:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.27)$$

Como consequência da incompressibilidade, o termo da transposta do gradiente de velocidades desaparece da equação. O parâmetro ν é denominado viscosidade cinemática, sendo definido como o quociente entre a viscosidade dinâmica μ e a densidade do fluido ρ . O sistema formado pelas equações 3.26 e 3.27 é comumente denominado equações de Navier-Stokes, as quais representam, respectivamente, as leis de conservação de quantidade de movimento e de massa para um fluido. Por se tratarem de equações não lineares e fortemente acopladas, já que a velocidade e a pressão estão interligadas em ambas, sua solução exige que sejam resolvidas simultaneamente.

3.4 Adimensionalização

Esta seção trata da adimensionalização das equações de continuidade e de quantidade de movimento. Embora esse procedimento não seja estritamente necessário para a solução numérica das equações, ele é extremamente útil para a análise e compreensão da dinâmica do escoamento.

A reescrita das equações em forma adimensional permite identificar, com mais clareza, quais termos possuem maior influência sobre o comportamento do sistema em estudo, facilitando a interpretação dos fenômenos envolvidos.

Além disso, a análise adimensional desempenha um papel crucial em estudos experimentais, especialmente quando se trabalha com modelos em escala reduzida. Dois sistemas distintos, regidos pelas mesmas leis físicas, podem ser considerados dinamicamente semelhantes, ou seja, fisicamente equivalentes, desde que os grupos adimensionais que os caracterizam assumam valores idênticos.

Esse conceito de semelhança dinâmica permite extrapolar os resultados obtidos em experimentos laboratoriais para sistemas reais de maior escala. Isto posto, são definidos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho_0 \rho^* & x &= Lx^* & \mathbf{g} &= g_0 \mathbf{g}^* \\
 \mu &= \mu_0 \mu^* & \mathbf{v} &= U \mathbf{v}^* & t &= \frac{L}{U} t^* \\
 p &= p_0 U^2 p^* & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t^*} & \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^*
 \end{aligned}$$

Com a substituição desses parâmetros nas equações de Navier-Stokes, temos:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (3.28)$$

$$\rho^* \left[\frac{\rho_0 U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{\rho_0 U^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* \right] = - \frac{\rho_0 U^2}{L} \nabla^* p^* + \frac{\mu_0 U}{L^2} \mu^* \nabla^{2*} \mathbf{v}^* + \rho_0 g_0 \rho^* \mathbf{g}^* \quad (3.29)$$

Ao multiplicar a Eq. 3.29 pelo fator $L/\rho_0 U^2 \rho^*$, obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\mu_0}{\rho_0 L U} \nu^* \nabla^{2*} \mathbf{v}^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \quad (3.30)$$

Mas é importante notar que:

$$Re = \frac{\rho_0 U L}{\mu_0} = \frac{U L}{\nu_0} \quad (3.31)$$

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g L}} \quad (3.32)$$

A equação 3.30 revela dois números adimensionais de extrema importância na análise da dinâmica dos fluidos: o número de Reynolds e o número de Froude.

O número de Reynolds (Eq. 3.31), já introduzido no capítulo 2, expressa a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas presentes no escoamento, sendo U a velocidade característica, L o comprimento característico e ν a viscosidade cinemática do fluido. Esse número é determinante para a classificação do regime de escoamento, distinguindo, por exemplo, escoamentos laminares, nos quais predominam os efeitos viscosos, daqueles turbulentos, nos quais as forças inerciais são dominantes.

Já o número de Froude (Eq. 3.32) representa a razão entre a inércia do fluido e a força gravitacional. Este parâmetro é particularmente relevante em escoamentos gravitacionais, como aqueles observados em canais abertos, onde a interação entre a velocidade do fluido e os efeitos gravitacionais influencia diretamente o perfil e a estabilidade do escoamento. Por fim, temos as equações de Navier-Stokes em sua forma adimensional final:

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{D\mathbf{v}^*}{Dt} = -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \nu^* \nabla^{2*} \mathbf{v}^* + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g}^* \quad (3.34)$$

Essas duas equações adimensionais representam, portanto, as equações de governo que regem a simulação numérica realizada neste trabalho. Elas descrevem o comportamento do escoamento ao redor do aerofólio no túnel de vento, incorporando de forma precisa os efeitos da viscosidade, da inércia e das forças externas relevantes. É importante destacar que a massa específica adimensional ρ^* é igual a 1 devido à incompressibilidade do escoamento.

3.5 Forças Aerodinâmicas

Conforme previamente abordado no Capítulo 2, as forças fluidodinâmicas que atuam sobre a superfície de um corpo imerso em escoamento decorrem das interações mecânicas entre o fluido e a superfície sólida, manifestando-se por meio da pressão normal e das tensões de cisalhamento tangenciais aplicadas ao contorno do corpo. Tais ações são formalmente representadas pelo tensor de tensões σ , o qual expressa o estado de tensão em um elemento de fluido. Embora já tenha sido introduzido anteriormente, esse tensor é retomado aqui, em sua versão adimensional, para fins de completude:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau \quad (3.35)$$

A força resultante exercida é obtida pela integração do tensor de tensões σ aplicado ao vetor normal externo \mathbf{n} , ao longo da superfície de contorno Γ_{af} :

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma_{af}} \sigma \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_{af} = \int_{\Gamma_{af}} (-p\mathbf{I} + \tau) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_{af} \quad (3.36)$$

A projeção da força resultante em um sistema de referência local, associado à geometria do corpo, permite dividi-la em duas componentes principais: a força normal N , perpendicular à superfície, e a força axial A , tangente à mesma.

Essas duas forças, por sua vez, podem ser decompostas nas direções paralela e perpendicular ao escoamento livre, gerando as forças de arrasto D e sustentação L , respectivamente. Assim, sendo α o ângulo de ataque do corpo em relação à direção do escoamento incidente, o arrasto e a sustentação podem ser expressos por:

$$L = N \cos \alpha - A \sin \alpha \quad (3.37)$$

$$D = N \sin \alpha + A \cos \alpha \quad (3.38)$$

Todas as forças mencionadas até o momento dependem diretamente da geometria do corpo, das propriedades do fluido e das condições de contorno do escoamento. Por esse motivo, torna-se conveniente adotar grandezas adimensionais que possibilitem a comparação entre diferentes configurações físicas dentro de uma mesma base de análise. É nesse contexto que surgem os coeficientes aerodinâmicos, definidos como formas adimensionais das forças exercidas pelo fluido sobre o corpo.

Esses coeficientes são obtidos por meio da normalização das forças de sustentação e arrasto com base em uma pressão dinâmica de referência. A pressão dinâmica, por sua vez, é expressa por:

$$q = \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (3.39)$$

em que U representa a velocidade característica do escoamento, frequentemente associada à velocidade do fluido longe da influência do corpo. A área projetada do corpo exposto ao escoamento, denotada por S , também é utilizada como referência. Com isso, os coeficientes são definidos da seguinte forma:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \quad (3.40)$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \quad (3.41)$$

sendo C_D o coeficiente de arrasto e C_L o coeficiente de sustentação, tais grandezas representam a razão entre a força efetivamente atuante e uma força de referência, esta definida com base nas propriedades do fluido e em dimensões características da geometria em questão. Por serem adimensionais, esses coeficientes possibilitam a análise de similaridade entre diferentes simulações ou experimentos, além de facilitar a extrapolação dos resultados para outras escalas físicas sob as mesmas condições dinâmicas.

3.6 Condições de Contorno e Condição Inicial

Em simulações numéricas voltadas à resolução de equações diferenciais parciais, a imposição correta das condições de contorno desempenha um papel crucial, tanto para a estabilidade numérica quanto para a representatividade física do modelo. No contexto específico do escoamento em túnel de vento, essas condições devem reproduzir fielmente o cenário experimental, ao mesmo tempo em que se alinham aos princípios fundamentais da mecânica dos fluidos.

No contorno de entrada do domínio (inlet), impõe-se uma condição de Dirichlet para a velocidade, simulando um escoamento uniforme e paralelo à direção principal do túnel. Essa condição representa a corrente de ar com velocidade constante que incide sobre o aerofólio. Assim, o campo de velocidades na entrada é dado por:

$$\mathbf{v} = (U, 0) \quad em \quad \Gamma_{in} \quad , \quad (3.42)$$

onde U é a velocidade do escoamento livre e Γ_{in} representa a fronteira de entrada. Nas paredes superior e inferior do túnel de vento, que são consideradas

superfícies sólidas reais (túnel fechado), aplica-se a condição de não deslizamento (no-slip), refletindo a aderência total do fluido às superfícies sólidas. O fluido adquire a velocidade da parede, que neste caso está em repouso. Portanto, impõe-se:

$$\mathbf{v} = (0, 0) \quad em \quad \Gamma_{wall} \quad , \quad (3.43)$$

sendo Γ_{wall} o conjunto das fronteiras superior e inferior. Na superfície do aerofólio, igualmente é aplicada a condição de não deslizamento, uma vez que se trata de uma superfície sólida onde o fluido adere completamente. Isso permite capturar corretamente os efeitos de separação e a formação de estruturas vorticosas no escoamento. A condição é dada por:

$$\mathbf{v} = (0, 0) \quad em \quad \Gamma_{af} \quad (3.44)$$

Por fim, no contorno de saída (outlet), estabelece-se uma condição mista. Para o campo de velocidades, adota-se uma condição de Neumann homogênea, assumindo gradiente nulo normal à fronteira, o que permite ao escoamento sair do domínio sem interferência artificial:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad em \quad \Gamma_{out} \quad , \quad (3.45)$$

onde n é o vetor normal à superfície de saída. Para o campo de pressão, impõe-se uma condição de referência, usualmente fixando a pressão a um valor nulo:

$$p = 0 \quad em \quad \Gamma_{out} \quad (3.46)$$

Essa formulação busca permitir que o escoamento deixe o domínio de forma suave, minimizando possíveis reflexões numéricas ou instabilidades associadas à saída do fluido.

Além das condições de contorno, é necessário definir uma condição inicial quando se trata de um problema transiente, ou seja, que envolve a evolução do escoamento ao longo do tempo. A condição inicial estabelece o estado do fluido no instante $t = 0$ e tem papel fundamental no bom andamento da simulação.

Para a simulação do escoamento ao redor de um aerofólio em um túnel de vento, considera-se que o fluido, no instante inicial, já se encontra em movimento uniforme. Essa escolha é especialmente adequada quando se deseja obter mais rapidamente o regime permanente da solução ou quando se está replicando uma condição experimental estabilizada. Assim, adota-se um campo de velocidade constante em todo o domínio no tempo inicial, dado por:

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{v}_0 = (U, 0) \quad (3.47)$$

$$p(x, y, t) = p_0 \quad (3.48)$$

onde p_0 é a pressão inicial, frequentemente assumida constante em todo o domínio se a pressão relativa for adotada. Essa configuração inicial representa um fluido que já se desloca na direção do aerofólio, sem perturbações iniciais, o que permite observar mais claramente os efeitos do contorno do corpo e facilita a obtenção de resultados estabilizados ao longo do tempo.

Capítulo 4

Método dos Elementos Finitos

4.1 Formulação Variacional

A formulação variacional constitui o alicerce do Método dos Elementos Finitos, sendo responsável por reescrever as equações diferenciais governantes em uma forma matemática que possibilita sua discretização e resolução numérica. Para isso, são empregadas duas categorias de funções: as funções de aproximação, que representam as variáveis de interesse, como a velocidade e a pressão no caso das equações de Navier-Stokes, e as funções peso, que multiplicam cada equação antes do processo de integração sobre o domínio.

Essas funções são definidas dentro de espaços de Sobolev apropriados, assegurando as propriedades de integrabilidade e a existência de derivadas fracas necessárias. Assim, o espaço de Sobolev pode ser definido como:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, m \right\} \quad (4.1)$$

sendo $L^2(\Omega)$ o espaço de funções escalarmente quadrado-integráveis sobre o domínio Ω :

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (4.2)$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é utilizado para a aproximação da variável pressão, enquanto a velocidade é aproximada no espaço $\mathbb{V} = H^1(\Omega)^m$, correspondente ao produto cartesiano de m espaços $H^1(\Omega)$. Define-se, portanto, os subespaços funcionais destinados à aproximação das variáveis de interesse:

$$\mathbb{S}_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\Gamma} \text{ em } \Gamma\} \quad (4.3)$$

$$\mathbb{S}_p = \{p \in L^2(\Omega) : p = p_{\Gamma} \text{ em } \Gamma\} \quad (4.4)$$

De forma análoga, definem-se os subespaços das funções peso, sendo exigido que essas funções se anulem na fronteira onde estão prescritas as condições de Dirichlet:

$$\mathbb{W}_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{V} : \mathbf{w} = 0 \text{ em } \Gamma\} \quad (4.5)$$

$$\mathbb{Q}_p = \{q \in L^2(\Omega) : q = 0 \text{ em } \Gamma\} \quad (4.6)$$

Para a obtenção da formulação variacional do problema, também denominada formulação fraca, procede-se à multiplicação das equações de governo pelas funções peso, seguida da integração sobre todo o domínio:

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p - \frac{1}{Re} \cdot \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \right] \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

A influência do campo gravitacional pode ser desconsiderada no presente problema, uma vez que as forças gravitacionais são desprezíveis em comparação às forças inerciais e de pressão que dominam o escoamento. Dessa forma, pode-se reescrever a Eq. 4.8 separando seus termos em uma soma de integrais:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} [\nabla p] \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{Re} \cdot \nu \nabla^2 \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

Como mencionado no Capítulo 3, o primeiro termo da Eq. 4.9 pode ser reformulado utilizando a notação da derivada substancial:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (4.10)$$

Aplica-se, então, o Teorema de Green ao termo difusivo, principalmente com o objetivo de reduzir a ordem das derivadas, e ao termo de gradiente de pressão, a fim de transferir a derivada para a função peso e expor o termo de contorno:

$$\int_{\Omega} \nu \nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} d\Omega = - \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \nu (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad (4.11)$$

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} d\Omega = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Gamma} p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.12)$$

Os termos de contorno gerados nas duas equações, integrais em Γ , anulam-se devido à escolha adequada das funções peso, que são construídas para se anularem nas fronteiras onde as condições de Dirichlet são impostas, garantindo que não reste contribuição de superfície na formulação final. Obtemos, desse modo, as equações na forma fraca:

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

Procede-se, então, à definição das formas integrais associadas:

$$m\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \mathbf{w}\right) = \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (4.15)$$

$$g(p, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (4.16)$$

$$k(\nu, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} d\Omega \quad (4.17)$$

$$d(q, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q d\Omega \quad (4.18)$$

A formulação variacional, por fim, busca determinar a solução para $\mathbf{v} \in \mathbb{S}_{\mathbf{v}}$ e $p \in \mathbb{S}_p$, tais que:

$$m\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \mathbf{w}\right) - g(p, \mathbf{w}) + \frac{1}{Re} k(\nu, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad (4.19)$$

$$d(q, \mathbf{v}) = 0 \quad (4.20)$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathbb{W}_{\mathbf{v}}$ e $q \in \mathbb{Q}_p$.

4.2 Método de Galerkin Semi-Discreto

O Método de Galerkin semi-discreto consiste na discretização espacial do problema contínuo, preservando ainda a dependência temporal das variáveis. A partir da formulação variacional previamente estabelecida, busca-se construir uma aproximação baseada em subespaços finitos para as variáveis velocidade e pressão, mantendo o tempo como um parâmetro contínuo. Dessa forma, transforma-se o sistema de equações diferenciais parciais original em um sistema de equações diferenciais ordinárias no tempo.

A discretização espacial das variáveis é realizada por meio de funções de forma, definidas localmente sobre os elementos da malha, de modo que:

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{nv} N_i(\mathbf{x})u_i(t) \quad (4.21)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{nv} N_i(\mathbf{x})v_i(t) \quad (4.22)$$

$$p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} P_j(\mathbf{x})p_j(t) \quad (4.23)$$

$$w_u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{nv} W_i(\mathbf{x})w_i(t) \quad (4.24)$$

$$w_v(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{nv} W_i(\mathbf{x})w_i(t) \quad (4.25)$$

$$q(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} Q_j(\mathbf{x})q_j(t) \quad (4.26)$$

onde N_i , P_j , W_i e Q_j são as funções de forma associadas às variáveis do problema

(\mathbf{v} e p) e às funções peso (\mathbf{w} e q), enquanto u_i , v_i , p_j , w_i e q_j representam os seus respectivos coeficientes. Desse modo, a dependência espacial é integralmente capturada pelas funções de forma, enquanto a dependência temporal é associada exclusivamente aos coeficientes.

Ademais, é importante frisar que o número total de graus de liberdade associados à velocidade é superior ao da pressão, o que é uma característica desejável do ponto de vista da estabilidade numérica, por isso $nv > np$.

Considerando as equações de Navier-Stokes em sua forma variacional nas direções ortogonais x e y :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{Du}{Dt} w_u + \frac{Dv}{Dt} w_v \right) d\Omega - \int_{\Omega} p \left(\frac{\partial w_u}{\partial x} + \frac{\partial w_v}{\partial y} \right) d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w_u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w_v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_v}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (4.27)$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) q d\Omega = 0 \quad (4.28)$$

A equação da quantidade de movimento (Eq. 4.27) pode ser escrita em duas equações separadas para x e y , respectivamente:

$$\int_{\Omega} \frac{Du}{Dt} w_u d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial w_u}{\partial x} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w_u}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (4.29)$$

$$\int_{\Omega} \frac{Dv}{Dt} w_v d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial w_v}{\partial y} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w_v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_v}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (4.30)$$

A seguir, procede-se à substituição de cada variável das equações por suas representações discretizadas e elementares, conforme definido nas Equações 4.21 a 4.26:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_i \frac{Du_i}{Dt} W_i N_i d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_j \frac{\partial W_i}{\partial x} P_j p_j d\Omega + \\ & \frac{1}{Re} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_i \nu^e \left(\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_i \frac{Dv_i}{Dt} W_i N_i d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_j \frac{\partial W_i}{\partial y} P_j p_j d\Omega + \\ & \frac{1}{Re} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_i \nu^e \left(\frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i + \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sum_i \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i \right) Q_j d\Omega = 0 \quad (4.33)$$

em que os coeficientes das funções peso, w_i e q_j , são eliminados das equações de quantidade de movimento e de conservação de massa, respectivamente, uma vez que aparecem como fatores comuns em todos os termos.

Cada termo das equações pode ser representado por matrizes definidas localmente em cada elemento, sendo expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} W_i N_i d\Omega & k_{xx,ij}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega \\ k_{yy,ij}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega & g_{x,ij}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial W_i}{\partial x} P_j d\Omega \\ g_{y,ij}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial W_i}{\partial y} P_j d\Omega & d_{x,ij}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} Q_j d\Omega \\ d_{y,ij}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i}{\partial y} Q_j d\Omega \end{aligned}$$

Adicionalmente, o operador Λ , responsável pela montagem global, é utilizado para transformar as matrizes elementares em matrizes globais que representam todo o domínio computacional. Dessa forma, obtém-se:

$$M_x = \Lambda m^e ; \quad M_y = \Lambda m^e ; \quad K_{xx} = \Lambda k_{xx}^e ; \quad K_{yy} = \Lambda k_{yy}^e ;$$

$$G_x = \Lambda g_x^e ; \quad G_y = \Lambda g_y^e ; \quad D_x = \Lambda d_x^e ; \quad D_y = \Lambda d_y^e ;$$

Finalmente, as equações 4.31, 4.32 e 4.33 podem ser organizadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$M_x \dot{u} + \frac{1}{Re} (K_{xx} + K_{yy})u - G_x p = 0 \quad (4.34)$$

$$M_y \dot{v} + \frac{1}{Re} (K_{xx} + K_{yy})v - G_y p = 0 \quad (4.35)$$

$$D_x u + D_y v = 0 \quad (4.36)$$

em que \dot{u} e \dot{v} constituem a derivada material, definidas por $\dot{u} = [Du_1/Dt, \dots, Du_{nv}/Dt]$ e $\dot{v} = [Dv_1/Dt, \dots, Dv_{nv}/Dt]$. Os valores nodais de pressão e velocidade são representados por p , u e v . As dimensões das matrizes do sistema são $nv \times nv$ para K_{xx} , K_{yy} , M_x e M_y , $nv \times np$ para G_x e G_y , e por fim $np \times nv$ para D_x e D_y .

É possível, de forma alternativa, representar o sistema de modo mais compacto, tratando as componentes da velocidade de maneira vetorial:

$$M \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{Re} K \mathbf{v} - G p = 0 \quad (4.37)$$

$$D \mathbf{v} = 0 \quad (4.38)$$

4.3 Método Semi-Lagrangeano

Na formulação clássica das equações de Navier-Stokes, o termo convectivo não linear surge na derivada material, conforme apresentado na Seção 3.3 do Capítulo 3. Essa derivada representa a taxa de variação de uma propriedade ao longo da trajetória de uma partícula fluida, e está no cerne da descrição Lagrangeana do escoamento. Em sua forma geral, é dada por:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad (4.39)$$

A discretização desse termo no contexto Euleriano, ou seja, com base em uma malha fixa no espaço, pode resultar em instabilidades numéricas, especialmente em escoamentos com regime convectivo dominante, nos quais o número de Reynolds é elevado. Uma das formas de lidar com essa dificuldade é utilizar o método semi-Lagrangeano, que permite uma abordagem híbrida entre as formulações Lagrangeana e Euleriana.

Esse método consiste, essencialmente, em avaliar a quantidade transportada ao longo da trajetória de uma partícula fluida, traçando-a a partir do ponto onde se deseja calcular a solução, retrocedendo no tempo até encontrar o ponto de origem da partícula. Neste trabalho, o método é aplicado à derivada material da velocidade, com o objetivo de obter maior estabilidade e robustez numérica.

A ideia central da formulação de primeira ordem é que, para um dado ponto fixo \mathbf{x}_i na malha, busca-se o ponto \mathbf{x}_d no instante anterior que deu origem à partícula fluida agora presente em \mathbf{x}_i . Isso pode ser representado pela aproximação explícita:

$$\mathbf{x}_d^{n-1} = \mathbf{x}_i^n - \Delta t \mathbf{v}_i^n \quad (4.40)$$

A Figura 4.1 representa, em uma dimensão, a trajetória característica de um

ponto material ao longo da malha computacional. O círculo branco indica a posição do ponto material, enquanto o círculo preto corresponde ao nó da malha. A linha tracejada mostra a trajetória característica, conforme descrita na Equação 4.40. Nesse contexto, a posição \mathbf{x}_i e a velocidade \mathbf{v}_i , conhecidas no instante t^n , são utilizadas para estimar o ponto de partida \mathbf{x}_d no instante anterior t^{n-1} .

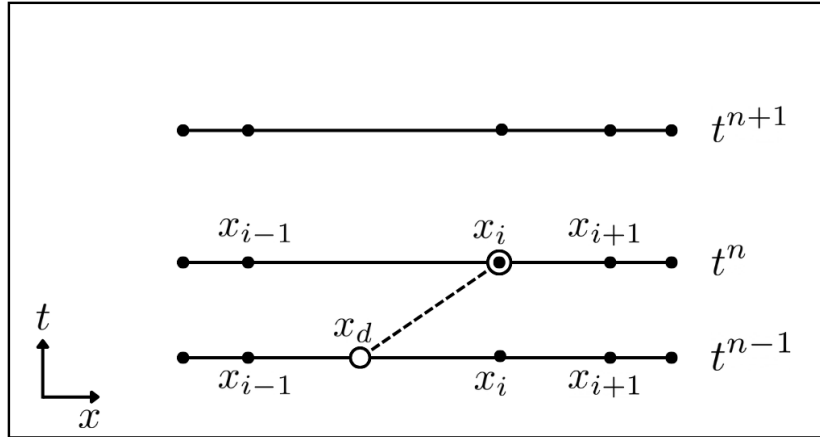


Figura 4.1: Esquema unidimensional do método semi-Lagrangiano. O ponto \mathbf{x}_d é encontrado integrando a malha para trás no tempo, de acordo com a Eq. 4.40.

O ponto \mathbf{x}_d , em geral, não coincide com um nó da malha, portanto sua velocidade não está diretamente disponível. Para obtê-la, identifica-se o elemento no qual ele está inserido e realiza-se uma interpolação com base nas velocidades nos nós desse elemento, utilizando as funções de forma associadas. Essas velocidades se encontram no tempo t^n , portanto a velocidade \mathbf{v}_d também pertence a esse tempo.

Com essa informação, aproxima-se a derivada material pela diferença entre as velocidades \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_d :

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} \quad (4.41)$$

Desse modo, o termo convectivo é incorporado de maneira implícita na movimentação da partícula, eliminando a necessidade de discretizá-lo explicitamente,

como seria feito com outros esquemas. Como resultado, o método semi-Lagrangeano tende a apresentar maior estabilidade numérica, mesmo com passos de tempo relativamente grandes, além de reduzir oscilações espúrias associadas a escoamentos dominados por convecção.

Para que o método semi-Lagrangeano opere de forma eficiente, é fundamental um cuidado especial na etapa de localização do ponto de partida. Essa etapa, se mal estruturada, pode comprometer o desempenho da simulação, sobretudo em malhas com grande número de elementos. Neste trabalho, adotou-se uma estratégia de busca baseada na vizinhança imediata de cada nó da malha. A partir do ponto \mathbf{x}_i , verifica-se se o ponto de partida \mathbf{x}_d pertence a algum dos elementos adjacentes.

Caso não seja localizado, calcula-se a distância de \mathbf{x}_d aos nós desses elementos e seleciona-se aquele mais próximo, reiniciando o processo a partir de sua vizinhança. O ciclo se repete até que o elemento que contém o ponto \mathbf{x}_d seja identificado. Essa abordagem mostrou-se eficiente do ponto de vista computacional e apresenta a vantagem adicional de ser simples de implementar, mesmo em domínios com geometria complexa.

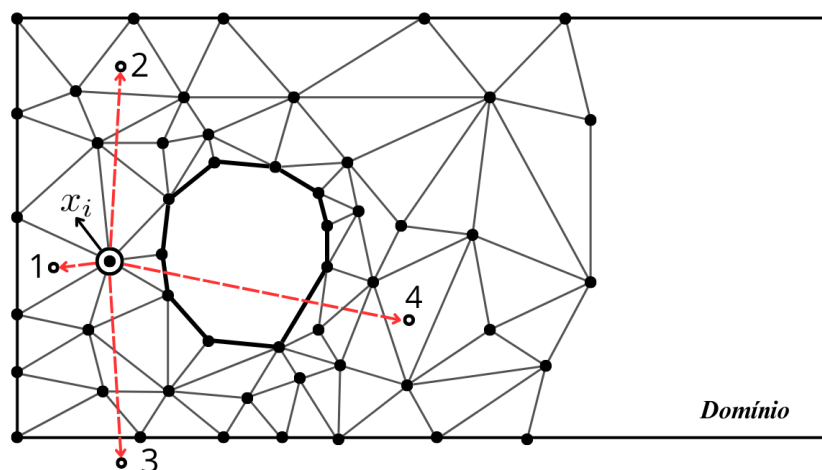


Figura 4.2: Representação de quatro trajetórias possíveis do algoritmo de busca do nó de partida em uma malha triangular.

Conforme ilustrado na Figura 4.2, o algoritmo de busca pode se deparar com quatro situações distintas. No caso 1, o ponto \mathbf{x}_d encontra-se diretamente em um dos elementos vizinhos de \mathbf{x}_i , sendo localizado logo na primeira iteração.

No caso 2, o ponto está mais distante, exigindo múltiplas iterações — neste

exemplo, três — até que o elemento correspondente seja identificado. A cada passo, calcula-se o nó mais próximo de \mathbf{x}_d entre os presentes na vizinhança, e o processo se repete até a localização correta.

No caso 3, \mathbf{x}_d está fora dos limites da malha. Nessa situação, o algoritmo continua a buscar o nó mais próximo em cada vizinhança, mas, ao detectar a repetição do mesmo nó nas três últimas iterações, infere que o ponto está fora do domínio. Nesse caso, a velocidade \mathbf{v}_d é atribuída com base na interpolação entre os pontos de contorno mais próximos.

Por fim, no caso 4, o ponto \mathbf{x}_d está localizado atrás de um contorno interno, como no entorno de um obstáculo. Mesmo assim, o algoritmo é capaz de encontrar o elemento correto, contornando a geometria com sucesso.

Como apresentado na Equação 4.41, a derivada material foi discretizada no tempo por meio do método semi-Lagrangeano. Desse modo, com as discretizações espaciais e temporais, as equações de governo são representadas, em sua forma final, por:

$$M \frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} + \frac{1}{Re} K \mathbf{v}_i^{n+1} - G p_i^{n+1} = 0 \quad (4.42)$$

$$D \mathbf{v}_i^{n+1} = 0 \quad (4.43)$$

4.4 Elementos de Malha

Uma das etapas fundamentais para a resolução numérica do problema consiste na discretização do domínio físico por meio de uma malha formada por elementos finitos. Essa malha pode assumir configurações estruturadas ou não estruturadas, sendo que sua topologia e qualidade influenciam diretamente a precisão da solução, a estabilidade numérica e o custo computacional envolvido.

No caso das equações de Navier-Stokes com variáveis primitivas, a discretização simultânea dos campos de velocidade e pressão impõe restrições específicas à esco-

lha dos elementos, devido ao acoplamento entre essas variáveis. Uma das exigências mais conhecidas é a condição de compatibilidade entre os espaços de aproximação, formalizada pelo chamado critério de inf-sup ou condição de Babuška–Brezzi. Essa condição estabelece que, para garantir a estabilidade da solução, os espaços funcionais escolhidos para representar a pressão e a velocidade não devem ser iguais, sendo necessário, na maioria dos casos, empregar elementos com graus de liberdade distintos para cada variável.

Neste trabalho, utiliza-se um elemento triangular com quatro nós, sendo três localizados nos vértices do triângulo e um adicional no centro geométrico do elemento. Essa configuração é frequentemente chamada de elemento P1P1+ (Figura 4.3), onde as componentes de velocidade são aproximadas em todos os quatro nós (incluindo o ponto central), enquanto a pressão é definida apenas nos vértices. Essa estratégia representa uma abordagem mista, pois emprega funções de forma lineares para a pressão e funções com um ponto adicional para a velocidade, satisfazendo assim a condição inf-sup de maneira eficiente, sem a necessidade de utilizar elementos de ordem superior em toda a malha. Os elementos de contorno são, naturalmente, unidimensionais e estão representados por um segmento de reta que liga dois nós.

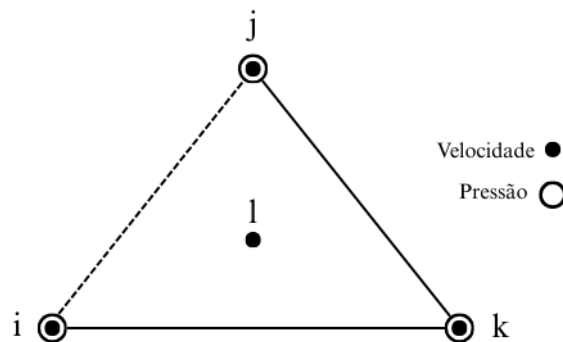


Figura 4.3: Elemento P1P1+. Para o cálculo da velocidade são utilizados os quatro nós do elemento, já para a pressão usa-se apenas três. Na região próxima ao contorno, uma das arestas do elemento triangular forma também um elemento de contorno, como indica a linha tracejada.

Do ponto de vista matemático, as funções de forma associadas ao elemento P1P1+ são construídas a partir da base linear usual dos elementos triangulares P1, acrescida de uma função em bolha, que introduz um grau adicional de liberdade interno ao elemento. As funções P1 clássicas, N_i , N_j e N_k , são definidas em termos das coordenadas baricêntricas L_i , L_j e L_k do triângulo de referência, sendo contínuas em todo o domínio e lineares em cada elemento, com suporte nos vértices do triângulo. Essas funções são utilizadas tanto para a discretização da pressão quanto para parte do campo de velocidades.

A quarta função, associada ao ponto central do triângulo, é uma função de forma interna, N_l . Essa função, de natureza cúbica, é conhecida por ser nula em todos os vértices e nas arestas do elemento, atingindo valor máximo no centro do triângulo e seu uso é exclusivo para o enriquecimento do espaço de aproximação da velocidade. As funções de forma são dadas por:

$$N_i = L_i - 9L_iL_jL_k$$

$$N_j = L_j - 9L_iL_jL_k$$

$$N_k = L_k - 9L_iL_jL_k$$

$$N_l = 27L_iL_jL_k$$

No Método dos Elementos Finitos, cada tipo de elemento possui um conjunto característico de matrizes elementares, cujo cálculo foi abordado na Seção 4.2, que representam a contribuição local de cada célula da malha para as equações globais do problema. As matrizes do elemento P1P1+ são uma extensão direta daquelas obtidas para o P1 tradicional (Triângulo Linear). A estrutura inicial das matrizes do elemento P1 (3x3) é ampliada para incorporar o quarto ponto (centro), resultando em matrizes de dimensão 4x4 no caso de variáveis que utilizam a base enriquecida. No caso da pressão, que permanece com interpolação linear (P1), mantém-se a estrutura triangular simples com três nós. Desse modo, temos:

$$\mathbf{k}_{\text{lin}}^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{x} \text{ lin}}^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{y} \text{ lin}}^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{m}^e = \frac{Ar}{840} \begin{bmatrix} 83 & 13 & 13 & 45 \\ 13 & 83 & 13 & 45 \\ 13 & 13 & 83 & 45 \\ 45 & 45 & 45 & 243 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} & & & -(27/10)z \\ & \mathbf{k}_{\text{lin}}^e + (9/10)z & & -(27/10)z \\ & & & -(27/10)z \\ -(27/10)z & -(27/10)z & -(27/10)z & (81/10)z \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{g}_{\mathbf{x}}^e = \begin{bmatrix} & & & \\ & (9/20)\mathbf{g}_{\mathbf{x} \text{ lin}}^e + \mathbf{g}_{\mathbf{x} \text{ lin}}^e \mathbf{T} & & \\ & & & \\ -(9/40)b_i & -(9/40)b_j & -(9/40)b_k & \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{g}_y^e = \begin{bmatrix} (9/20)\mathbf{g}_y^e \text{ lin} + \mathbf{g}_y^e \text{ lin}^T & & & \\ -(9/40)c_i & -(9/40)c_j & -(9/40)c_k & \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{d}_x^e = \mathbf{g}_x^e \text{ }^T \quad (4.51)$$

$$\mathbf{d}_y^e = \mathbf{g}_y^e \text{ }^T \quad (4.52)$$

$$\mathbf{g}\mathbf{v}_x^e = \begin{bmatrix} (11/20)\mathbf{g}_x^e \text{ lin} + (9/20)\mathbf{g}_x^e \text{ lin}^T & & & -(9/40)b_i \\ (9/40)b_i & (9/40)b_j & (9/40)b_k & 0 \\ & & & -(9/40)b_j \\ & & & -(9/40)b_k \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{g}\mathbf{v}_y^e = \begin{bmatrix} (11/20)\mathbf{g}_y^e \text{ lin} + (9/20)\mathbf{g}_y^e \text{ lin}^T & & & -(9/40)c_i \\ (9/40)c_i & (9/40)c_j & (9/40)c_k & 0 \\ & & & -(9/40)c_j \\ & & & -(9/40)c_k \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$z = \frac{1}{4Ar}(b_j^2 + b_j b_k + b_k^2 + c_j^2 + c_j c_k + c_k^2) \quad (4.55)$$

em que \mathbf{m}^e , \mathbf{k}^e , $\mathbf{g}\mathbf{v}_x^e$ e $\mathbf{g}\mathbf{v}_y^e$ são, respectivamente, as matrizes de massa, de rigidez e convectivas, todas com dimensão 4x4. As matrizes \mathbf{g}_x^e e \mathbf{g}_y^e , conhecidas como matrizes do gradiente, possuem dimensão 4x3, ao passo que as matrizes \mathbf{d}_x^e e \mathbf{d}_y^e , suas transpostas, possuem dimensão 3x4. As matrizes $\mathbf{k}_{\text{lin}}^e$, $\mathbf{g}_x^e \text{ lin}$ e $\mathbf{g}_y^e \text{ lin}$, assim como os coeficientes $b_{i,j,k}$ e $c_{i,j,k}$, e a área Ar , são todos definidos a partir do elemento

Triângulo Linear e são usados como base para a definição das matrizes do elemento P1P1+.

O elemento unidimensional de contorno também possui uma matriz elementar indispensável e cuja importância será discutida na próxima sessão :

$$\mathbf{m}_{af} = \frac{bh}{6} \begin{bmatrix} 02 & 01 \\ 01 & 02 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

A adoção de elementos P1P1+ é particularmente vantajosa por seu equilíbrio entre simplicidade e estabilidade numérica. Eles possibilitam uma malha leve e de fácil geração, mantendo um número moderado de graus de liberdade, ao mesmo tempo em que garantem uma aproximação estável para os campos de pressão e velocidade.

A formulação final do sistema de equações que rege o problema em estudo está expressa nas Equações 4.42 e 4.43. Esse sistema linear, estruturado em termos matriciais, reflete a discretização das equações governantes e, como já discutido, deve respeitar a condição de compatibilidade entre os espaços de aproximação da velocidade e da pressão, exigência fundamental para a estabilidade numérica da solução. Assim, esse sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \frac{1}{Re} \mathbf{K} & & -\mathbf{G}_x \\ & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \frac{1}{Re} \mathbf{K} & -\mathbf{G}_y \\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} u_d \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} v_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Definindo cada termo da Equação 4.47 de forma individual:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \frac{1}{Re} \mathbf{K} & & -\mathbf{G}_x \\ & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \frac{1}{Re} \mathbf{K} & -\mathbf{G}_y \\ \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & 0 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} u_d \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} v_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se o sistema linear $\mathbf{A}w = b$, em que as dimensões da matriz \mathbf{A} e do vetor b são, respectivamente, $(2nv + np) \times (2nv + np)$ e $(2nv + np)$.

4.5 Cálculo Numérico de Coeficientes Aerodinâmicos

A obtenção das forças fluidodinâmicas que atuam sobre o aerofólio e dos correspondentes coeficientes aerodinâmicos é realizada de forma completamente integrada à estrutura de elementos finitos, a partir dos campos de pressão e velocidade resolvidos no domínio.

A superfície do aerofólio é discretizada por um conjunto de nós de contorno, sobre os quais são avaliadas as contribuições locais de pressão e tensão de cisalhamento. Para isso, utiliza-se uma matriz de massa unidimensional, denotada por \mathbf{M}_{af} , construída especificamente com base nesses nós. Essa matriz permite aproximar, de forma consistente, integrais ao longo da fronteira do aerofólio, ponderando adequadamente cada ponto em função da sua posição na malha. Além disso, são calculados vetores normais unitários externos \mathbf{n}_i em cada ponto da borda, os quais são essenciais para a decomposição da tensão do fluido nas direções normal e tangencial à superfície. Assim, a Equação 3.36 pode ser reescrita em sua versão discretizada:

$$\mathbf{F} \approx \sum_{i \in \Gamma_{af}} (-p_i \mathbf{n}_i + \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{M}_{af}(i) \quad (4.58)$$

O tensor de tensões viscosas $\boldsymbol{\tau}$ pode ser representado efetivamente por:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{Re}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = \frac{1}{Re} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

A pressão p , obtida diretamente nos nós da malha, atua na direção da normal, contribuindo para o esforço perpendicular à superfície do corpo. Já a tensão de cisalhamento, associada aos efeitos viscosos, depende dos gradientes espaciais do campo de velocidades, os quais são obtidos numericamente por meio das matrizes derivadas $\mathbf{G}\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{G}\mathbf{v}_y$. Essas matrizes, construídas durante a formulação do problema, contêm os coeficientes responsáveis por calcular, via interpolação, as derivadas parciais das componentes de velocidade u e v nas direções x e y . Elas são, portanto, fundamentais para reconstruir o tensor de tensões viscosas $\boldsymbol{\tau}$ segundo o modelo de fluido Newtoniano. Desse modo, temos:

$$F_x \approx (-p n_x) \mathbf{M}_{af} + \frac{1}{Re} [2\mathbf{G}\mathbf{v}_x u n_x + (\mathbf{G}\mathbf{v}_y u + \mathbf{G}\mathbf{v}_x v) n_y] \mathbf{M}_{af}^{-1} \quad (4.60)$$

$$F_y \approx (-p n_y) \mathbf{M}_{af} + \frac{1}{Re} [2\mathbf{G}\mathbf{v}_y v n_y + (\mathbf{G}\mathbf{v}_y u + \mathbf{G}\mathbf{v}_x v) n_x] \mathbf{M}_{af}^{-1} \quad (4.61)$$

onde n_x e n_y representam as componentes dos vetores normais de todos os pontos da superfície do aerofólio. A força resultante \mathbf{F} é diretamente decomposta em suas componentes nas direções x e y , fornecendo F_x e F_y , respectivamente. Considerando que o escoamento livre está orientado ao longo do eixo x , essas componentes correspondem, de forma natural, às forças de arrasto D (na direção do escoamento) e sustentação L (na direção perpendicular). Dessa forma, os valores obtidos para F_x e F_y representam diretamente as forças aerodinâmicas de interesse.

Para a obtenção dos coeficientes adimensionais de arrasto C_D e sustentação C_L , as forças F_x e F_y devem ser aplicados diretamente nas Equações 3.40 e 3.41, apresentadas no Capítulo 3, permitindo o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos com base nas forças globais atuantes sobre o corpo.

Capítulo 5

Algoritmo e Metodologia

5.1 Geração de Malha

Para a geração da malha, utilizou-se o software Gmsh, uma ferramenta gratuita e amplamente difundida para modelagem geométrica e discretização de domínios. Sua interface permite tanto a construção manual quanto programada de geometrias, com flexibilidade para controlar a densidade de elementos em diferentes regiões. Após a definição da geometria e das regiões físicas, como as fronteiras do canal e o contorno do aerofólio, o Gmsh exporta os dados no formato `.msh`, amplamente compatível com códigos numéricos desenvolvidos externamente, como o utilizado neste trabalho.

A malha gerada é composta por elementos triangulares não estruturados, adequados à representação de geometrias complexas. Como o modelo numérico emprega elementos do tipo P1P1+, foi necessário adicionar de forma manual, diretamente no código, um ponto no centro de cada triângulo, responsável por armazenar o grau de liberdade adicional da velocidade.

Considerando o regime moderado do número de Reynolds adotado nesta simulação, tornou-se indispensável aplicar estratégias de refinamento local da malha em regiões críticas do escoamento. Como mostrado na Figura 5.1, nas proximidades do aerofólio, ocorrem fenômenos complexos, como a formação da camada limite viscosa, a possível separação do escoamento e a geração de vórtices desprendidos que caracterizam a esteira a jusante. Para representar adequadamente esses efeitos, a malha foi densificada ao redor do contorno do aerofólio e na região posterior a ele,

permitindo uma resolução espacial mais refinada capaz de capturar com precisão os intensos gradientes de velocidade e pressão. Esse refinamento é essencial para modelar corretamente tanto os efeitos de cisalhamento nas superfícies quanto as estruturas vorticosas associadas ao regime de escoamento considerado.

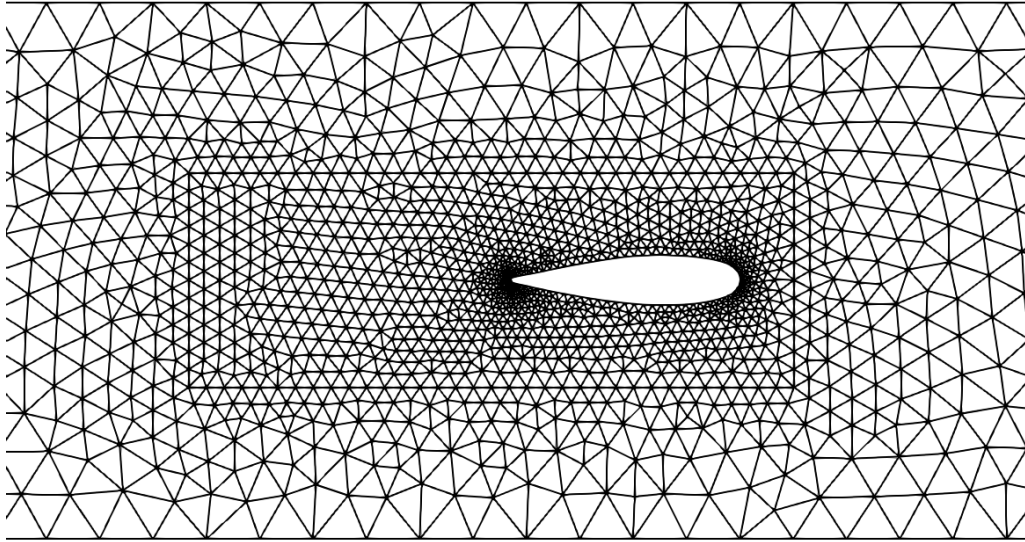


Figura 5.1: Esquema de refinamento de malha adotado. Os elementos próximos ao sólido devem ser mais refinados para capturar com mais precisão os valores de velocidade e pressão. O mesmo é válido para a região a jusante que é onde ocorrem fenômenos como separação do escoamento e vórtices.

A malha final apresenta uma transição suave no tamanho dos elementos, assegurando boa qualidade geométrica e evitando problemas numéricos como ângulos degenerados ou má representação de fronteiras. Essa estrutura permite que as equações governantes sejam resolvidas com maior estabilidade e precisão, contribuindo significativamente para a fidelidade da simulação.

5.2 Estrutura de Algoritmo Numérico

A implementação computacional foi desenvolvida em linguagem Python, utilizando uma estrutura modular que favorece a legibilidade e a organização do

código. Foram empregadas bibliotecas fundamentais para a manipulação numérica e de dados, como NumPy, para operações vetoriais eficientes; SciPy, com destaque para seus recursos de álgebra linear esparsa; e Meshio, utilizada para leitura e interpretação de arquivos de malha no formato .msh, exportados do Gmsh. O algoritmo foi estruturado para simular o escoamento de forma precisa e estável, respeitando as particularidades da formulação adotada. A seguir, apresenta-se de forma concisa a lógica de execução do código:

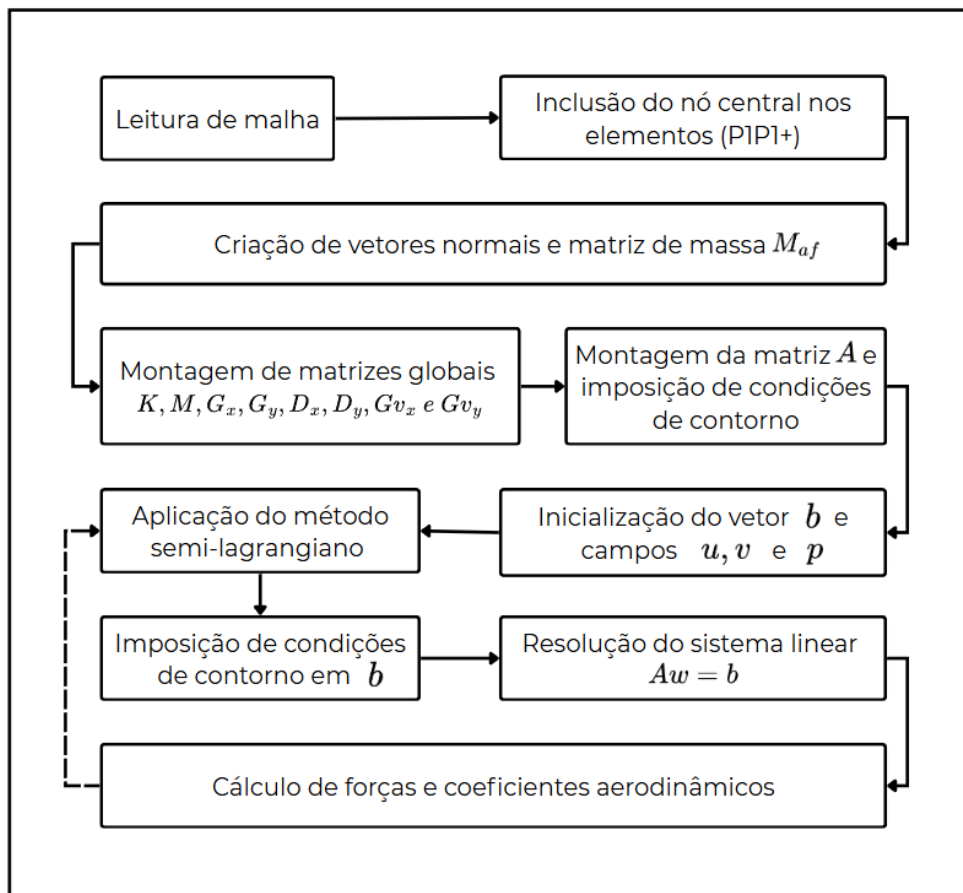


Figura 5.2: Esquema de funcionamento do código implementado. A estrutura do algoritmo é mostrada passo a passo até a resolução das equações de governo e posterior cálculo de coeficientes aerodinâmicos.

Inicialmente, o código realiza a leitura da malha gerada no Gmsh por meio da biblioteca Meshio, que permite importar as coordenadas dos nós, a matriz de conectividade (IEN) dos elementos triangulares e as informações sobre os nós de contorno, devidamente classificados pelas regiões físicas da geometria. Após isso, é

feita a inclusão manual dos nós centrais de cada elemento.

Com os dados de contorno importados, os nós pertencentes à superfície do aerofólio são identificados e isolados. A partir desses nós, são construídos os vetores normais em cada ponto da superfície e montada a matriz de massa unidimensional \mathbf{M}_{af} correspondente ao contorno do aerofólio, necessária para o cálculo posterior das forças aerodinâmicas.

Na sequência, é realizada a montagem das matrizes globais do sistema: matriz de rigidez viscosa \mathbf{K} , matriz de massa \mathbf{M} , matrizes de gradiente \mathbf{G}_x e \mathbf{G}_y , suas transpostas \mathbf{D}_x e \mathbf{D}_y e matrizes convectivas \mathbf{Gv}_x e \mathbf{Gv}_y . Nessa etapa, as condições de contorno são incorporadas diretamente na estrutura das matrizes, assegurando a coerência física do problema.

Com as matrizes globais definidas, monta-se a matriz do sistema linear \mathbf{A} a qual incorpora os efeitos viscosos, convectivos e de acoplamento entre velocidade e pressão. Simultaneamente, o vetor de solução b é inicializado com as componentes de velocidade u , v e pressão p , onde se impõem as condições iniciais definidas para o problema.

A partir desse ponto, inicia-se o laço temporal da simulação. A cada passo de tempo, o método semi-Lagrangeano é empregado para calcular a velocidade nos pontos de partida do escoamento, retrocedendo as partículas a partir da malha de Euler. Em seguida, o vetor b é reconstruído com base na nova configuração do campo de velocidades, e as condições de contorno são novamente aplicadas para garantir a consistência física.

Com o sistema montado, resolve-se a equação matricial $\mathbf{A}w = b$, obtendo-se as novas soluções para u , v e p . Esses valores são então atualizados para o próximo passo de tempo. Por fim, com as velocidades conhecidas, aplicam-se as matrizes convectivas \mathbf{Gv}_x e \mathbf{Gv}_y para calcular os gradientes de velocidade ao longo do contorno do aerofólio. Esses gradientes, combinados com os vetores normais, a matriz de massa do aerofólio e o campo de pressão, permitem calcular as forças fluido-dinâmicas e, a partir delas, os coeficientes aerodinâmicos de arrasto e sustentação. O ciclo então se reinicia, repetindo-se até atingir o tempo final da simulação.

Além da organização estrutural do algoritmo, é relevante destacar os aspectos relacionados ao desempenho computacional. Durante a execução da simulação,

observou-se que a maior parte do tempo de processamento está concentrada em duas etapas principais: a resolução do sistema linear e a implementação do método semi-Lagrangeano, ambas localizadas dentro do laço temporal. O método semi-Lagrangeano, apesar de eficiente do ponto de vista da estabilidade, apresenta grande custo computacional devido à busca iterativa pelo ponto de partida dentro da malha, exigindo diversas operações de interpolação e verificação topológica.

Tabela 5.1: Tempo aproximado de processamento do semi-Lagrangeano para malhas de diferentes tamanhos.

Método semi-Lagrangeano		
Nós	Elementos	Tempo (s)
1123	723	0,11
4414	2892	0,47
17503	11568	2,62
69709	46272	16,91
278233	185088	131,97

Já a resolução do sistema linear $\mathbf{A}w = b$ é uma etapa demorada, não apenas pelo grande número de graus de liberdade envolvidos, mas também pela necessidade de manipulação eficiente de matrizes esparsas, cuja estrutura impõe desafios adicionais à performance computacional, especialmente em simulações de longa duração ou com malhas refinadas.

Tabela 5.2: Tempo aproximado de processamento do sistema $\mathbf{A}w = b$ para malhas de diferentes tamanhos.

Sistema $\mathbf{A}w = b$		
Nós	Elementos	Tempo (s)
1123	723	0,02
4414	2892	0,10
17503	11568	0,99
69709	46272	10,65
278233	185088	127,11

Outra etapa que também demanda recursos computacionais relevantes, embora esteja localizada fora do laço temporal, é a montagem das matrizes globais. Esse processo compreende a integração das funções de forma e de suas derivadas em cada elemento da malha, seguida da agregação dos resultados locais para compor as matrizes que descrevem o sistema como um todo. Apesar de representar um custo computacional significativo, trata-se de uma operação realizada apenas uma vez no início da simulação, o que a caracteriza como um custo fixo.

A identificação desses principais gargalos, especialmente a resolução do sistema linear e a etapa de busca do método semi-Lagrangeano, é fundamental não apenas para a avaliação do desempenho atual do algoritmo, mas também para orientar futuras melhorias. Estratégias como o uso de bibliotecas paralelas e técnicas de pré-condicionamento podem ser exploradas para reduzir significativamente o tempo de execução, aumentando a viabilidade de simulações mais complexas e em malhas mais refinadas.

5.3 Análise de Eficiência Computacional: CPU vs GPU

As GPUs (Placas de vídeo) vêm ganhando destaque nas últimas décadas pelo seu potencial de paralelismo massivo, que permite realizar milhares de operações simultaneamente. Ao contrário das CPUs (Processadores), que possuem poucos núcleos otimizados para tarefas sequenciais, as GPUs são compostas por centenas ou milhares de núcleos voltados a operações paralelas em larga escala, especialmente vantajosas em cálculos envolvendo grandes volumes de dados matriciais, como é o caso da álgebra linear esparsa. Essa característica torna as GPUs especialmente eficazes em aplicações científicas e de engenharia que exigem alto poder computacional, conforme vem sendo discutido pela literatura nos últimos anos, como em D’Ambra et al. (2024) e Xiang et al. (2025).

Para viabilizar a execução de código científico em GPU, diversas bibliotecas Python foram desenvolvidas como alternativas às bibliotecas convencionais utilizadas em CPU. Dentre elas, destaca-se a biblioteca CuPy, que oferece uma API similar à do NumPy, permitindo uma transição relativamente simples de código. Para manipulação de matrizes esparsas na GPU, há ferramentas como `cupyx.scipy.sparse`, que espelham a funcionalidade da biblioteca `scipy.sparse`, amplamente utilizada em aplicações de Elementos Finitos. Assim, torna-se possível portar trechos críticos de código para GPU com modificações mínimas, desde que respeitados os limites de memória e estrutura de dados compatíveis.

Neste trabalho, realizou-se uma comparação direta entre CPU e GPU apenas na etapa de resolução do sistema linear $\mathbf{A}w = b$ (Tabela 5.3), pois esta é a parte mais intensiva em operações matriciais e, portanto, mais representativa do potencial de aceleração oferecido pelas GPUs. Outras etapas do código, como o método semi-Lagrangeano, envolvem estruturas condicionais e laços temporais inerentes à linguagem Python, que não se beneficiam de forma significativa da execução em GPU.

Tabela 5.3: Tempo aproximado de processamento do sistema $\mathbf{A}w = b$ para GPU e CPU, com malhas de diferentes tamanhos.

Nós	Elementos	Tempo (s)	
		GPU	CPU
-	-		
49	28	0,0037	0,0004
181	112	0,0119	0,0015
697	448	0,0507	0,0069
2737	1792	0,2008	0,0597
10849	7168	1,3684	0,5859
43201	28672	11,5734	6,7558

Os testes foram conduzidos utilizando uma GPU NVIDIA RTX 2060, equipada com 6 GB de memória VRAM, e um processador AMD Ryzen 5 2600, ambos inseridos em um sistema com 32 GB de RAM. A comparação de desempenho foi realizada com diferentes tamanhos de malha, sendo a maior malha testada composta por aproximadamente 43 mil nós, limitada pela capacidade de memória da GPU. Os tempos de processamento foram analisados e plotados em escala log-log (Figura 5.3), permitindo visualizar o comportamento da eficiência computacional em função do tamanho das matrizes envolvidas.

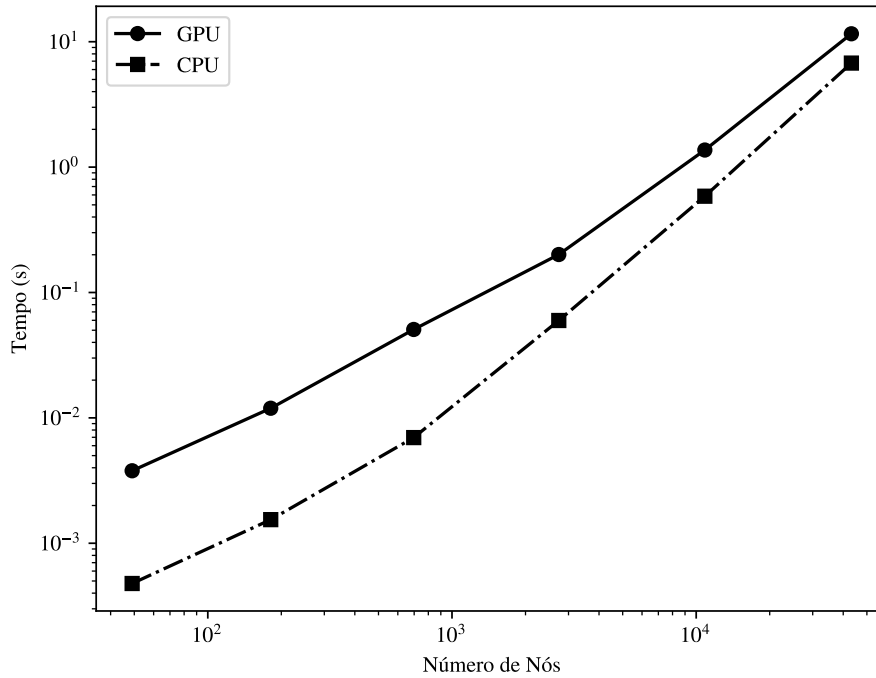


Figura 5.3: Tempo decorrido pelo número de nós, para CPU e GPU, em escala log-log. É possível observar uma vantagem inicial do processamento via CPU que tende a ser superada pela GPU com o aumento da malha.

Os resultados mostraram que, para malhas pequenas e médias, a CPU apresentou tempos de resolução inferiores aos da GPU. Isso se deve, em parte, ao overhead de comunicação entre CPU e GPU, e também à relativa ineficiência da GPU em operar em escalas pequenas, onde seu paralelismo não é plenamente explorado. No entanto, à medida que o tamanho da malha aumenta, a curva de tempo da CPU cresce mais rapidamente do que a da GPU. Essa tendência, evidenciada no gráfico log-log, indica que, para malhas maiores do que as testadas, caso não houvesse limitação de VRAM, a GPU tende a superar a CPU em desempenho, confirmando seu potencial de aceleração para aplicações em larga escala.

Apesar de, em todos os testes realizados, os tempos absolutos da CPU serem menores, os resultados obtidos apontam uma tendência clara de ganho de eficiência da GPU para problemas mais complexos. Essa observação sugere que, com o uso de placas gráficas com maior capacidade de memória e arquiteturas otimizadas, como as encontradas em GPUs voltadas a aplicações científicas (NVIDIA A100 / NVIDIA

H100), pode-se obter acelerações significativas na simulação de escoamentos com elevado número de graus de liberdade.

Esses resultados demonstram que a adoção de GPUs em simulações numéricas, ainda que limitada por questões de compatibilidade e memória, representa uma via promissora para simulações mais rápidas e eficientes no contexto da Fluidodinâmica Computacional.

Capítulo 6

Validação

6.1 Escoamento de Poiseuille

A validação de um código numérico constitui uma etapa essencial em estudos computacionais, pois assegura que a implementação esteja de acordo com os fundamentos físicos e matemáticos que definem o problema em análise. Para iniciar esse processo, foi adotado o caso do escoamento de Poiseuille, também conhecido como escoamento entre placas paralelas. Trata-se de uma configuração clássica na mecânica dos fluidos, cuja solução analítica é bem estabelecida. Uma representação esquemática do problema é dada pela Figura 6.1.

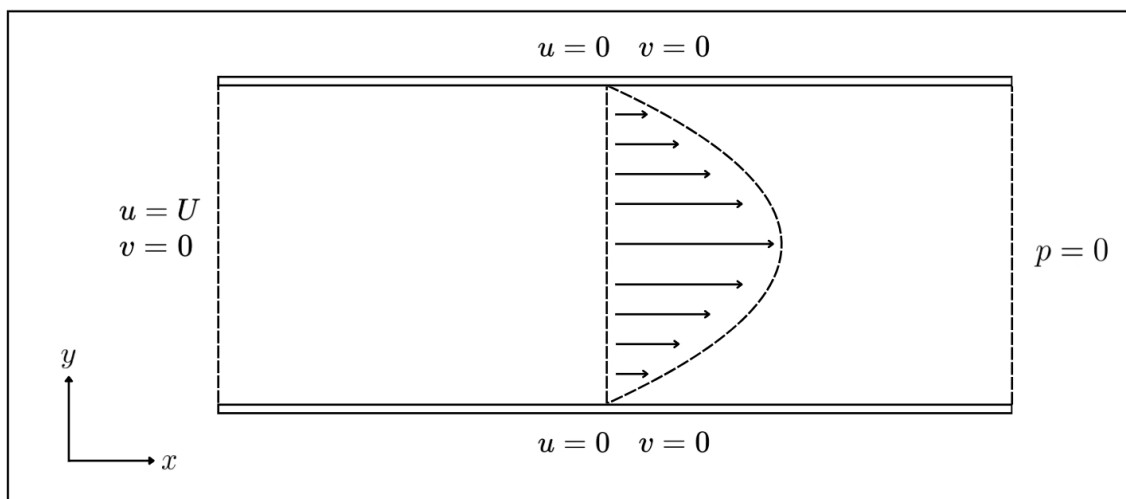


Figura 6.1: Representação do escoamento de Poiseuille. A velocidade é unidirecional e o gradiente de pressão é constante.

Esse escoamento corresponde a um regime laminar, incompressível e bidimensional, em um canal com paredes paralelas, onde a velocidade é unidirecional e o gradiente de pressão é constante. A solução analítica desse problema resulta em um perfil parabólico de velocidade, cuja expressão é dada por:

$$u = \frac{4U_m}{L^2} y (L - y) \quad (6.1)$$

em que $U_m = 1,5$ é a velocidade máxima, $L = 1$ é a distância entre as placas e y é o valor da coordenada vertical. A figura 6.2 mostra o perfil de velocidade u para o regime permanente com número de Reynolds $Re = 10$:

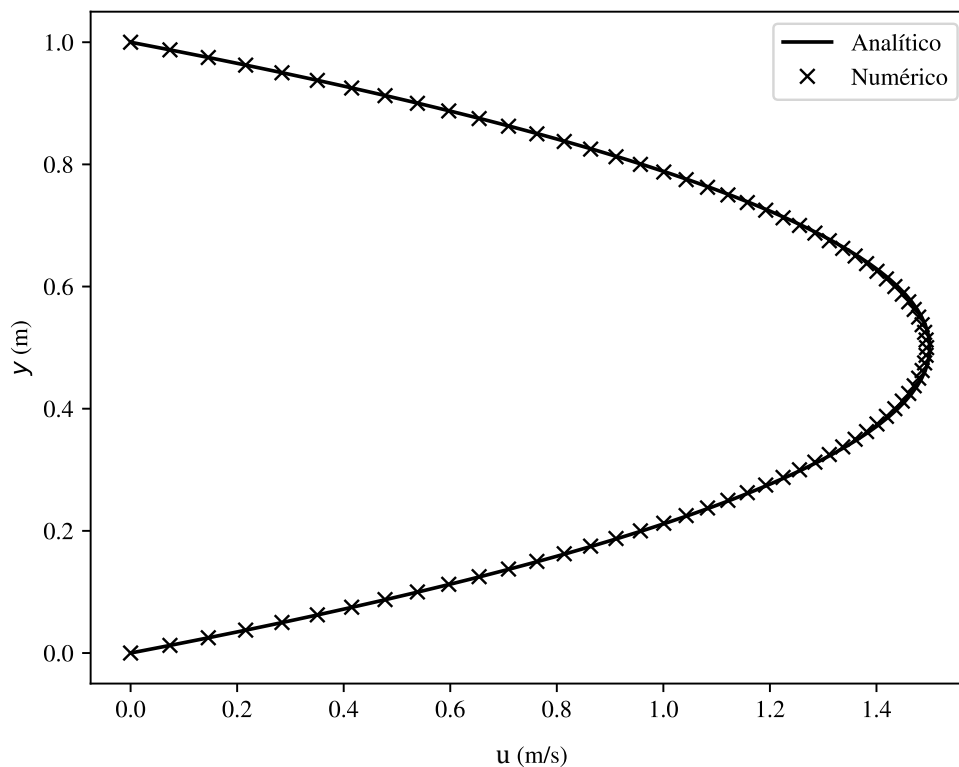


Figura 6.2: Comparativo entre o resultado numérico, obtido via simulação, e o analítico, calculado a partir da Equação 6.1.

É possível estimar o erro relativo para todos os nós da malha, levando em conta

a solução numérica e a analítica:

$$Erro = \sqrt{\frac{\sum (u_n - v_a)^2}{\sum v_a^2}} \quad (6.2)$$

Os valores u_n e v_a são as velocidades numéricas e analíticas, respectivamente. O erro relativo para diversas composições de malhas diferentes é apresentado pela Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Erro relativo para malhas de tamanhos diferentes.

Elementos	Erro Relativo %
360	6,21
1440	2,66
5760	1,44
23040	0,72
92160	0,36

A análise da convergência do método numérico implementado foi realizada por meio de plotagem do erro e do número de elementos em um gráfico log-log, conforme ilustrado pela Figura 6.3. A inclinação da curva no gráfico corresponde à ordem de convergência do método, e os resultados obtidos indicaram uma taxa aproximada de primeira ordem para a variável de velocidade.

Esse comportamento é compatível com o uso do elemento P1P1+, que, apesar de incluir um ponto adicional no centro de cada triângulo para interpolar a velocidade, mantém funções de forma lineares nos vértices para ambas as variáveis. A convergência de primeira ordem implica que o erro numérico decresce linearmente com o tamanho do elemento da malha, o que confirma a consistência da formulação e a correta implementação do esquema proposto.

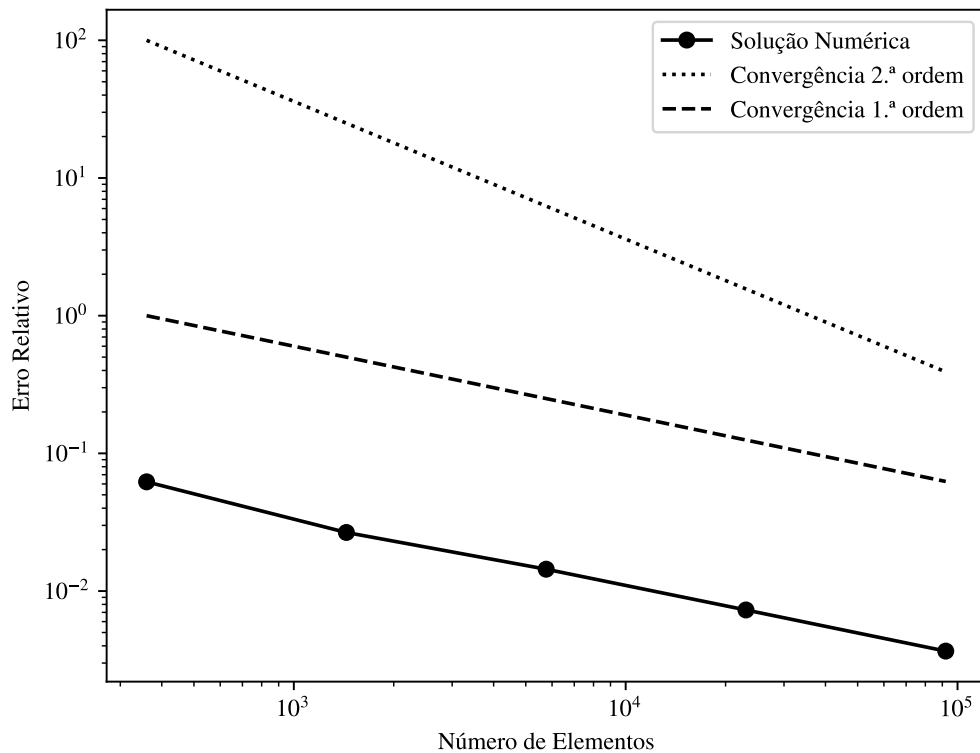


Figura 6.3: Ordem de convergência em escala log-log. É possível observar uma convergência aproximada de primeira ordem para a velocidade.

6.2 Escoamento em Cavidade com Tampa Móvel

Um segundo teste clássico aplicado para validação é o escoamento em uma cavidade quadrada com tampa móvel. Este problema consiste em um domínio fechado, onde todas as paredes são estacionárias, exceto a tampa superior que se move com velocidade $U = 1$ constante. A figura 6.4 ilustra as características do problema:

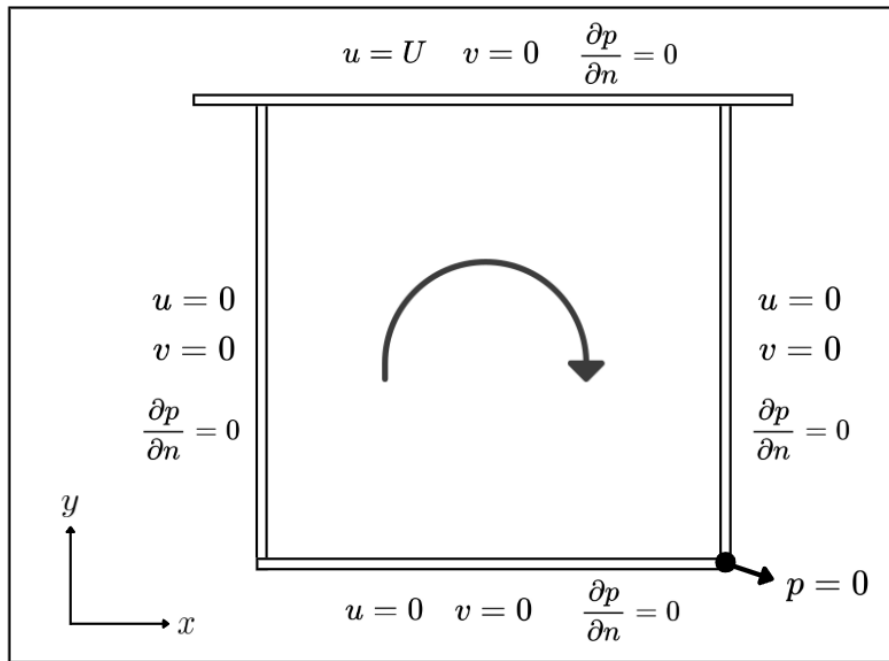
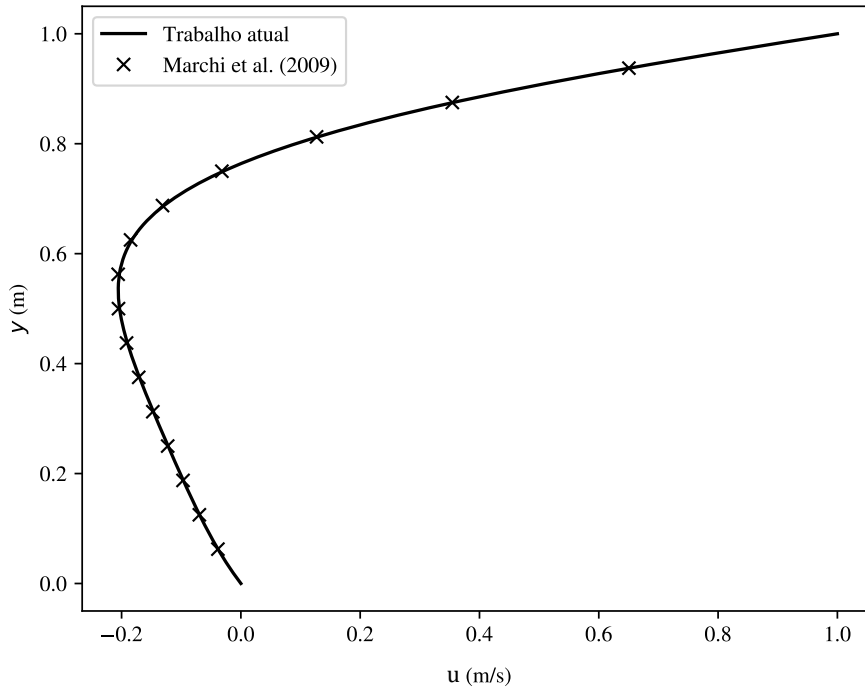


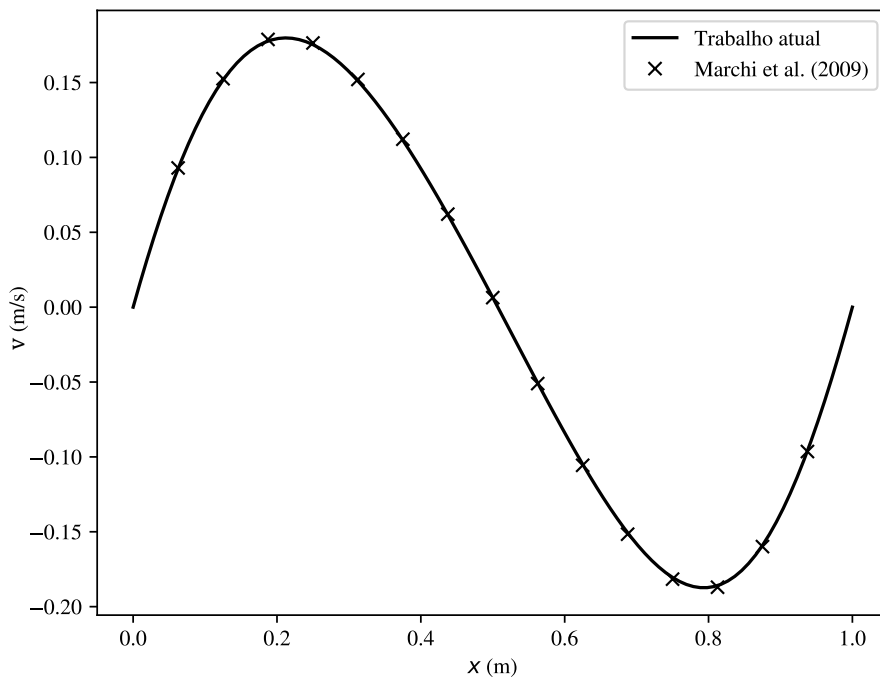
Figura 6.4: Representação do escoamento em cavidade com tampa móvel. As paredes são estacionárias com exceção da tampa superior, que se move a uma velocidade $U = 1$.

O escoamento foi simulado para números de Reynolds de 10, 100 e 1000. As Figuras 6.5, 6.6 e 6.7 apresentam, respectivamente, os perfis das componentes horizontal e vertical da velocidade no regime permanente para cada valor de Reynolds. Os pontos utilizados para a plotagem dos gráficos são aqueles presentes no centro do domínio, com $x = 0,5$ para u e $y = 0,5$ para v .

A malha utilizada nesse teste possui 239.583 nós e 80.215 elementos. Os resultados numéricos obtidos foram comparados com os dados de referência disponíveis em Marchi et al. (2009), mostrando boa concordância ao longo dos perfis avaliados. Essa comparação reforça a capacidade do modelo em capturar adequadamente os efeitos do número de Reynolds sobre a estrutura do escoamento, mesmo em diferentes regimes de viscosidade e inércia.

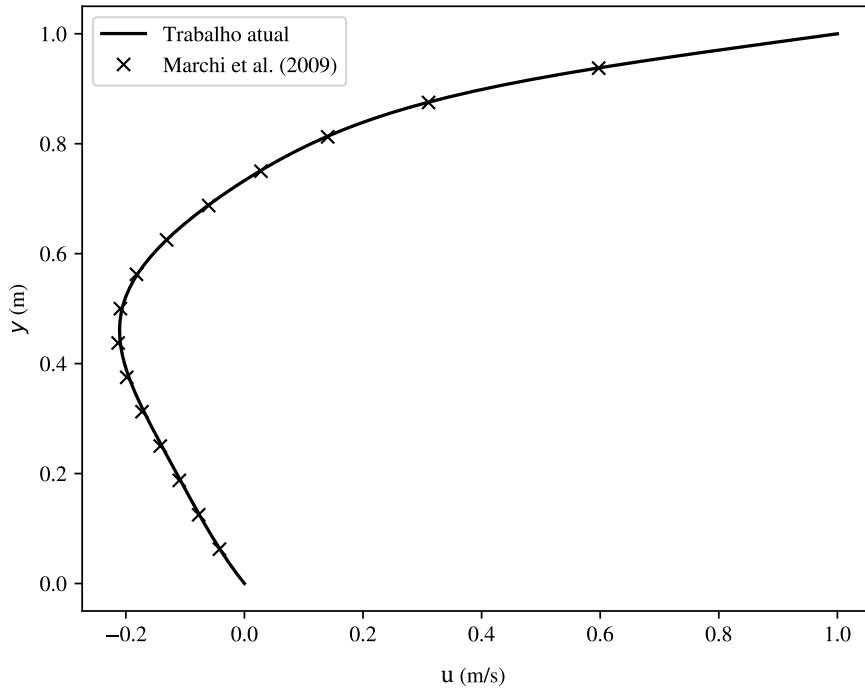


(a) Velocidade u para os pontos em que $x = 0,5$

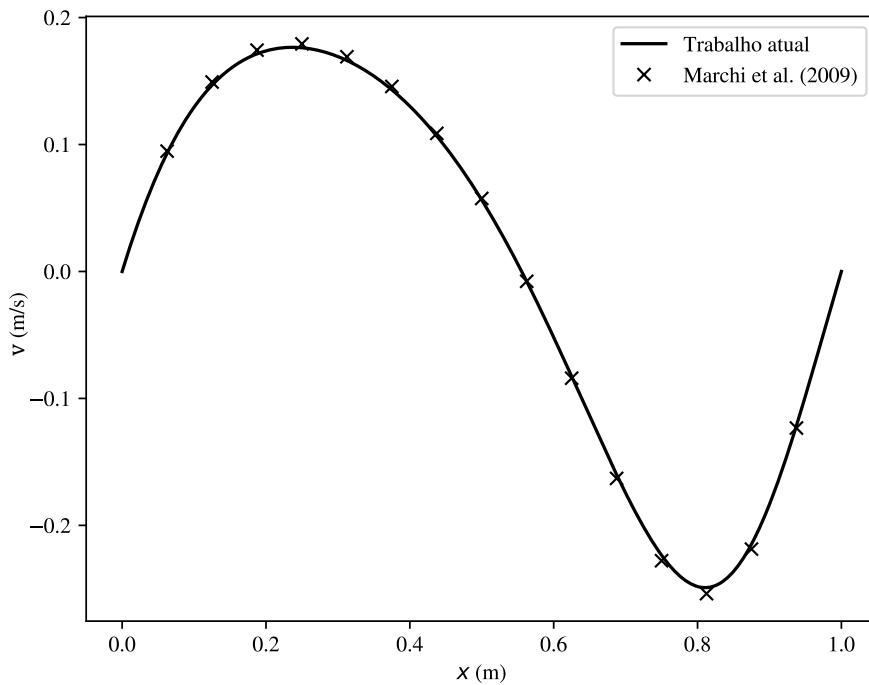


(b) Velocidade v para os ponto em que $y = 0,5$

Figura 6.5: Perfil de velocidades horizontal u e vertical v para $Re = 10$. A concordância entre os resultados obtidos na simulação com a referência, Marchi et al. (2009), é alta.

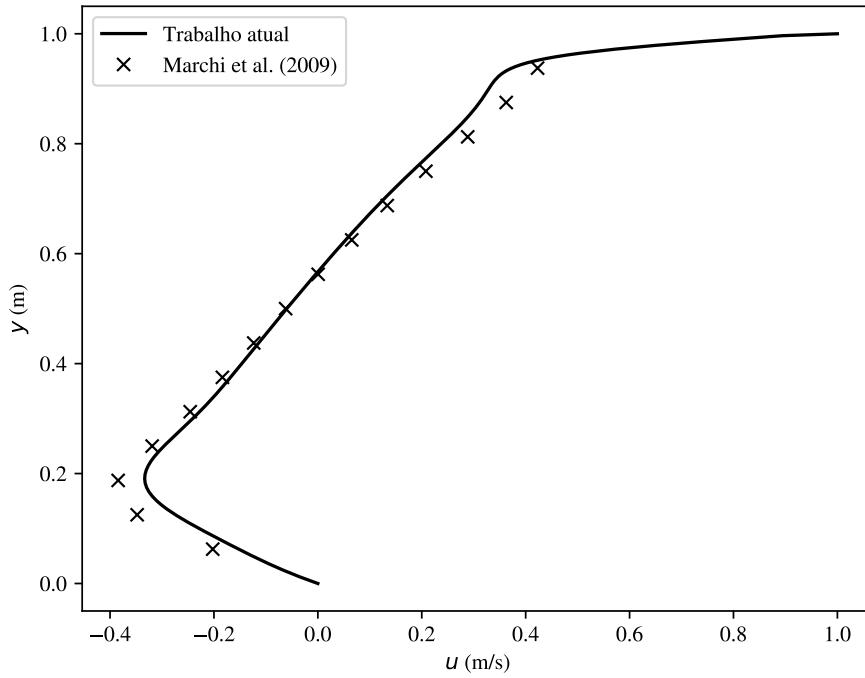


(a) Velocidade u para os pontos em que $x = 0,5$

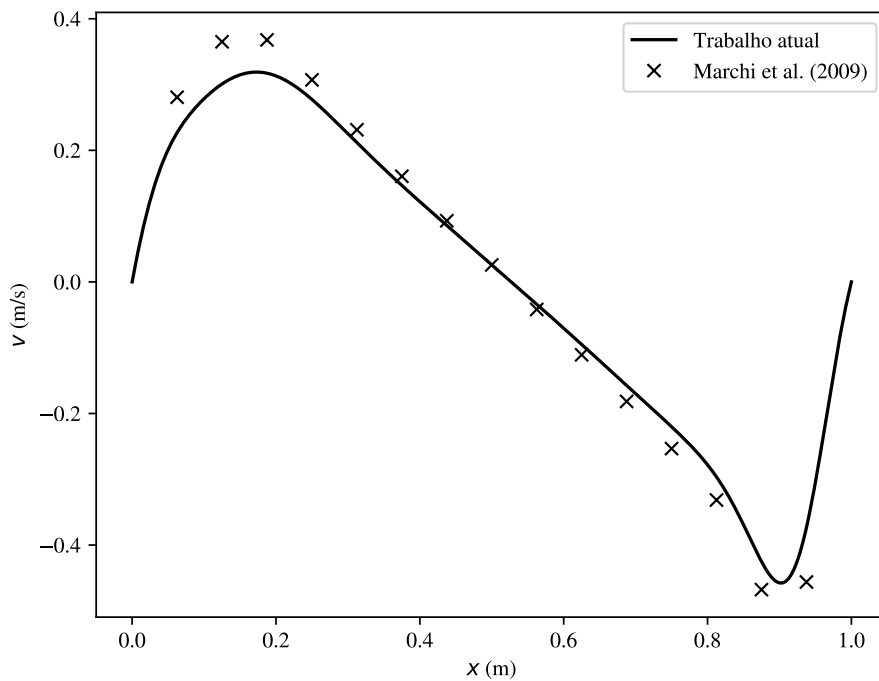


(b) Velocidade v para os ponto em que $y = 0,5$

Figura 6.6: Perfil de velocidades horizontal u e vertical v para $Re = 100$. Mesmo aumentando o Re em 10 vezes, os resultados obtidos são bem próximos aos valores de Marchi et al. (2009).



(a) Velocidade u para os pontos em que $x = 0,5$



(b) Velocidade v para os ponto em que $y = 0,5$

Figura 6.7: Perfil de velocidades horizontal u e vertical v para $Re = 1000$. Com o valor cada vez maior de Re , o resultado numérico tende a se distanciar dos valores de referência, mantendo-se entretanto em uma uma faixa razoável.

6.3 Escoamento em Torno de um Cilindro

Além das velocidades do escoamento, é necessário realizar a validação do cálculo das forças e coeficientes aerodinâmicos, sendo esta uma etapa fundamental na verificação da precisão do método numérico aplicado. Nesse contexto, o problema do escoamento bidimensional incompressível em torno de um cilindro circular fixado em um canal retangular se destaca como um dos testes mais consagrados da literatura. O estudo de referência é fornecido por Turek and Schäfer (1996) e a representação esquemática é ilustrada pela Figura 6.8:

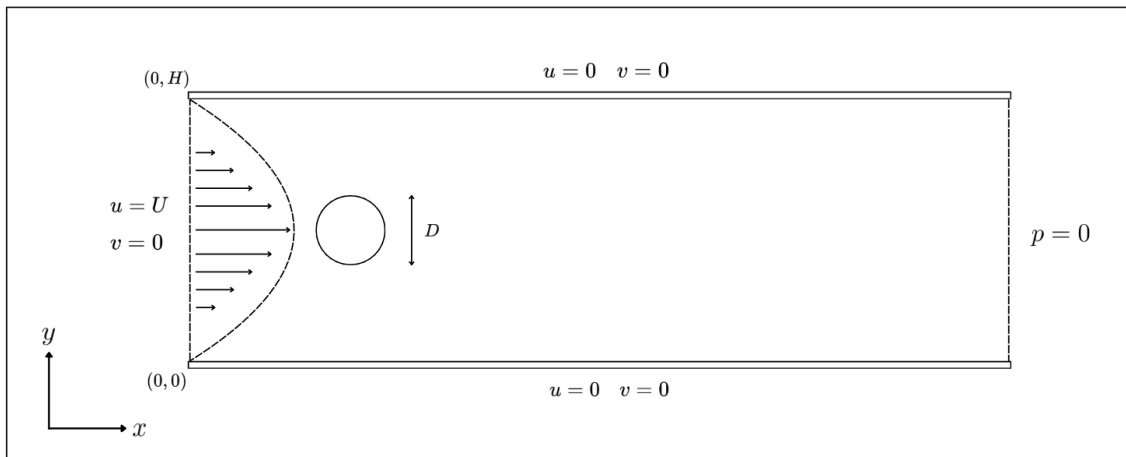


Figura 6.8: Representação do escoamento em torno de um cilindro fixo em que no contorno de entrada do canal a velocidade tem perfil parabólico U .

onde $D = 0,1 \text{ m}$, $H = 0,41 \text{ m}$ e o comprimento do domínio mede $2,2 \text{ m}$. O número de Reynolds adotado é 100 e o contorno de inlet tem um perfil parabólico como velocidade de entrada U , dado por:

$$U = \frac{4U_m y(H - y)}{H^2} \quad (6.3)$$

em que $U_m = 1,5 \text{ m/s}$ é a velocidade máxima. A malha implementada nesse teste possui 129.239 nós e 85.880 elementos. A Tabela 6.2 apresenta os valores de C_L e C_D , além da diferença de pressão Δp e número de Strouhal St , obtidos ao final da simulação. Também foram inseridos alguns dos resultados disponíveis em Turek and

Schäfer (1996) para comparação.

Tabela 6.2: Comparação de resultados obtidos na simulação com a literatura.

-	$C_D \text{ max}$	$C_L \text{ max}$	St	Δp
Trabalho atual	2,9385	1,0469	0,2619	2,4376
Turek and Schäfer (1996)	3,2358	1,0069	0,3003	2,4892
	3,2267	0,9862	0,3017	2,4833
	3,2314	0,9999	0,2973	2,4707
	3,1822	1,0692	0,2960	2,6066

No regime transiente do escoamento com $Re = 100$, observa-se que os coeficientes de arrasto C_D (Figura 6.9) e de sustentação C_L (Figura 6.10) passam a exibir comportamento oscilatório após a fase inicial de estabilização, o que é o comportamento esperado.

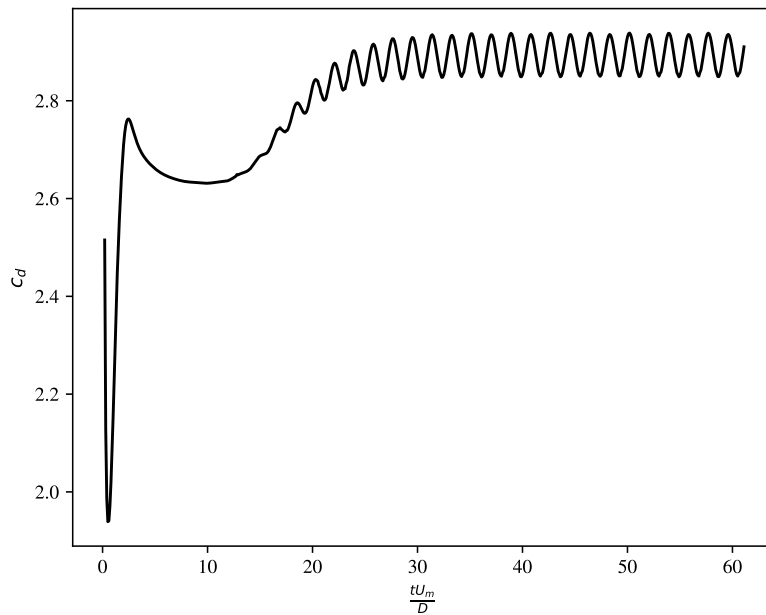


Figura 6.9: Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU_m/D .

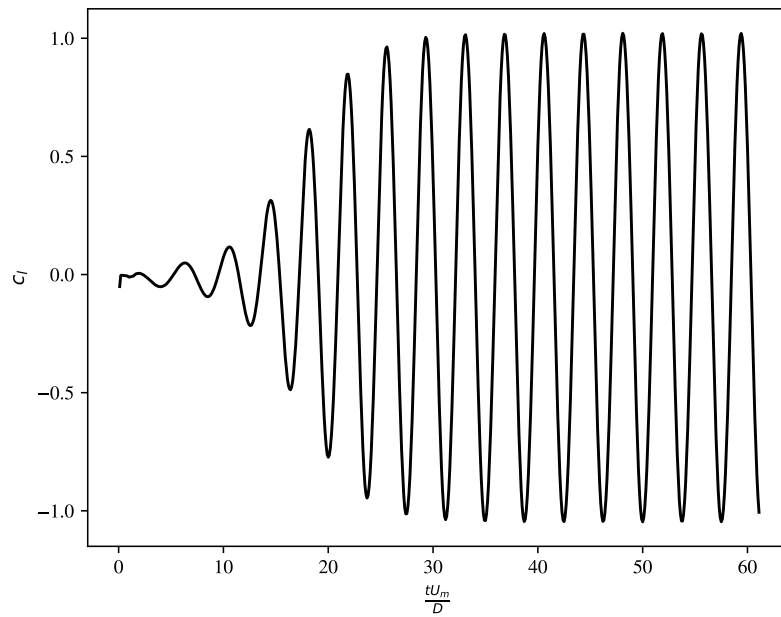
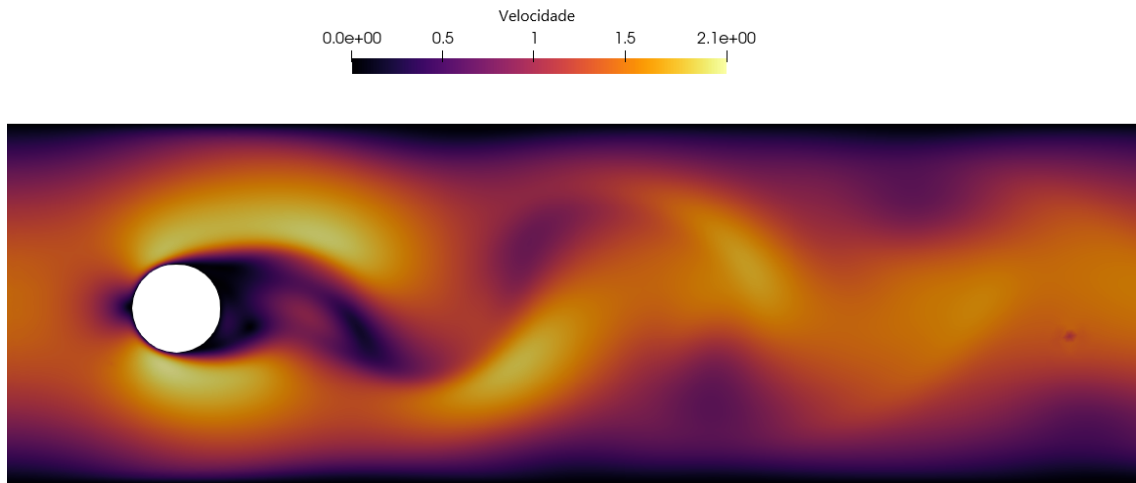


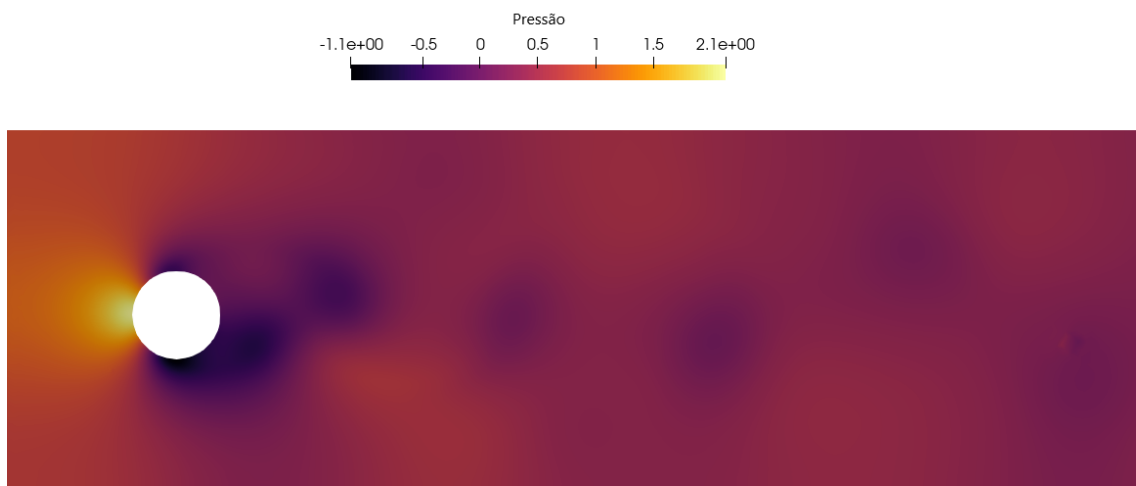
Figura 6.10: Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU_m/D .

Esse padrão periódico é característico da formação e desprendimento alternado de vórtices na esteira do cilindro, conhecido como padrão de von Kármán. O gráfico do C_L , em particular, apresenta oscilações em torno de zero, refletindo a alternância da força de sustentação conforme os vórtices se desprendem de forma simétrica. Já o C_D oscila em torno de um valor médio positivo, com amplitude menor, devido à contribuição dominante da resistência ao movimento.

Esses resultados indicam que o modelo implementado foi capaz de capturar a dinâmica do escoamento com fidelidade, reproduzindo os principais efeitos físicos esperados. Por fim, a Figura 6.11 permite a melhor visualização dos padrões de vórtices alternados para os campos de velocidade e pressão.



(a) Distribuição da magnitude do vetor velocidade, em que a cor preta indica valor nulo e a cor amarela corresponde à magnitude máxima $|v| = 2, 1$.



(b) Campo de pressão representado por um gradiente de cores, onde o preto indica os menores valores de pressão e o amarelo corresponde aos valores mais elevados.

Figura 6.11: Campos de velocidade e pressão de um cilindro para Re 100. As regiões de baixa pressão em (b) correspondem aproximadamente aos centros dos vórtices, os quais podem ser identificados na distribuição apresentada em (a).

Capítulo 7

Resultados

Este capítulo apresenta os principais resultados obtidos a partir da simulação numérica do escoamento viscoso e incompressível ao redor de um aerofólio, posicionado no interior de um túnel de vento. O problema simulado visa representar, de forma aproximada, as condições físicas observadas em ensaios experimentais conduzidos no Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Aerodinâmica (LabMFA) da Escola Politécnica da UFRJ, onde um aerofólio de madeira é submetido a uma corrente de ar controlada.

Durante o processo de geração da malha computacional, a geometria do aerofólio foi discretizada em uma configuração invertida em relação à montagem física no túnel de vento. Apesar de essa inversão não ter sido proposital, optou-se por manter a simulação nessa configuração por razões técnicas e conceituais. O domínio computacional foi configurado em duas dimensões, considerando um escoamento bidimensional ao redor do perfil do aerofólio. A geometria do aerofólio foi aproximada a partir de medições visuais e fotográficas do modelo físico. O campo de velocidades imposto na entrada do túnel corresponde a uma velocidade média de aproximadamente 5 km/h, o que, considerando as propriedades do ar a 25°C ($\rho = 1,184 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 1,849 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$), resulta em um número de Reynolds da ordem de $Re \approx 11400$. Os parâmetros físicos do domínio são representados na Figura 7.1.

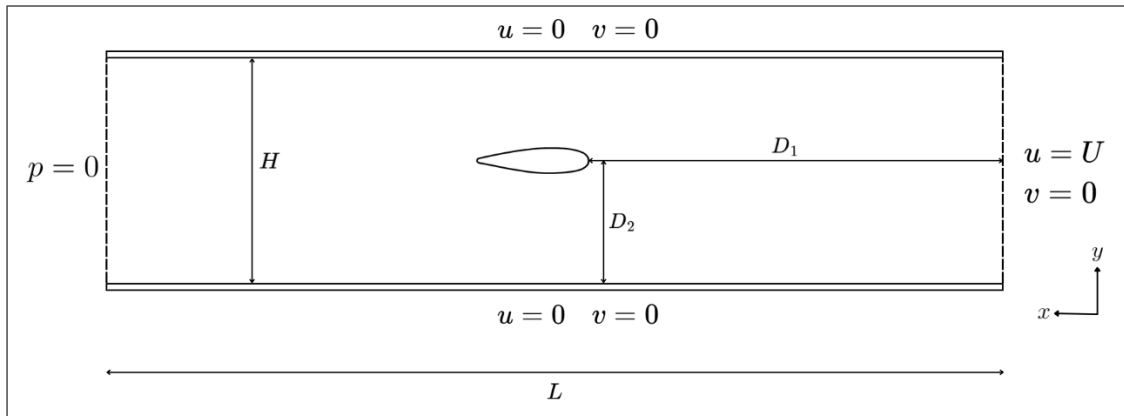


Figura 7.1: Representação dos parâmetros do escoamento em torno do aerofólio em túnel de vento. A distância D_1 é dada partir da entrada, enquanto que D_2 é dada a partir da parede inferior. A velocidade U de entrada é constante e igual a 5km/h.

O comprimento do domínio é $L = 173 \text{ cm}$, e a altura é dada por $H = 30 \text{ cm}$. As distâncias $D_1 = 80,5 \text{ cm}$ e $D_2 = 15,5 \text{ cm}$ são estabelecidas a partir da entrada e da parede do túnel, respectivamente. A corda tem tamanho $c = 12,85 \text{ cm}$ e a espessura máxima é $2,77 \text{ cm}$. A malha utilizada para o domínio possui 377.635 nós e 251.290 elementos, e foram realizadas simulações para cinco ângulos de ataque α : -6° , -3° , 0° , 3° e 6° .

As Figuras 7.2 e 7.3 apresentam os valores dos coeficientes C_L e C_D para $\alpha = 0^\circ$. Para esse caso, o escoamento apresenta um regime oscilatório típico do desprendimento periódico de vórtices, com um valor médio de coeficiente de sustentação $C_{L_m} = -0,089$. Esse valor levemente negativo indica uma assimetria residual no perfil, amplificada pela inversão da geometria e reforçada pelo fato de a amplitude inferior das oscilações ser mais acentuada do que a superior. O coeficiente de arrasto médio registrado foi de $C_{D_m} = 0,162$, valor plenamente compatível com os níveis esperados para perfis simétricos ou quase simétricos operando nesse regime de Reynolds. O número de Strouhal, calculado em $St = 0,196$, encontra-se dentro da faixa típica esperada para este tipo de escoamento, sugerindo um padrão de von Kármán bem estabelecido. Os campos de velocidade e pressão, exibidos pela Figura 7.4, confirmam as tendências dos gráficos dos coeficientes C_L e C_D .

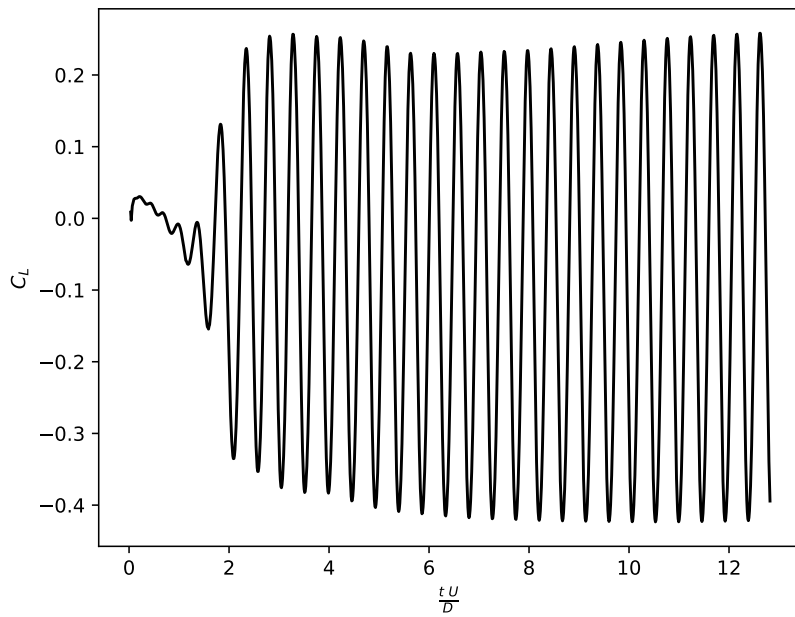


Figura 7.2: Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 0^\circ$.

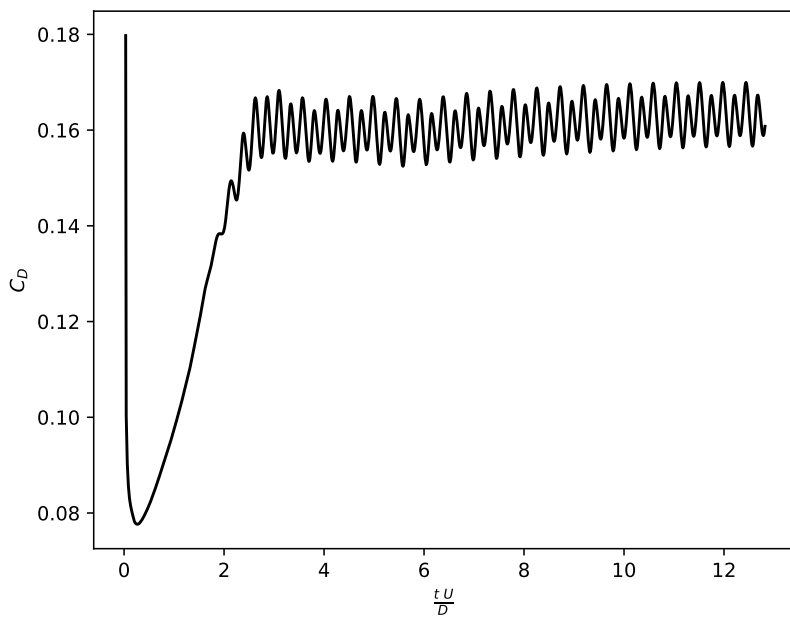
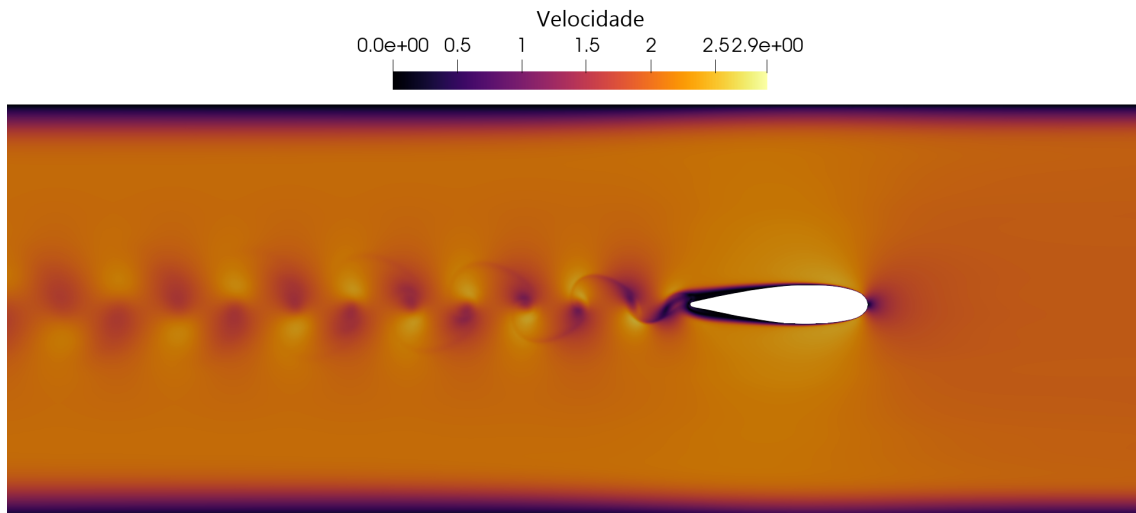
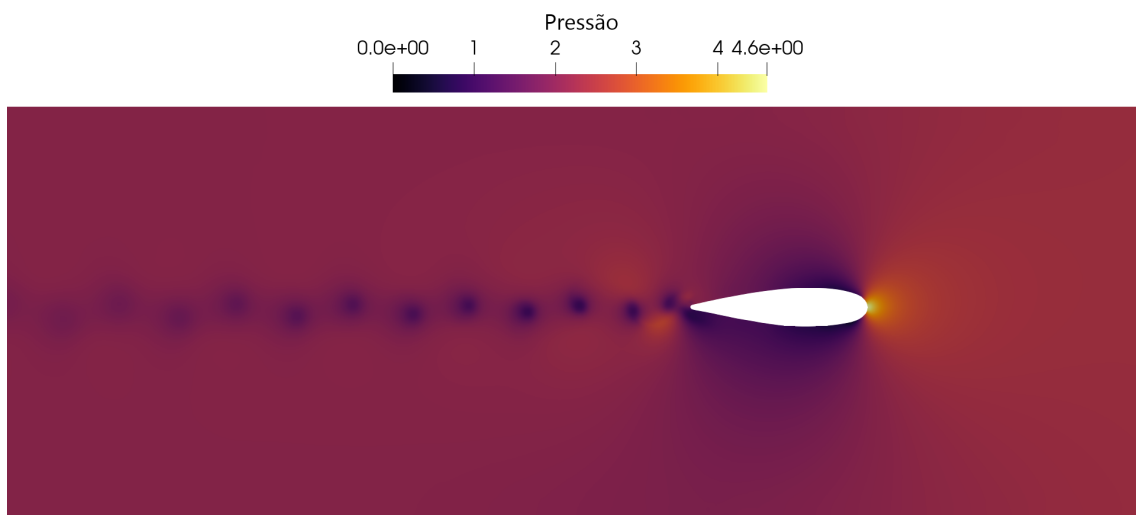


Figura 7.3: Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 0^\circ$.



(a) Distribuição da magnitude do vetor velocidade, em que a cor preta indica valor nulo e a cor amarela corresponde à magnitude máxima $|v| = 2,9$.



(b) Campo de pressão representado por um gradiente de cores, onde o preto indica os menores valores de pressão e o amarelo corresponde aos valores mais elevados.

Figura 7.4: Campos de velocidade e pressão para um aerofólio simétrico em ângulo de ataque $\alpha = 0^\circ$. Como no caso do cilindro, existe a ocorrência de vórtices de von Kármán.

Para o ângulo de ataque igual a 3° , o comportamento do escoamento ao redor do aerofólio mantém características similares às observadas em 0° , porém com intensificação da sustentação negativa, o que é esperado devido à configuração adotada. O

coeficiente de sustentação médio obtido no regime permanente foi de $C_{L_m} = -0,284$, valor compatível com o crescimento quase linear de C_L em função do ângulo de ataque, comportamento comum para aerofólios simétricos ou quase simétricos em baixos números de Reynolds.

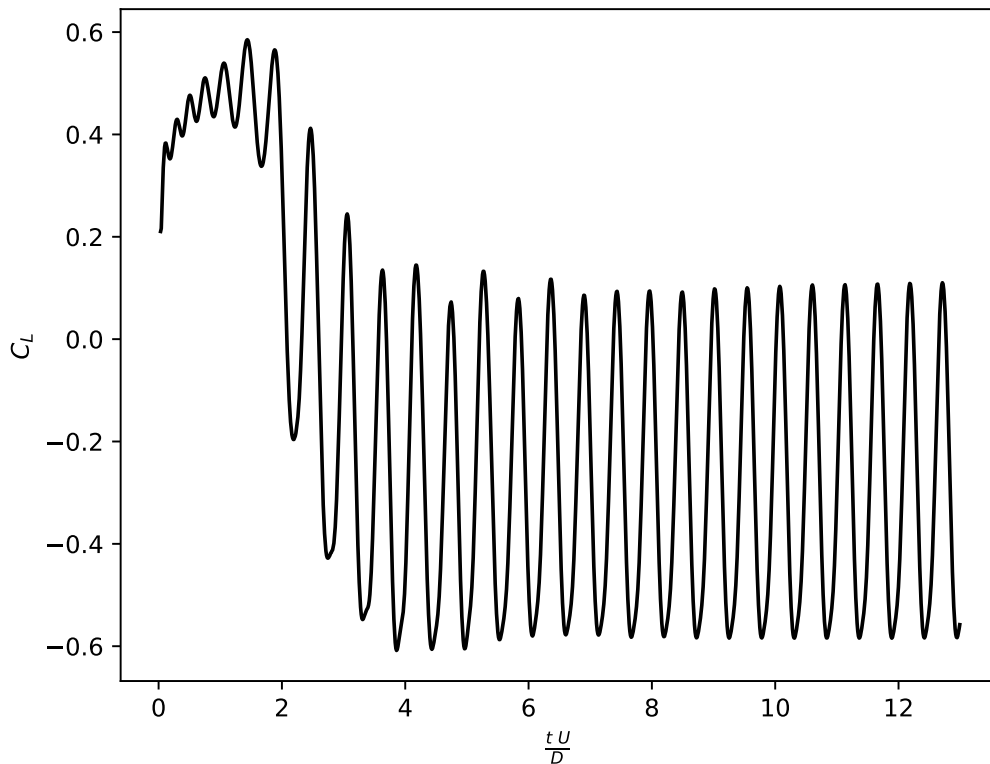


Figura 7.5: Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 3^\circ$.

O coeficiente de arrasto médio, por sua vez, foi de $C_{D_m} = 0,164$, muito próximo do valor obtido para ângulo de ataque zero, indicando que o acréscimo de ângulo ainda não produziu separações significativas ou aumento expressivo de perdas de energia no escoamento. Essa estabilidade do C_D em pequenos ângulos é típica de perfis que operam dentro da faixa linear de resposta aerodinâmica.

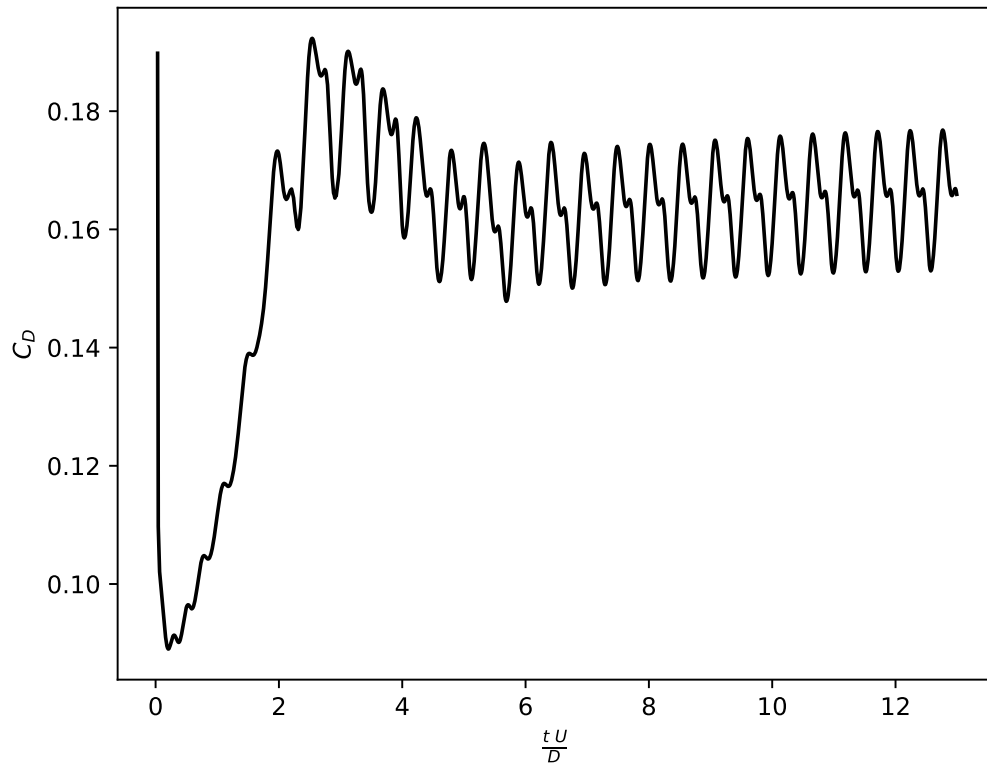
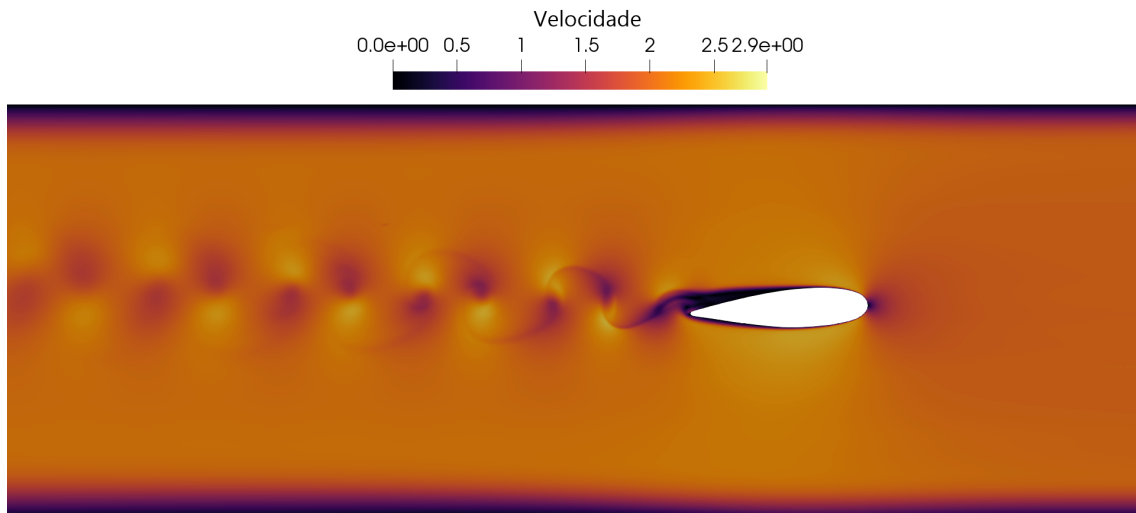
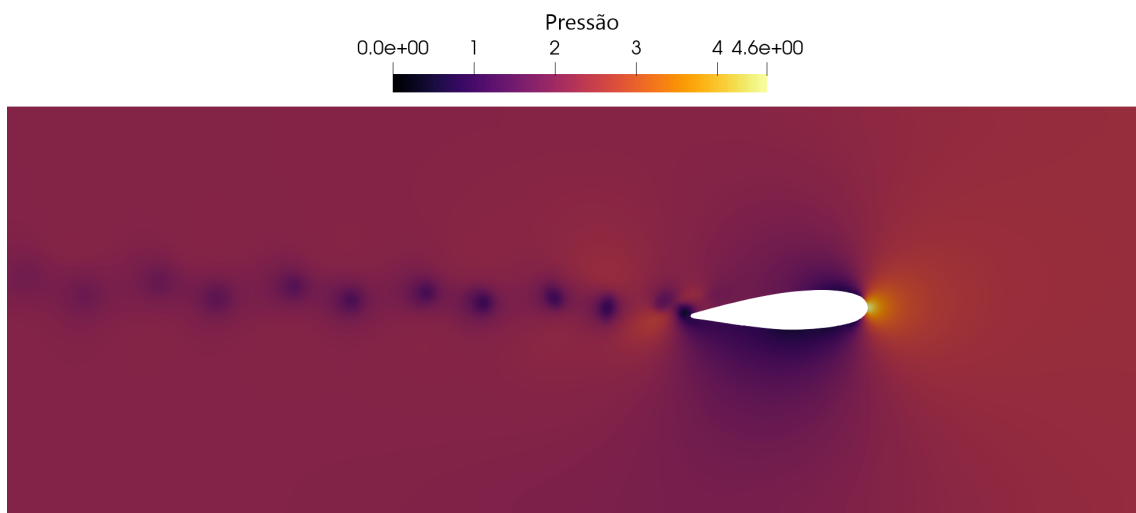


Figura 7.6: Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 3^\circ$.

O número de Strouhal calculado para este caso foi de $St = 0,171$, apresentando um leve decréscimo em relação ao valor obtido anteriormente. Essa redução sugere uma diminuição na frequência de desprendimento de vórtices, o que pode ser observado na Figura 7.7. Isso pode estar relacionado ao deslocamento do ponto de separação e ao alargamento da esteira, à medida que o ângulo de ataque aumenta.



(a) Distribuição da magnitude do vetor velocidade. As velocidades mais baixas se concentram na região acima do corpo, já as mais altas em baixo.



(b) Mapeamento do campo de pressão utilizando um gradiente de cores. As pressões maiores se concentram acima do corpo, as menores abaixo, o que mostra sintonia com o campo de velocidades.

Figura 7.7: Campos de velocidade e pressão para um aerofólio simétrico em ângulo de ataque $\alpha = 3^\circ$. Há uma diminuição visível na frequência dos vórtices que é reforçada pelo decréscimo do valor de St .

Com o aumento do ângulo de ataque para 6° , o coeficiente de sustentação médio obtido foi de $C_{L_m} = 0,141$, valor positivo, diferentemente dos casos anteriores. Esse

comportamento reflete uma mudança de sinal na força de sustentação, coerente com o aumento do ângulo de ataque sobre o perfil invertido, o que implica que a sustentação está agora dirigida no mesmo sentido do que seria o “extradorso” do perfil na montagem física.

O gráfico de C_L mostra um pico inicial acentuado, acima de 1,3, seguido de uma queda abrupta e entrada em regime oscilatório de menor amplitude. O valor médio final é significativamente inferior ao valor de pico, o que indica uma perda parcial de sustentação ao longo do tempo, comportamento típico da entrada em *stall*. Esse fenômeno ocorre quando o aumento do ângulo de ataque leva à separação do escoamento na superfície do aerofólio, reduzindo drasticamente a eficiência aerodinâmica.

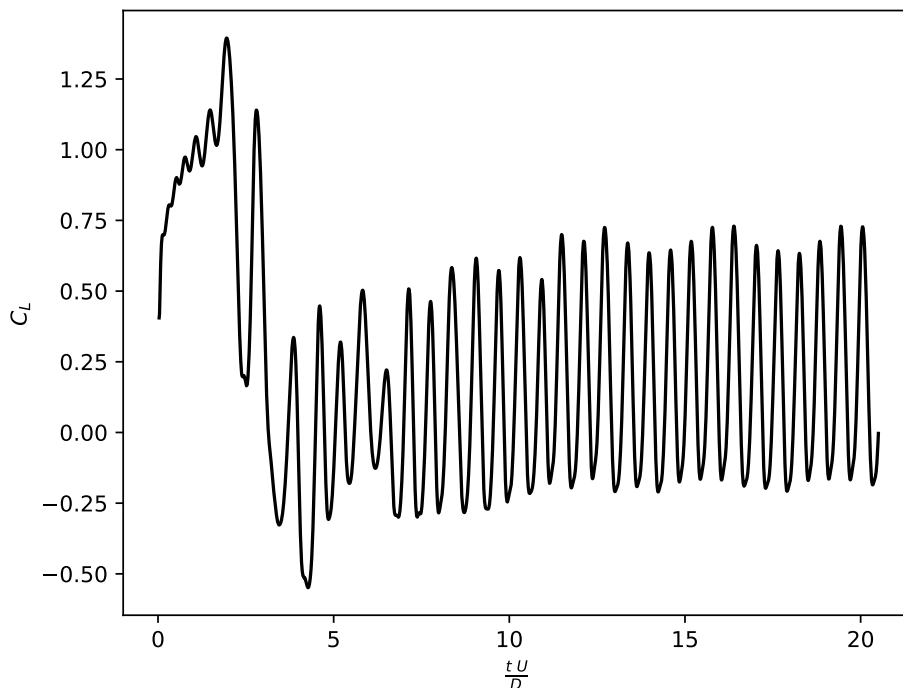


Figura 7.8: Evolução do comportamento do coeficiente de sustentação C_L em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 6^\circ$.

O coeficiente de arrasto também apresenta um crescimento notável, com valor de $C_{D_m} = 0,223$, superior ao dos casos anteriores. A evolução temporal de C_D mostra oscilações amplas no regime transiente, estabilizando-se posteriormente com flutuações persistentes em torno do valor médio, o que sugere um escoamento separado e altamente instável. Esse padrão confirma a condição de *stall* laminar, que,

segundo a literatura, pode ocorrer em aerofólios simétricos ou quase simétricos em baixos números de Reynolds a partir de ângulos de ataque entre 5° e 8° , dependendo da espessura do perfil e da curvatura.

Por fim, o número de Strouhal registrado foi de $St = 0,148$, valor inferior ao dos ângulos menores, o que confirma a tendência de diminuição da frequência de desprendimento de vórtices. Essa redução está associada ao alargamento da esteira e ao comportamento não linear do escoamento em presença de separação.

O comportamento dos gráficos sugere que o perfil atinge um regime aerodinâmico degradado, com perda de sustentação e aumento de perdas energéticas.

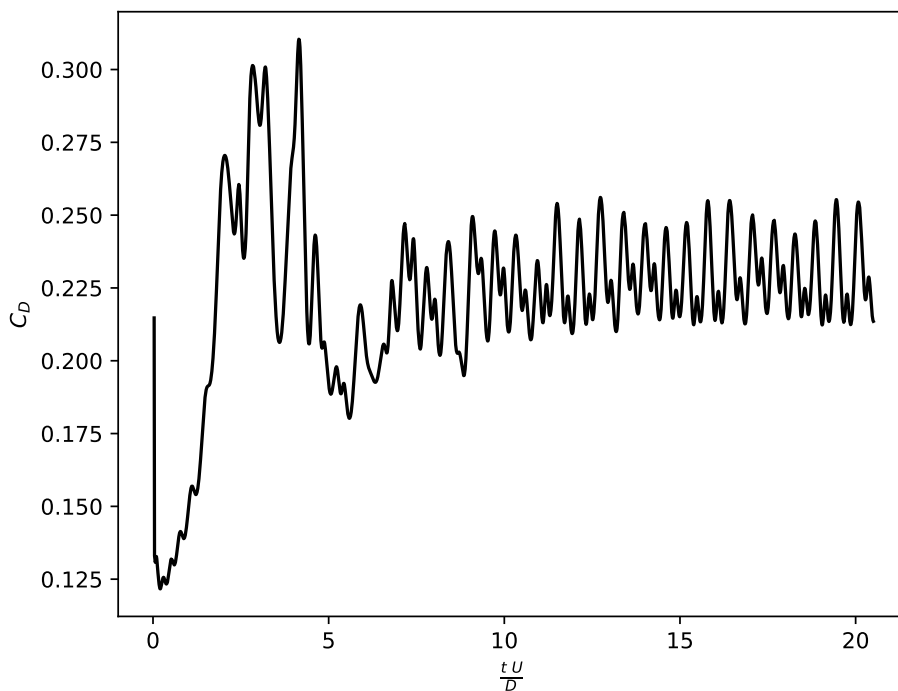
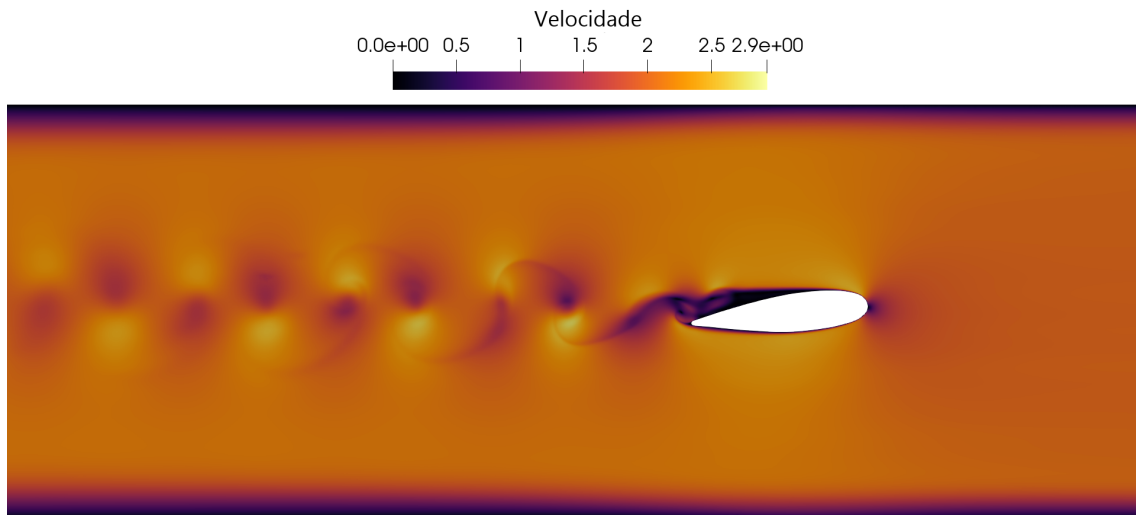
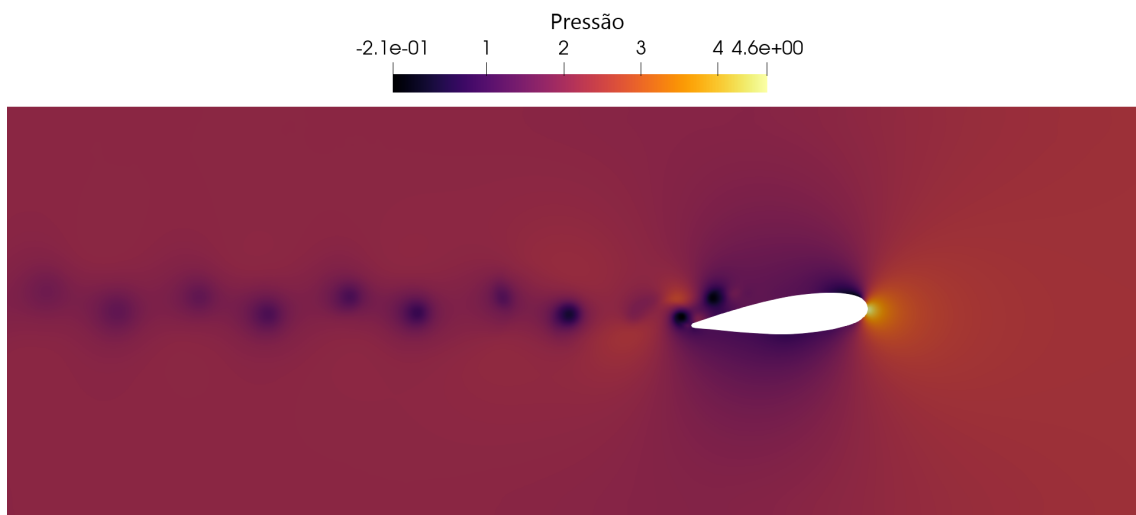


Figura 7.9: Evolução do comportamento do coeficiente de arrasto C_D em função do tempo adimensional tU/D para $\alpha = 6^\circ$.



(a) Distribuição da magnitude do vetor velocidade em que é visível a tendência dos vórtices próximos ao bordo de fuga.



(b) Mapeamento do campo de pressão utilizando um gradiente de cores. Os círculos de baixa pressão, centro dos vórtices, aparecem na superfície superior.

Figura 7.10: Campos de velocidade e pressão para um aerofólio simétrico em ângulo de ataque $\alpha = 6^\circ$. É possível observar os efeitos da separação do escoamento e entrada em Stall com o surgimento da zona de recirculação no extradorso, próximo ao bordo de fuga.

Os valores médios dos coeficientes e os números de Strouhal para cada ângulo simulado estão reunidos na Tabela 7.1. A partir desses dados, foram construídos os

gráficos dos coeficientes aerodinâmicos em função do ângulo de ataque α .

Tabela 7.1: Valores de coeficientes aerodinâmicos e número de Strouhal para diferentes ângulos de ataque de um aerofólio simétrico.

α	C_{L_m}	C_{D_m}	St
-6°	-0,112	0,215	0,154
-3°	0,257	0,161	0,178
0°	-0,089	0,162	0,196
3°	-0,284	0,164	0,171
6°	0,141	0,223	0,148

A análise dos gráficos dos coeficientes aerodinâmicos médios em função do ângulo de ataque permite extrair observações importantes sobre o desempenho do aerofólio simulado, sobretudo no que diz respeito à eficiência, à sensibilidade do escoamento e à influência de possíveis imperfeições geométricas.

A curva de C_{L_m} , Figura 7.11, mostra que o aerofólio responde de forma assimétrica a ângulos de ataque opostos: embora o perfil seja visualmente quase simétrico, os valores obtidos para $\alpha = -3^\circ$ e $\alpha = 3^\circ$ são significativamente diferentes, com $C_{L_m} = 0,257$ e $C_{L_m} = -0,284$, respectivamente. Essa diferença, somada ao leve valor negativo em $\alpha = 0^\circ$, sugere que pequenas imperfeições na geometria — seja pela fabricação em madeira ou pelo processo de modelagem a partir de imagem — influenciam de modo mensurável a distribuição de pressão ao redor do perfil, comprometendo a reversibilidade teórica da resposta aerodinâmica.

Por outro lado, o gráfico de C_{D_m} , Figura 7.12, mostra uma tendência mais regular, com uma suave elevação entre $\alpha = -3^\circ$ e $\alpha = 3^\circ$, e um crescimento acentuado nos extremos -6° e 6° . Esse comportamento sugere que o arrasto, embora menos sensível à assimetria que o C_L , é fortemente influenciado pela separação do escoamento, sobretudo quando o ângulo de ataque ultrapassa o limite de operação eficiente.

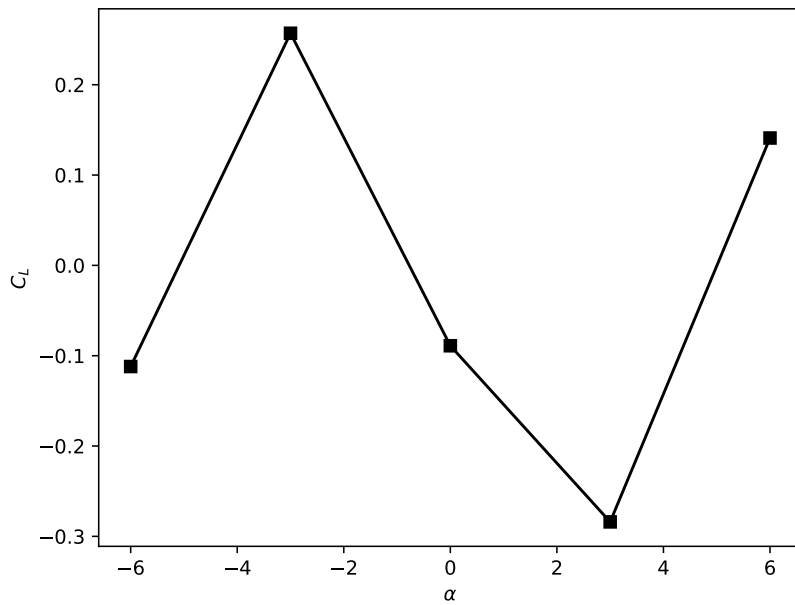


Figura 7.11: Coeficiente de sustentação C_L em função do ângulo de ataque α em um aerofólio simétrico. Ângulos simétricos não possuem os mesmos valores absolutos de C_L , o que é esperado devido a imperfeições de construção e modelagem.

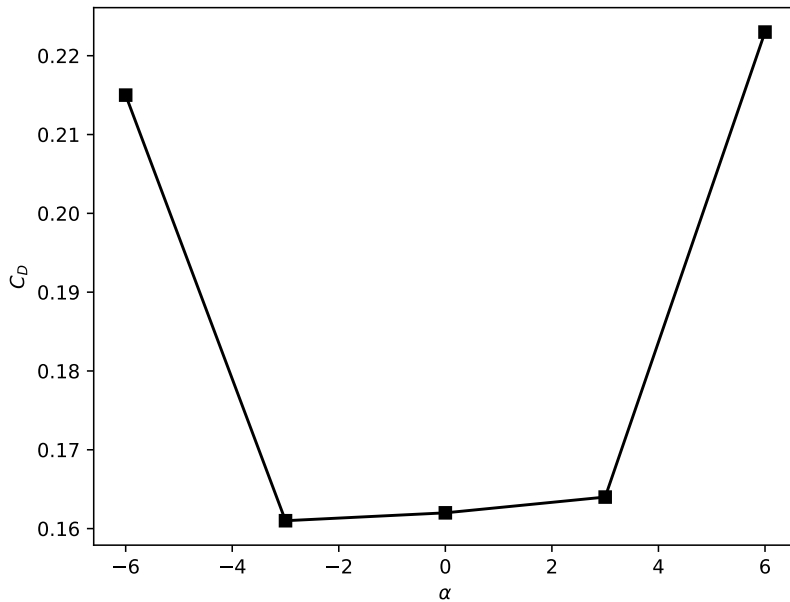


Figura 7.12: Coeficiente de arrasto C_D em função do ângulo de ataque α em um aerofólio simétrico. O arrasto é mais suscetível a mudanças de ângulo na ocorrência do Stall.

Além disso, nota-se que o perfil é mais eficiente em gerar sustentação para ângulos negativos (na configuração simulada), tanto pela maior razão C_L/C_D quanto pelos menores valores de arrasto. Especificamente em $\alpha = -3^\circ$, a sustentação é elevada com o arrasto relativamente baixo, o que sugere que o escoamento ainda está predominantemente aderido. Essa condição representa o ponto de melhor desempenho aerodinâmico do perfil simulado, o que seria compatível com o regime de operação ideal para perfis de baixa curvatura em baixos números de Reynolds.

Em resumo, os gráficos permitem concluir que o perfil simulado, mesmo invertido, apresenta comportamento fisicamente consistente: há um ponto ótimo de operação, uma resposta linear em baixas incidências, sensibilidade a imperfeições geométricas e, finalmente, a transição clara para o stall. Esses resultados validam tanto a metodologia numérica quanto a relevância dos efeitos práticos da geometria real sobre o desempenho aerodinâmico.

Capítulo 8

Conclusões

Este trabalho apresentou o desenvolvimento e aplicação de uma formulação numérica baseada no Método dos Elementos Finitos para a simulação do escoamento bidimensional, viscoso e incompressível, ao redor de um aerofólio simétrico posicionado em túnel de vento. A modelagem foi construída a partir das equações de Navier-Stokes em variáveis primitivas, resolvidas com elementos do tipo $P1P1+$, associados à discretização temporal semi-Lagrangeana de primeira ordem, com o objetivo de assegurar estabilidade na presença do termo convectivo não linear.

A fundamentação teórica percorreu desde os princípios de conservação, massa e quantidade de movimento, até a dedução das equações governantes e o surgimento das forças fluidodinâmicas, culminando na definição dos coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto. Foram discutidos aspectos geométricos dos aerofólios, suas aplicações em engenharia e a importância da análise numérica de escoamentos como ferramenta preditiva de desempenho aerodinâmico.

A geração da malha computacional foi realizada com o auxílio do software Gmsh, com atenção especial ao refinamento em regiões críticas como a camada limite, o contorno do aerofólio e a esteira, especialmente importantes para capturar adequadamente fenômenos como a separação de fluxo e a formação de vórtices. A construção e o detalhamento do algoritmo foram apresentados, com destaque para a montagem das matrizes globais, a implementação da busca semi-Lagrangeana e o cálculo das forças e coeficientes aerodinâmicos a partir dos gradientes de velocidade e da pressão na superfície do aerofólio.

A implementação foi validada por meio de três casos clássicos: o escoamento de

Poiseuille, utilizado para avaliar a ordem de convergência, o escoamento em cavidade com tampa móvel, que mostrou a precisão do método em diferentes números de Reynolds, e o escoamento ao redor de um cilindro fixo, conforme o benchmark de Turek and Schäfer (1996) para $Re = 100$, permitindo comparar os resultados numéricos dos coeficientes C_L , C_D e os padrões oscilatórios com referências da literatura. Os testes confirmaram a precisão e robustez da solução implementada.

Na aplicação prática da metodologia, foi simulado o escoamento ao redor de um aerofólio posicionado em túnel de vento, considerando ângulos de ataque entre -6° e 6° . Os coeficientes aerodinâmicos médios de sustentação C_{L_m} e arrasto C_{D_m} foram calculados em regime transiente para cada caso, revelando um comportamento coerente com o esperado para perfis simétricos em escoamentos bidimensionais. Observou-se uma variação aproximadamente linear de C_L com o ângulo de ataque em baixos valores de incidência, bem como o aumento progressivo do arrasto com o crescimento da inclinação do escoamento relativo, embora sua variação para ângulos pequenos seja mínima. Em ângulos extremos, especialmente em 6° , os resultados indicaram a entrada em regime de stall, caracterizado por perda de sustentação e aumento significativo do arrasto, condizente com a separação do escoamento e alteração do padrão de desprendimento vorticoso. Os gráficos de C_L e C_D em função do tempo e do ângulo de ataque, assim como os valores do número de Strouhal, confirmaram a capacidade do modelo em capturar fenômenos transitórios e não lineares.

Adicionalmente, foi conduzido um estudo de desempenho computacional comparando a resolução do sistema linear entre CPU e GPU. A análise mostrou que, para malhas menores, o processador apresentou tempos de processamento inferiores à GPU, devido à limitação de memória da placa gráfica. No entanto, a tendência observada no gráfico log-log revelou que o tempo de CPU cresce mais rapidamente com o tamanho da malha, indicando que, para simulações de grande escala, a GPU tende a superar a CPU em eficiência, especialmente em tarefas matriciais intensivas. Essa comparação utilizou bibliotecas como CuPy para espelhamento das operações vetoriais e matriciais da CPU em GPU.

De maneira geral, os resultados obtidos validam a metodologia proposta e demonstram sua aplicabilidade na análise de escoamentos em baixos e moderados

números de Reynolds. Entretanto, algumas limitações naturais da abordagem adotada abrem caminho para aprimoramentos e extensões em pesquisas futuras.

A principal limitação reside na consideração de um escoamento bidimensional, o que, embora bastante útil para análises iniciais e para comparações com experimentos em túnel de vento de pequena escala, não captura efeitos tridimensionais relevantes que ocorrem em geometrias reais, como vórtices longitudinais e instabilidades fora do plano.

Além disso, a formulação semi-Lagrangeana de primeira ordem no tempo, embora estável e simples de implementar, possui limitações quanto à precisão, podendo ser substituída por versões de ordem superior ou esquemas adaptativos de tempo, que preservem acurácia em escoamentos com maior complexidade temporal. Do mesmo modo, o uso de elementos $P1P1+$, embora suficientemente robusto e estável para o regime laminar e de transição, pode ser aprimorado em precisão espacial com o uso de elementos de ordem superior ou técnicas de estabilização adicionais.

Com relação ao desempenho computacional, o estudo comparativo entre CPU e GPU revelou tendências promissoras, mas ainda limitadas pelo hardware disponível, em especial pela memória reduzida da GPU utilizada. Futuras implementações podem explorar arquiteturas com maior capacidade de paralelismo, como GPUs com maior VRAM, bem como integrar bibliotecas de alto desempenho para computação científica paralela, como PETSc, PyTorch, numba.cuda ou OpenACC, para explorar ao máximo o potencial da computação acelerada.

Outros desenvolvimentos possíveis incluem a simulação de escoamentos transientes não periódicos, análise aeroacústica, ou mesmo a introdução de condições de contorno móveis, simulando flapping ou perfis oscilantes. Também é possível expandir a aplicação do código para perfis reais com geometria detalhada, permitindo comparações mais próximas com dados experimentais obtidos em laboratório.

Por fim, a incorporação de pós-processamento avançado, incluindo visualização de linhas de corrente, vorticidade e pressão dinâmica, poderá enriquecer ainda mais a análise física do escoamento, tornando o modelo uma ferramenta mais completa e aplicável a projetos reais de engenharia.

Referências Bibliográficas

- Anderson, J. D. J. (2015). *Fundamentos de Engenharia Aeronáutica: Introdução ao Voo*. AMGH, Brasil, 7 edition.
- Anjos, G. R. (2012). *A 3D ALE Finite Element Method for Two-Phase Flows with Phase Change*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, Switzerland. Présentée à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Ingénieur, Laboratoire de Transfert de Chaleur et de Masse, Programme Doctoral en Mécanique.
- Anyoji, M., Numata, D., Nagai, H., and Asai, K. (2014). Effects of mach number and specific heat ratio on low-reynolds-number airfoil flows. *AIAA Journal*.
- Bertin, J. J. and Smith, M. L. (1998). *Aerodynamics for Engineers*. Prentice Hall, 4th edition.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2001). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. Wiley, 4 edition.
- Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(1):1–23.
- D'Ambra, P., Durastante, F., and Filippone, S. (2024). PSCToolkit: solving sparse linear systems with a large number of GPUs. *arXiv preprint arXiv:2406.19754*.
- Donea, J., Giuliani, S., and Halleux, J. P. (1982). An arbitrary lagrangian–eulerian finite element method for transient dynamic fluid–structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33(1–3):689–723.
- Fox, R. W., McDonald, A. T., and Pritchard, P. J. (2014). *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 8 edition.

- Holst, D. (2005). *Dynamic Airfoil Measurements at Low Reynolds Number through High Angles of Attack*. M.sc. thesis, Technische Universität Berlin, Berlin, Germany.
- Holst, D., Balduzzi, F., Bianchini, A., Church, B., Wegner, F., Pechlivanoglu, G., Ferrari, L., Ferrara, G., Nayeri, C. N., and Paschereit, C. O. (2019). Static and dynamic analysis of a naca 0021 airfoil section at low reynolds numbers based on experiments and cfd. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 141(4):041202.
- Houghton, E. L. and Carpenter, P. W. (2012). *Aerodynamics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, 6 edition.
- Ira, H. A. and Doenhoff, A. E. (2013). Wind tunnel experimental study of wind turbine airfoil aerodynamic characteristics. *Applied Mechanics and Materials*, 260-261:125–129.
- Marchi, C. H., Suero, R., and Araki, L. K. (2009). The lid-driven square cavity flow: Numerical solution with a 1024×1024 grid. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 31(3):186–198.
- Raghunathan, S., Harrison, J. R., and Hawkins, B. D. (1991). Thick airfoil at low reynolds number and high incidence. *Journal of Aircraft*, 28(5):346–352.
- Reddy, J. N. (2005). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill Education, 3 edition.
- Rubio, D. (2023). Role of aerodynamics in industrial applications. *Journal of Aeronautics & Aerospace Engineering*. Available at: <https://www.longdom.org/abstract/role-of-aerodynamics-in-industrial-applications-101010.html>.
- Shen, X. S., Avital, E. J., Paul, G. P., and Rezaenia, M. A. (2016). Experimental study of surface curvature effects on aerodynamic performance of a low reynolds number airfoil for use in small wind turbines. *Journal of Renewable and Sustainable Energy*, 8(5):053303.

- Tannehill, J. C., Anderson, D. A., and Pletcher, R. H. (1997). *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, 2 edition.
- Turek, S. and Schäfer, M. (1996). Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. In Hirschel, E. H., editor, *Flow Simulation with High-Performance Computers II*, volume 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, pages 547–566. Vieweg+Teubner Verlag.
- Wang, S., Wen, F., Zhang, H., et al. (2021). Effects of compressibility and reynolds number on the aerodynamics of a simplified corrugated airfoil. *Experiments in Fluids*.
- Xiang, L., Asudeh, O., Sabin, G., Sukumaran-Rajam, A., and Sadayappan, P. (2025). cuTeSpMM: Accelerating Sparse-Dense Matrix Multiplication using GPU Tensor Cores. *arXiv preprint arXiv:2504.06443*.
- Zienkiewicz, O. C. and Cheung, Y. K. (1967). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., and Zhu, J. Z. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 6 edition.