



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Dalvan Oliveira Mendes

**Método dos Elementos Finitos aplicado a perfil  
de temperatura de barragem**

Rio de Janeiro, RJ

2021

Dalvan Oliveira Mendes

**Método dos Elementos Finitos aplicado a perfil de temperatura de barragem**



Projeto Final de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia, Universidade do Estado Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para obtenção do Diploma de Graduação pelo Curso de Engenharia.

Orientador: Prof. Ph.D. Gustavo Rabello dos Anjos

Coorientador: M.Sc. Leandro Marques dos Santos

Rio de Janeiro, RJ

2021

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial deste projeto final de graduação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

---

Assinatura

---

Data

Dalvan Oliveira Mendes

**Método dos elementos finitos aplicado a perfil de temperatura de barragem**

Projeto Final de Graduação apresentado ao Departamento de Engenharia da Universidade do Estado Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para obtenção do Diploma de Graduação pelo Curso de Engenharia.

Aprovado em 25 de janeiro de 2021

Banca Examinadora:

---

Prof. Ph.D. Gustavo Rabello dos Anjos (Orientador)  
COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

M.Sc. Leandro Marques dos Santos (Coorientador)  
COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. D.Sc. Daniel José Nahid Mansur Chalhub  
Faculdade de Engenharia - UERJ

---

Prof.<sup>a</sup>D.Sc. Marília Garcia Diniz  
Faculdade de Engenharia - UERJ

Rio de Janeiro, RJ  
2021

## **DEDICATÓRIA**

Dedico esta monografia à minha família por todo apoio que recebi durante a graduação. A todos os amigos e professores da UERJ que contribuíram de alguma forma para minha formação.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente à Deus por todas as oportunidades que tive.

Ao Instituto Potencial por me proporcionar a chance de chegar à Universidade e dar prosseguimento aos estudos abrindo as portas para a realização de vários sonhos.

Agradeço especialmente aos meus orientadores Gustavo Rabello e Leandro Marques por toda ajuda e orientação nos tópicos de maior dificuldade.

À minha família e principalmente aos meus avós maternos, Rita e Raimundo, por toda a base moral que carrego.

E principalmente a minha namorada Sânnia por sua compreensão e apoio nos momentos mais difíceis.

## RESUMO

MENDES, Dalvan. *Método dos Elementos Finitos aplicado a Perfil de Temperatura de Barragem*, 2020, 110f. Projeto Final de Graduação – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

Observa-se que barragens de concreto tem como característica responder à uma série de carregamentos distintos, o que se pode dar na forma de força da gravidade, pressão hidrostática da água, ou variações térmicas sazonais. O estudo acerca dos efeitos da temperatura na estrutura de barragens de concreto se tornou um campo de atuação que tem crescido em relevância. Este estudo teve como objetivo abordar a questão do emprego do Método de Elementos Finitos para realização de estudos acerca de perfis de temperatura de barragem. Assim, foi feita uma Pesquisa bibliográfica de caráter qualitativo e intenção exploratória e com base nos dados obtidos na literatura, foi desenvolvida a modelagem matemática da equação de calor por meio do Método dos Elementos Finitos para o caso unidimensional e foi criado de um código próprio em Python para resolução de problemas de condução de calor em regime permanente e em regime transiente em uma e duas dimensões. O código foi validado por meio de sua aplicação em problemas com solução analítica conhecida, por meio da comparação entre a solução analítica e a solução numérica dos problemas. Por fim, aplicou-se o código na análise da distribuição da temperatura ao perfil bidimensional de um trecho da barragem de Itaipu.

Palavras-chave: Elementos Finitos; Equação de calor; Perfil de Temperatura de Barragem.

## ABSTRACT

MENDES, Dalvan. *Finite Element Method applied to Dam Temperature Profile*, 2021, 110f. Projeto Final de Graduação – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2021.

It is observed that concrete dams have the characteristic of responding to a series of different loads, which can occur in the form of the force of gravity, hydrostatic pressure of the water, or seasonal thermal variations. The study of the effects of temperature on the structure of concrete dams has become a field of analysis that has grown in relevance. This study aimed to address the issue of using the Finite Element Method to conduct studies on dam temperature profiles. Thus, a bibliographic search of qualitative character and exploratory intention was carried out and based on the data obtained in the literature, the mathematical modeling of the heat equation was developed using the Finite Element Method for the unidimensional case and it was created a specific code in Python for solving heat conduction problems in permanent and transient regimes in one and two dimensions. The code was validated through its application in problems with known analytical solution, through the comparison between the analytical solution and the numerical solution of the problems. Finally, the code was applied in the analysis of the temperature distribution to the two-dimensional profile of a stretch of the Itaipu dam.

1. Keywords: Finite Element Method; heat equation; Dam Temperature Profile.

## **SIGLAS**

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CCR Concreto Compactado com Rolo

CFD *Computational Fluid Dynamics*

MAPE Erro Percentual Absoluto Médio

MEF Método dos Elementos Finitos

PVC Problemas de Valor de Contorno

PVI Problema de valor inicial

UHI Usina Hidrelétrica de Itaipu

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>13</b>
1.1	CONDUÇÃO, CONVECÇÃO E RADIAÇÃO .....	13
1.2.	EFEITOS DA TEMPERATURA EM CONCRETO .....	14
1.3	TIPOS DE BARRAGEM .....	20
1.4	TENSÕES EM BARRAGENS .....	24
1.5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	29
1.6	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	34
1.7	EFEITO DA TEMPERATURA EM BARRAGENS .....	36
<b>2</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO</b> .....	<b>38</b>
2.1	EQUAÇÕES DE GOVERNO .....	38
2.2	MEF: DISCRETIZAÇÃO E APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES.....	39
<b>2.2.1</b>	<b>Forma forte do problema de valor de contorno (PVC)</b> .....	<b>39</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Método dos resíduos ponderados e método Galerkin</b> .....	<b>40</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Aplicação do MEF</b> .....	<b>41</b>
<b>2.2.4</b>	<b>Discretização do domínio</b> .....	<b>42</b>
<b>2.2.5</b>	<b>Funções de forma ou funções de interpolação</b> .....	<b>43</b>
<b>2.2.6</b>	<b>Resolução do problema</b> .....	<b>44</b>
<b>2.2.7</b>	<b>Implementação da solução computacional</b> .....	<b>51</b>
<b>2.2.8</b>	<b>Caso transiente 1D</b> .....	<b>53</b>
<b>2.2.9</b>	<b>Aplicação do MEF ao caso bidimensional</b> .....	<b>55</b>
2.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	59
<b>3</b>	<b>VALIDAÇÃO</b> .....	<b>60</b>
3.1	CHAPA METÁLICA QUADRADA .....	<b>60</b>

3.1.1	Softwares utilizados no projeto .....	60
3.1.2	Criação e leitura de malha.....	62
3.1.3	Assembly.....	63
3.1.4	Condições de contorno e solver .....	64
3.1.5	Pós processamento.....	65
3.2	CHAPA RETANGULAR COM CONDIÇÃO DE CONTORNO SENOIDAL.....	66
4.	<b>RESULTADOS</b> .....	69
4.1	PERFIL DE TEMPERATURA DE BARRAGEM-ANALISE PERMANENTE.....	69
4.2	DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA COM X OU Y FIXOS.....	76
4.3	ANÁLISE TRANSIENTE .....	80
5	<b>CONCLUSÃO</b> .....	90
5.1	TRABALHOS FUTUROS .....	91
	<b>REFERÊNCIA</b> .....	93
	<b>APÊNDICE A – ASSEMBLY 2D</b> .....	98
	<b>APÊNDICE B – CONDIÇÕES DE CONTORNO E SOLVER 2D</b> .....	99
	<b>APÊNDICE C – CODIGO COMPLETO 1D TRANSIENTE SEM MALHA GMSH</b> .....	100
	<b>APÊNDICE D – CODIGO COMPLETO 2D - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO 2.84</b> .....	102
	<b>APÊNDICE E – CODIGO COMPLETO 2D – SIMULAÇÃO DA BARRAGEM</b> .....	106

## INTRODUÇÃO

Barragens são estruturas complexas e sua construção envolve diversos ramos da engenharia. Um aspecto de importância fundamental a ser considerado é a segurança das barragens devido ao risco econômico e socioambiental, pois um acidente grave ou uma possível ruptura pode levar a perda de vidas humanas, impactos ao meio ambiente e prejuízos econômico-financeiros.

Observa-se que barragens de concreto tem como característica responder à uma série de carregamentos distintos, o que se pode dar na forma de força da gravidade, pressão hidrostática da água, ou variações térmicas sazonais. Portanto, o estudo acerca dos efeitos da temperatura na estrutura de barragens de concreto se tornou um campo de atuação que tem crescido em relevância, sendo que atualmente para este fim tem sido utilizados até mesmo programas de computador com o objetivo de fazer simulações comportamentais.

Durante a fase de construção, as estruturas das barragens sofrem alterações de temperatura devido principalmente ao calor de hidratação, que é uma fonte de calor proveniente de reações químicas do concreto e que se dissipa após certo tempo. Após a fase de construção, as barragens estão sujeitas a mudanças em sua temperatura interna devido a variações externas de temperatura. . “As cargas térmicas externas a uma superfície são oriundas da radiação solar e das variações de temperatura do ar, fundação e reservatório e tais cargas podem causar deformações e alterações volumétricas significativas na estrutura, o que frequentemente faz exceder a resistência à tração do concreto levando ao desenvolvimento de fissuras” (HICKMANN, 2016, p.18).

É possível afirmar que alterações significativas nos índices de temperatura contribuem para fragilizar o desempenho destas estruturas construtivas baseadas em concreto, uma questão que merece uma maior atenção em se tratando de concreto-massa no contexto de barragens. E esse cenário nota-se a importância da realização de cálculos e simulações antes de o projeto da barragem ser construído, a fim de reduzir os impactos de possíveis fontes de tensionamento na estrutura.

Em linhas gerais, a forma como esta barragem é construída também irá influenciar em seu comportamento no tocante às forças que atuam com o futuro concreto-massa da estrutura da barragem, ao mesmo tempo em que o fenômeno de transferência de calor ocorre por meio de dinâmicas de condução, convecção e radiação, portanto, a importância destes cálculos reside principalmente em fazer com que estes fenômenos ocorram sem minar a estabilidade e a

longevidade da estrutura.

Conforme Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), o Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser descrito como um método numérico utilizado para determinar soluções aproximadas para uma grande classe de problemas de engenharia. O MEF vem sendo amplamente utilizado na engenharia pelo seu caráter de generalidade e facilidade de aplicação em domínios com geometrias complexas.

Silva Junior (2018) aponta que o MEF é muito usado para simulações por meio de softwares, mas chama a atenção para a importância do profissional entender matemática e computacionalmente o que está sendo processado por trás das interfaces dos programas. Mesmo na simulação por softwares, o profissional precisa aplicar os inputs corretos, interpretar corretamente os resultados e reconhecer se uma dada simulação está apresentando resultados satisfatórios. Percebe-se então a importância do estudo dos fundamentos matemáticos e da modelagem para a correta aplicação do MEF.

Este estudo teve como objetivo abordar a questão do emprego do método de elementos finitos para realização de estudos acerca de perfis de temperatura de barragem. Assim, foi feita uma revisão bibliográfica para obtenção de dados na literatura sobre o MEF e sua aplicação na distribuição de temperatura em barragens. Com base nos dados obtidos, foi feita a modelagem matemática da equação de condução de calor por meio do MEF e a criação de um código próprio em Python para resolução de problemas de condução de calor em uma e duas dimensões e por fim, o código foi utilizado para a resolução de um problema bidimensional de temperatura de barragem.

Neste trabalho, a opção pela modelagem matemática via MEF se deu, dentre outros motivos, por este ser um método amplamente utilizado no mercado e devido a possibilidade de utilização do mesmo código para resolução de problemas com diversas geometrias distintas. Além disso, é possível obter resultados com alta precisão por meio da utilização do MEF e o método tem uma alta variedade de aplicações, podendo ser usado para análise de fluidos, térmica, aerodinâmica, estrutural, magnética, etc.

## **1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### **1.1. CONDUÇÃO, CONVECÇÃO E RADIAÇÃO**

Quando dois corpos distintos e com temperaturas distintas são colocadas em contato, ocorre um fenômeno de transferência de energia térmica entre eles, a partir do corpo mais

quente para o menos quente, o que seguirá ocorrendo até que um equilíbrio térmico seja alcançado. O calor pode ser descrito como a energia térmica que se encontra em trânsito, provocada por uma diferença de temperatura qualquer.

Segundo Çengel e Ghajar (2012), a condução de calor pode ser descrita como a transferência de energia das partículas mais energéticas para as partículas vizinhas adjacentes menos energéticas, através da interação entre elas. A condução pode ocorrer em sólidos, líquidos e gases. Em líquidos e gases, a condução ocorre devido às colisões e difusões das moléculas em seus movimentos aleatórios, já nos sólidos, a condução ocorre por causa da combinação das vibrações das moléculas em rede e a energia é transportada por elétrons livres.

Uma lata com bebida gelada em um ambiente quente, por exemplo, normalmente aquece até a temperatura do ambiente, como resultado da transferência de calor do ambiente para a bebida por meio da condução térmica pelo alumínio da lata. (Çengel e Ghajar, 2012, p.18).

A convecção é o modo de transferência de energia entre a superfície de um sólido e um líquido ou gás adjacente, que está em movimento e para haver convecção são necessários os efeitos combinados de condução e do movimento de um fluido. Quanto mais rápido for o movimento do fluido, maior será a transferência de calor por convecção. A convecção pode ser forçada, quando o fluido é forçado a fluir sobre a superfície por meios externos, como ventilador ou bomba. Se o movimento do fluido for causado por forças induzidas por diferenças de densidades, resultado da variação de temperatura no fluido, a convecção será natural.

A radiação é um processo físico de emissão e de propagação de energia sob a forma de ondas eletromagnéticas, em decorrência das mudanças nas configurações eletrônicas de átomos ou moléculas. Esse processo pode ocorrer em um meio material ou no vácuo, essa é a forma que a energia do Sol atinge a Terra.

Segundo Albuquerque (2012) quando este calor radiante incide sobre um determinado ente, uma parcela é absorvida ou refletida, enquanto outra é transmitida pelo meio. Sendo que as emissões advindas da superfície aquecida refletem sua capacidade de transmitir, irradiar ou absorver calor, levando em consideração que de acordo com a Lei de Kirchhoff, a emissividade e a capacidade de absorção de um determinado ente podem ser iguais à certa temperatura. A figura 1 ilustra o processo de condução, convecção e radiação.

## 1.2. EFEITOS DA TEMPERATURA EM CONCRETO

Conforme Coelho *et al* (2012) quando compósitos de cimento entram em contato com a água, dão origem a uma série de reações químicas exotérmicas, fenômeno conhecido como

hidratação do cimento. Tal fenômeno ocorre nas primeiras horas após a aplicação do concreto e é controlado por meio do processo de cura, que tem por objetivo evitar a perda de água e possíveis surgimentos de fissuras, trincas, permeabilidade e ingresso de agentes agressivos. O processo de hidratação é o responsável pelo endurecimento do concreto e tem fim após o total endurecimento e estabilização da estrutura.

E conforme Araujo (2013) reações de hidratação no cimento se caracterizam como exotérmicas, o que significa que geram calor na massa de concreto. Levando em consideração a condutividade térmica do concreto que é relativamente baixa, o calor gerado promove uma elevação de temperatura no núcleo do elemento estrutural, um fenômeno que se altera de acordo com as dimensões do elemento, portanto, quanto maior for o elemento estrutural, proporcionalmente maior será a temperatura alcançada no seu cerne.

O calor no interior do concreto é transferido por meio de condução a partir desse cerne em direção às superfícies da peça, momento em que este calor se dissipa para o meio ambiente. Portanto, afirma que essa transferência de calor se reflete em gradientes de temperatura que por consequência promovem tensões de tração e de compressão no concreto.

Por outro lado, uma vez resfriada, a superfície de concreto tende a se encurtar, embora o interior do elemento permanece na fase de aquecimento. O que por sua vez, se reflete em novos esforços de tração em relação às camadas superficiais. “Essas tensões de tração podem causar fissuras no concreto, o que compromete sua durabilidade” (ARAUJO, 2013, p.1).

Qualquer corpo é formado por partículas atômicas, na forma de moléculas, átomos e íons, portanto, a identificação de uma temperatura nada mais é do que compreender o grau de agitação destas partículas e por consequência, é possível afirmar que a energia térmica é formada pela movimentação destas partículas, que geram energia cinética. Em suma, “Quanto mais alta a temperatura de um corpo, maior será o grau de agitação de suas partículas e, por conseguinte, maior será a energia térmica produzida” (ALBUQUERQUE, 2012, p.36).

No caso de um incêndio, as chamas em um determinado compartimento transferem sua energia térmica para a superfície de elementos construtivos por meio dos fenômenos de convecção e radiação, sendo que a partir do momento em que foram atingidos por estes dois fluxos, estes elementos construtivos (como o concreto) se aquecem interiormente pela condução, como explicado e ilustrado por meio da Figura 1.

Figura 1 – Processos de transferência de calor atuantes em uma viga



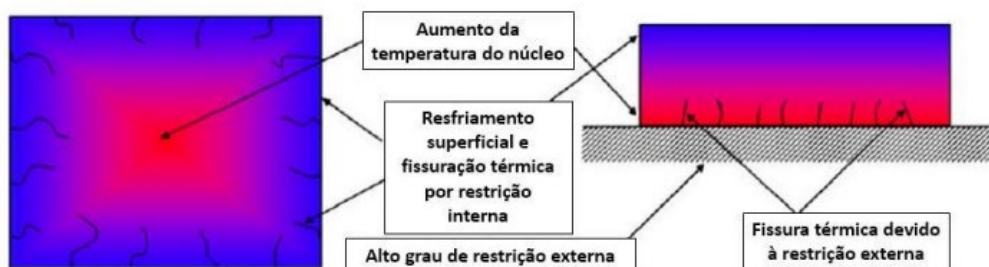
Fonte: Albuquerque (2012)

No caso do concreto armado, Klein Júnior (2011) afirma que apesar de este ser claramente um material heterogêneo, composto de agregados como pasta de cimento e água, é tratado como se fosse homogêneo, ao menos à temperatura ambiente. Soma-se a isso o fato de que as barras de aço utilizadas a fim de reforçar a estrutura são normalmente nervuradas, proporcionando assim uma melhor aderência ao concreto.

Sob temperaturas elevadas, especialmente na faixa a partir dos 100°C, é possível observar diversas transformações de ordem físico-química no concreto e aço. No entanto, a forma pela qual estas transformações ocorrem variam a depender das características fundantes deste elemento construtivo, na forma de tipos de cimento, de agregados, fator água/cimento mais agregados e teor de umidade.

Além disso, Klein Júnior (2011) chama a atenção para o fato de que originalmente o concreto foi considerado como sendo a prova de fogo, devido às suas propriedades relacionadas à incombustibilidade e isolamento térmico. No entanto, diante desse contexto de temperaturas elevadas é possível observar fenômenos como a degradação das propriedades mecânicas, danos resultantes de deformações térmicas e o fenômeno do *spalling*, que consiste no lascamento de camadas de concreto da superfície de um elemento estrutural submetido a altas temperaturas e a rápidas taxas de aquecimento, nesse sentido, a Figura 2 abaixo ilustra graficamente fissuras que podem ocorrer em decorrência desse cenário.

Figura 2 – Fissuras causadas por altas taxas de variação de temperatura



Fonte: Silva Junior (2018)

Conforme Silva Junior (2018) tais fissuras no concreto podem se revelar

independentemente de carregamentos externos. A relativa inércia térmica do concreto manifestada em decorrência da baixa condutividade, impede que a transferência de calor ocorra mais rapidamente, resultando em diferentes temperaturas ao longo do elemento construtivo.

Esse é um problema típico de deformações impostas internas, ou intrínsecas, e independe das cargas externas aplicadas à estrutura. Em virtude das diferenças de temperatura entre os diversos pontos do elemento estrutural, a deformação imposta (deformação térmica) é restringida, o que causa tensões de compressão no interior e tensões de tração nas superfícies do elemento (ARAUJO, 2013, p.1).

Em seu artigo, Araujo (2013) segue neste mesmo entendimento, afirmando que em estruturas construídas de menores dimensões os gradientes de temperatura são pequenos, bem como as tensões de tração, que não se revelam suficientemente grandes ao ponto de produzir fissuras no concreto. No entanto, o mesmo não se aplica a estruturas de grandes dimensões, como é o caso das barragens, nas quais as fissuras de superfície são praticamente inevitáveis.

E a fim de contornar o problema as medidas que podem ser tomadas são a redução do consumo de cimento, a utilização de cimentos pozolânicos, a realização de concretagem em camadas de menor altura e a prática de pré-refrigeração e/ou pós-refrigeração do concreto, estratégias que são postas em prática com o intuito de evitar um resfriamento acelerado das superfícies, bem como promover uma cura prolongada a fim de retardar o processo de retração.

Conforme Klein Junior (2011), o concreto de forma geral apresenta um comportamento significativamente complexo e instável no início da dinâmica de aquecimento do material, o que ocorre devido a mudanças na microestrutura do concreto. Aponta também que as propriedades termo-hidro-mecânicas também se alteram em decorrência da temperatura, taxa de aquecimento, teor de umidade inicial, geometria e dimensões do elemento construtivo, entre outras possibilidades.

Em suma, algumas alterações físico-químicas no concreto decorrente de temperaturas elevadas são reversíveis, enquanto outras são irreversíveis e podem até mesmo reduzir a capacidade resistente da estrutura construtiva como consequência desse cenário. O quadro 1 enumera as principais alterações físico-químicas que podem ser observadas no concreto.

Quadro 1 – Principais alterações físico-químicas experimentadas pelo concreto

<b>20°C a 80°C</b>	Aumento da hidratação do cimento, perda lenta de água nos capilares e redução das forças de coesão;
<b>80°C a 200°C</b>	Aumento da taxa de perda da água capilar e água livre;
<b>80°C a 850°C</b>	Perda da água unida quimicamente;
<b>100°C</b>	Aumento significativo da permeabilidade;
<b>150°C</b>	Pico do primeiro estágio de decomposição dos hidratos de silicato de cálcio (CSH);
<b>300°C (e acima)</b>	Aumento significativo da porosidade e microfissuração;
<b>350°C</b>	Ruptura de alguns agregados do tipo seixos de rio;
<b>374°C</b>	Temperatura crítica para a qual não é possível haver água livre;
<b>400°C a 600°C</b>	Dissociação do $\text{Ca(OH)}_2$ em $\text{CaO}$ e água;
<b>573°C</b>	Os agregados silicosos (à base de quartzo) expandem;
<b>700°C (e acima)</b>	Dissociação do $\text{CaCO}_3$ em $\text{CaO}$ e $\text{CO}_2$ ;
<b>720°C</b>	Segundo pico da decomposição do CSH;
<b>800°C</b>	Os agregados calcários se decompõem;
<b>1060°C</b>	Início da fusão de alguns constituintes do concreto.

Fonte: Klein Junior (2011)

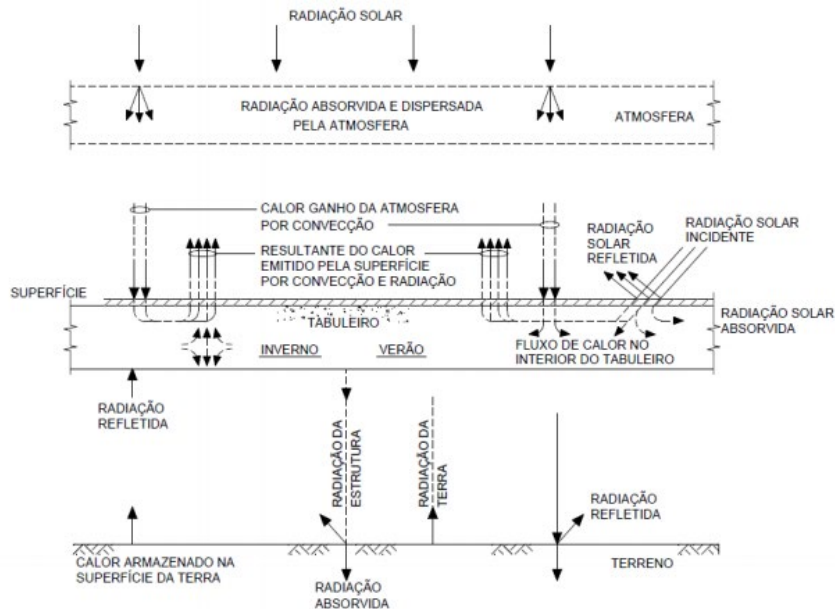
Em seu trabalho, Klein Junior (2011) também chama a atenção para alguns momentos chave que minam significativamente a resistência do concreto, o primeiro deles sendo quando a temperatura se encontra em 650°C (dentro do contexto de concreto com agregados leves), 660°C para concreto formado por agregados calcários e 430°C para concreto formado por agregados silicosos.

Como exemplo de transformação reversível, Coutinho (2019) aponta o caso do tabuleiro de pontes que variam em seu comprimento de acordo com a temperatura. “Esse fenômeno é responsável pela expansão e contração das superestruturas das pontes. A expansão ocorrerá para uma variação térmica positiva (...) e a contração (...) negativa” (COUTINHO, 2019, p.45).

De acordo com Coutinho (2019) a estrutura de uma ponte se encontra sujeita a alterações de temperatura que se revelam diária ou sazonalmente em decorrência das trocas de calor que ocorrem entre sua superfície e o ambiente. Os principais fenômenos envolvidos neste processo são a radiação, convecção e condução, como é possível observar por meio da Figura 3.

Com base na Teoria do Eletromagnetismo, desenvolvida por James Maxwell, radiação é o processo de transferência de calor por ondas eletromagnéticas, também conhecidas como ondas caloríficas ou calor radiante, geradas devido ao alto grau de agitação das partículas do corpo que está sujeito à temperatura elevada. Segundo Drysdale (1999), essa modalidade de transferência de calor é emitida na maior parte do incêndio como consequência da difusão das chamas (ALBUQUERQUE, 2012, p. 38).

Figura 3 – Troca de calor entre uma ponte e o ambiente



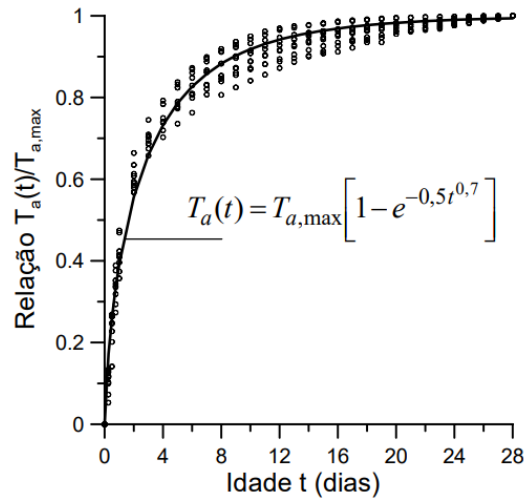
Fonte: Coutinho (2018)

Conforme Araujo (2013) a condutividade térmica do concreto para uma temperatura ambiente de  $20^{\circ}\text{C}$  fica entre  $k_{inf} = 1,33 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$  e  $k_{sup} = 1,95 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ , impondo desta forma um valor médio de  $k = 1,65 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$  e afirma que o calor específico do concreto pode ser considerado igual a  $c = 900 \text{ J/kg}^{\circ}\text{C}$ , dentro do contexto de temperaturas entre  $20^{\circ}\text{C}$  e  $100^{\circ}\text{C}$ .

O calor de hidratação “ $Qh$ ”, pode ser descrito como a quantidade total de calor produzido pela hidratação total do cimento. Um conceito que sofre influência de alguns fatores como o consumo de cimento, seu tipo e temperatura. Algo que não pode ser negligenciado pois a velocidade de hidratação do cimento possui como parâmetros fatores como o tipo de cimento.

A título de exemplo, Araujo (2013) apresenta graficamente os resultados para o cálculo de elevação adiabática da temperatura de dez elementos construtivos presentes na estrutura de concreto da usina hidrelétrica de Itaipu e Tucuruí (Figura 4), sendo que os pontos presentes na figura dizem respeito aos resultados do experimento, que contou com seis elementos construtivos de Itaipu e quatro de Tucuruí.

Figura 4 – Elevação adiabática de temperatura de dez concretos



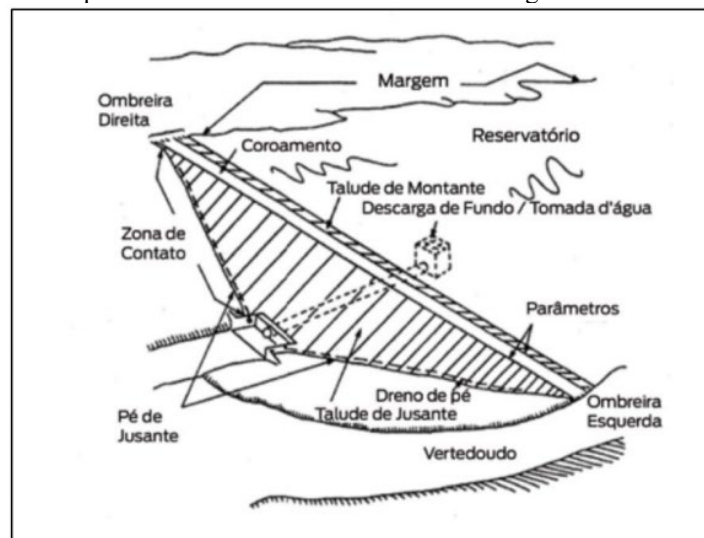
Fonte: Araújo (2013)

### 1.3. TIPOS DE BARRAGEM

Para Souza (2008) uma barragem pode ser descrita como uma estrutura que possui a finalidade de conter um determinado fluido em seu reservatório, o qual pode ter como base o leito de um rio, uma baía ou qualquer outra depressão presente em um relevo criado pelo homem ou pela natureza.

Conforme Pereira (2019) podem ser descritos como princípios fundantes de uma barragem o reservatório, a crista, os taludes de montante e jusante, a fundação, as ombreiras laterais, o sistema extravazador e o sistema de drenagem interno, como é possível observar pela representação gráfica presente na Figura 5.

Figura 5 – Esquema de elementos básicos de uma barragem



Fonte: Pereira (2019)

O espaço do reservatório delimita a região onde um determinado volume de água está contido, em outras palavras, é a área que foi inundada pelo barramento. A crista ou coroamento, pode ser descrita como a superfície plana situada no topo da estrutura da barragem, podendo ser utilizada como estrada para o tráfego de equipes de operação e inspeção.

Por sua vez, os taludes de montante se caracterizam como a superfície que se encontra inclinada, cuja face se encontra voltada para o lado do reservatório. Segundo Pereira (2019), esta face é protegida por pedregulhos intitulados de “riprap” que possuem o objetivo de proteger o talude das ondas formadas pela ação do vento. E naturalmente, o talude de jusante se encontra na face oposta a do reservatório.

A fundação, como o nome já indica, descreve o solo ou rocha em cima da qual a estrutura da barragem foi erguida, e as ombreiras laterais são as porções de terra nas quais a estrutura da barragem se apoia, o que significa que estão nas pontas, no término da pista da crista ou coroamento.

Estes são os elementos principais à fim de sintetizar a questão, embora também mereçam destaque os vertedouros, as tomadas de água, descarregadores de fundo, comportas e eclusas e escadas de peixe (NASCIMENTO JUNIOR, 2016). Em seu estudo, Nascimento Junior (2016) descreve o papel da pressão hidrostática em uma barragem, caracterizando-as como as pressões exercidas pela água nas faces da barragem e que atuam tanto na direção horizontal quanto vertical, desde que se encontre presente uma inclinação no barramento.

Estas variam de acordo com altura e com o peso específico da água que, geralmente, possui o valor de  $9,86 \text{ kN/m}^3$ , esse valor quando multiplicado pela diferença da cota do nível da água e pela cota da altura estudada, resulta no valor da pressão naquele ponto. Com isso, podemos dizer que a pressão hidrostática aumenta quando nos aproximamos do fundo do reservatório de forma linear (NASCIMENTO JUNIOR, 2016, p.137).

A pressão hidrostática é uma carga que deve estar presente ao longo de toda a vida útil da barragem, principalmente em se tratando da barragem a montante, pois do contrário esta acaba perdendo sua função. Levando isso em consideração os gestores da barragem devem estudar a sazonalidade do clima da região a fim de definir níveis e faixas de trabalho apropriados para a mesma, bem como compreender a fundo as tensões relativas a esses cenários.

De acordo com Souza (2008) o tipo de barragem a ser construída depende muito das circunstâncias ambientais do local e as forças que possivelmente atuariam sobre a mesma, levando em consideração questões como a disponibilidade de materiais, a possível região aonde se dará o empreendimento e os custos financeiros envolvidos, sem esquecer a questão

ambiental no tocante aos possíveis impactos que o projeto poderia provocar no meio ambiente circundante. Em linhas gerais, afirma que uma barragem possui as seguintes características:

- a) Altura superior a 15 metros; ou
- b) Altura entre 10 e 15 metros, satisfazendo uma das seguintes condições:
  - a. Comprimento da crista igual ou superior a 500m;
  - b. Reservatório com volume total superior a 1.000.000 m<sup>3</sup>;
  - c. Vertedouro com capacidade superior a 2.000 m<sup>3</sup>/s;
  - d. Barragem com condições difíceis de fundações; ou
  - e. Barragem com projeto não condicional.

Entre os principais tipos de barragem, destacam-se:

- a) Barragem De Enrocamento Com Face De Concreto;
- b) Barragem De Concreto Gravidade (Concreto Massa);
- c) Barragem De Concreto Estrutural Com Contrafortes;
- d) Barragem De Concreto Em Arco De Dupla Curvatura;
- e) Barragem De Terra Homogênea;
- f) Barragem De Terra-Enrocamento;
- g) Barragem Em Aterro Hidráulico;
- h) Barragem De Gravidade Aliviada. (SOUZA, 2008, p.22).

Por sua vez, Moecke (2014) defende que barragens pode ser classificadas com base em uma série de critérios distintos, como finalidade, projeto hidráulico e materiais que lhe constituem. Em se tratando especificamente da finalidade, a barragem pode ser categorizada a fins de armazenamento, desvio ou retenção.

Já se o critério é a metodologia de projeto hidráulico, as barragens são classificadas em duas categorias principais, barragens galgáveis e não galgáveis. Por fim, se manifesta a classificação com base no material utilizado para a sua construção, no caso as barragens de concreto, terra ou por meio de enrocamento (MOECKE, 2014). A fim de estruturar de forma resumida estes conceitos, as principais características podem ser observadas por meio do Quadro 2.

Quadro 2– Principais parâmetros de classificação de barragens e suas características

<b>Tipos de Barragem de acordo com a Finalidade</b>	
<b>Barragens de Armazenamento</b>	São utilizadas para a captação de água durante períodos de cheias, de modo que o volume armazenado neste período possa ser utilizado nos períodos de estiagem. São comumente observadas em projetos de pequena escala, como açudes.
<b>Barragens de Desvio</b>	Se prestam ao desvio de grandes volumes de água para áreas específicas como diques, canais e outros sistemas de abastecimento. Esta modalidade de barragem é geralmente empregada no contexto de irrigação e abastecimento de água para cidades e indústrias.
<b>Barragens de Retenção</b>	Destinadas à mitigação e controle de enchentes. Portanto, se prestam a minimizar possíveis efeitos adversos oriundos de eventos extremos e que podem promover danos a uma determinada localidade. As barragens de retenção são divididas em duas classes, aquela em que a água é retida temporariamente no reservatório e aquela em que a água fica retida a fim de que ocorra uma infiltração natural no subsolo.
<b>Tipos de Barragem de acordo com seu projeto hidráulico</b>	

Fonte: Adaptado de Moecke (2014)

A figura 6 mostra a seção transversal da barragem de itumbiara, que é do tipo concreto gravidade. Esse tipo de barragem é constituída por uma parede de concreto que resiste à impulsão da água pelo seu próprio peso e transmite as tensões para a fundação. A utilização de contrafortes a jusante permite suavizar a parede da barragem.

**Figura 6** – Seção transversal da barragem de concreto gravidade de Itumbiara



Fonte: Souza(2013)

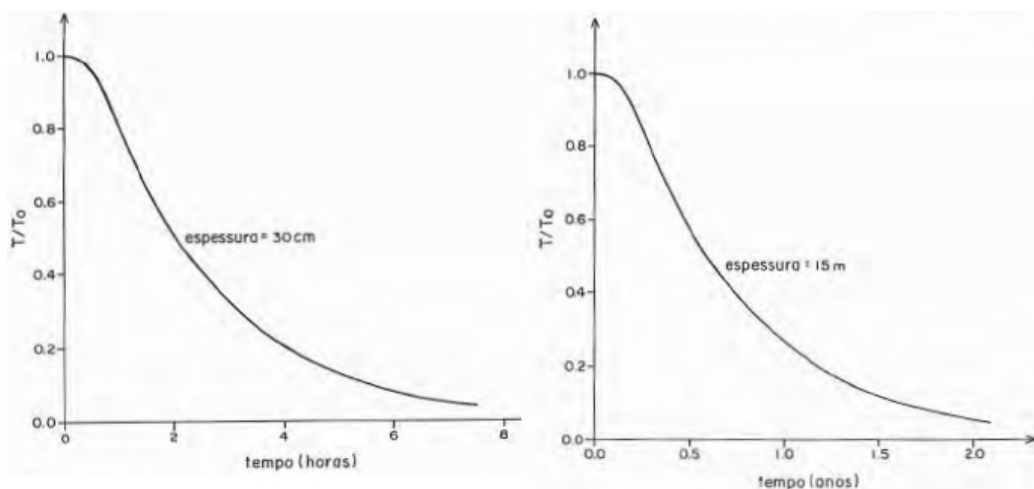
#### 1.4. TENSÕES EM BARRAGENS

Em geral, o concreto massa é utilizado para estruturas de grandes volumes, como as barragens. Algumas das vantagens de sua utilização são a facilidade de aplicação, a boa adequação a formas e o menor consumo de cimento. Como desvantagens destacam-se a necessidade de um controle rigoroso do calor de hidratação e a necessidade de um número elevado de mão de obra para sua aplicação em grandes estruturas.

Araújo (1995), observa que a principal diferença entre o concreto massa e o concreto estrutural convencional é o comportamento térmico, pois afirma que estruturas baseadas na utilização de concreto massa possuem dimensões maiores e tem a capacidade de reter o calor por mais tempo em seu interior.

A fim de exemplificar a dificuldade de dissipação do calor em uma grande estrutura de concreto, Araújo (1995) apresenta um exemplo hipotético de uma parede que está a uma temperatura inicial  $T_0$  no instante  $t=0$  e tem suas faces resfriadas subitamente a  $0^\circ\text{C}$ . A simulação é apresentada para uma parede que possui 30cm de espessura, valor que defende como sendo o habitual em matéria de construções convencionais. E segundo os dados que o autor utilizou, tal estrutura tem a capacidade de reduzir sua temperatura inicial em 95% após 7,5 horas. E seguindo a mesma lógica, afirma que uma estrutura que conta com 15m de espessura, como é o caso de uma barragem em arco, levaria teoricamente dois anos para reduzir estes mesmos 95%. Noção que transporta para um gráfico, presente na Figura 7.

Figura 7 – Resfriamento em parede de concreto (espessura = 30 cm e 15m)



Fonte: Araújo (1995)

No caso do cimento, o calor gerado a partir de sua hidratação é dissipado instantaneamente, no entanto, pelas suas características estruturais, isso faz com que haja uma

diferença de temperatura em relação a superfície e o interior de uma estrutura em concreto, o que por si só pode levar ao surgimento de tensões. “a redução de temperatura no concreto massa é muito lenta, com altos gradientes térmicos entre a superfície e o interior. Dessa maneira, o interior da estrutura introduz uma restrição às deformações das suas superfícies, o que pode levar à fissuração das mesmas.” (ARAUJO, 1995, p.22).

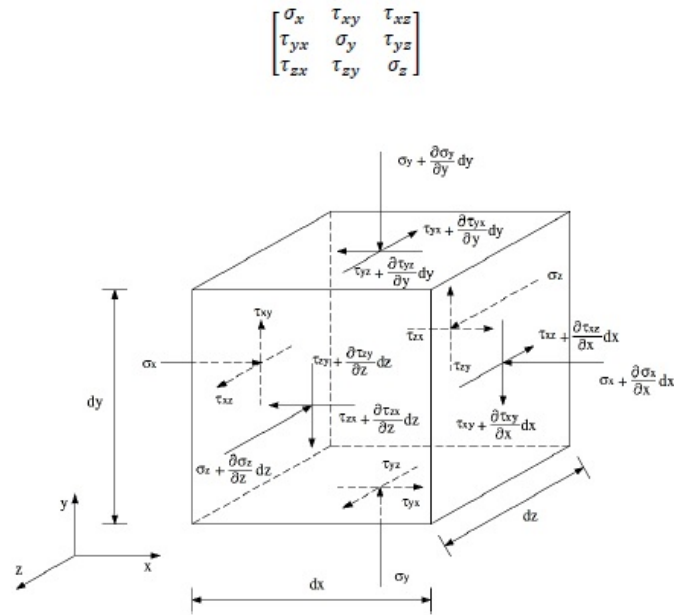
Durante a hidratação, para evitar fissuras e tornar mais rápido o processo de resfriamento da estrutura, é comum a utilização de misturas com baixo teor de cimento a fim de reduzir a geração de calor na massa de concreto devido principalmente ao aluminato e ao silicato tricálcicos. Emprega-se também a técnica de pré-resfriamento dos agregados a fim de reduzir a temperatura máxima do concreto durante o período de hidratação e é comum ainda a substituição de parte da água de amassamento por gelo em escamas.

Além das medidas citadas, normalmente, é empregada a técnica da construção em camadas de pequena altura, concretadas em intervalos de tempo mais espaçados, o que facilita a dissipação do calor da massa de concreto. O emprego de juntas de contração, também faz parte dos procedimentos correntemente adotados na construção de grandes estruturas como as barragens de concreto.(ARAUJO, 1995, p.05).

Conforme Souza (2017) no contexto da análise do comportamento de barragens o conhecimento das tensões e deslocamentos que interagem com a estrutura é uma prática fundamental, pois isso contribui para identificar *a priori* problemas como fissuras e danos, possibilitando desta forma intervir nestes pontos críticos antes da realização do projeto. E para este fim uma série de estratégias podem ser adotadas, na forma de métodos numéricos e ferramentas computacionais.

A figura 8 descreve uma situação hipotética na qual um elemento infinitesimal sofre a ação de tensões em todas as suas faces, tensões estas que podem ser divididas em nove parcelas distintas, que vistas como um todo caracterizam um tensor de tensões.

Figura 8 – Tensões atuantes em um volume infinitesimal



Fonte: Souza (2017)

As tensões atuantes nesse elemento infinitesimal hipotético podem ser descritas como totais ou efetivas. Em se tratando especificamente de uma situação em que um elemento, como uma barragem, sofre com tensões vindas do solo, a tensão total atuante neste solo depende de fatores como o peso do solo que se encontra acima do ponto analisado, bem como cargas aplicadas.

Além disso, “a presença de água nos vazios do solo gera uma pressão que tende a atrair ou distanciar as partículas. Esta pressão exercida pela água é denominada de poro-pressão” (SOUZA, 2017, p.101). De acordo com Gutstein (2003), tomando como exemplo o contexto das barragens de gravidade, estas estruturas de forma geral se encontram sob os efeitos das ações de:

- Seu próprio peso e sobrecargas fixas presentes;
- Pressão hidrostática;
- Subpressão;
- Pressões intersticiais sobre os poros de concreto;
- Empuxos de terras ou de silite que se encontrem presentes em aterros ou assoreamentos situados à montante ou jusante da barragem;
- Choques de ondas ou por meio da ação dinâmica da água;
- Efeitos provenientes das variações de temperatura, retração e deformação lenta do concreto;
- Ações resultantes da deformação das fundações e das encostas;

- i. E no caso de regiões que se encontram sujeitas a sismos também podem ser mencionadas as forças sísmicas.

A subpressão consiste então no esforço que é exercido em uma estrutura ou em sua fundação, no sentido ascendente, isto é, de baixo para cima, em função da percolação da água através do maço (de concreto ou rochoso). Na fundação a subpressão atua no sentido de reduzir o peso efetivo da estrutura sobrejacente e, em consequência, a resistência ao cisalhamento de planos potenciais de deslizamento. (GUTSTEIN, 2003, p.35).

Conforme Gutstein (2003), de forma geral o peso do concreto é fixado em  $24 \text{ kN/m}^3$ , e caso o pesquisador queira um valor mais exato deve levar em consideração os agregados que foram utilizados para a sua fabricação. Em se tratando especificamente dos efeitos da temperatura, retração ou deformação lenta do concreto aponta para a realização de análises térmicas, sendo que para este fim é necessário obter dados relacionados ao comprimento dos blocos e a dosagem do concreto utilizada.

Em geral, para se evitar fissuras irregulares do concreto provocadas pelas deformações devido à retração e à variação de temperatura, a barragem é dividida ao longo de seu eixo longitudinal, por juntas verticais de dilatação que devem estender-se da rocha de fundação à crista. As juntas são fechadas por meio de vedações paralelas à face de montante da barragem (juntas elásticas de borracha sintética) (GUTSTEIN, 2003, p.35).

De acordo com Souza (2017) as deformações em uma estrutura ocorrem quando se verifica uma alteração significativa nas posições relativas de seus pontos, portanto, entende que deva ser feita uma diferenciação entre deformação e deslocamento, pois este último pode ser descrito como a alteração das posições dos pontos em relação a um ponto externo determinado.

Conforme Gutstein (2003) o cálculo das pressões sobre uma determinada barragem deve levar em consideração também a existência ou não da presença de cortinas de drenagem, pois afirma que a distribuição de pressões no caso de uma barragem de gravidade sem a presença de cortina de drenagem implica em considerar a existência de uma variação linear entre a coluna de água a montante e a coluna de água a jusante até zerar a água a jusante.

Por outro, quando a cortina de drenagem se faz presente, as pressões internas devem ser calculadas com base no tamanho, localização e espaçamento dos drenos, bem como a forma como se dá a distribuição de pressões neutras internas ao longo da fundação, somando-se a isso a questão da porosidade da rocha, presença de juntas, falhas e extensão da cortina de injeção.

Esta determinação pode ser feita através do traçado de redes de fluxo por vários métodos incluindo modelos físicos bi ou tridimensionais ou modelos numéricos por elementos finitos também bi ou tridimensionais. U.S. Bureau of Reclamation (1976) recomenda ainda que seja adotada uma redução de  $2/3$  da diferença de níveis hidrostáticos de montante e de jusante na linha de drenos, na falta de outras análises ou em projetos preliminares. Esta redução é baseada na observação do comportamento das obras construídas pelo órgão (GUTSTEIN, 2003, p.37).

No tocante a questão das tensões relacionadas a diferenças de temperatura em barragens de concreto, Araujo (1995) afirma que as estimativas para serem realizadas devem levar em consideração também as fases construtivas da estrutura, pois uma vez que a dinâmica de dissipação de calor se dá de forma geral por meio de convecção, entende-se que a forma pela qual o concreto é lançado é determinante. O que por sua vez implica em se conhecer a temperatura inicial do concreto, o período de duração da cura e o tempo destinado a retirada das fôrmas, bem como o intervalo compreendido entre a concretagem das diversas camadas presentes.

Em seu artigo, Hachich *et al* (2004) descreve um caso claro da importância de se estudar a influência das tensões em uma barragem ao afirmar que durante a etapa das escavações para a execução das fundações da futura Barragem do Castanhão no Ceará, observou-se que no leito do rio constava uma depressão de paredes íngremes preenchida com areias de compactação média a fofa, fenômeno que foi chamado de “paleocanal”.

O caso é que este paleocanal, que poderia chegar a possuir mais de 25 metros de profundidade em alguns pontos poderia colocar em jogo a segurança da obra, pelo fato de que o paleocanal era preenchido por materiais heterogêneos e mais deformáveis que o restante da fundação e que o corpo da barragem de terra compactada.

Este cenário poderia resultar em uma redistribuição de tensões promovida pela simples presença deste paleocanal, levando em consideração que espera-se que as regiões mais rígidas absorvam boa parte das cargas verticais e uma parte de regiões menos rígidas. O que por consequência pode ocasionar:

- a. redução dos coeficientes de segurança do talude de jusante da barragem, em período operacional, mesmo quando considerados apenas os carregamentos estáticos;
  - b. aumento da susceptibilidade a fenômenos sísmicos, cuja probabilidade de ocorrência na região era considerada não desprezível por diversos estudos.
- (HACHICH *et al*, 2004, p.2).

A título de conclusão, Hachich *et al* (2004) aponta que os estudos tridimensionais realizados com base nesse cenário indicaram que este fenômeno de redistribuição de tensões trazia como resultado uma redução dos coeficientes de segurança de círculos mais profundos da estrutura, o que colocava em risco o próprio material de fundação, levando em consideração que a sua resistência era fundamentalmente de atrito. Por outro lado, em círculos mais rasos o

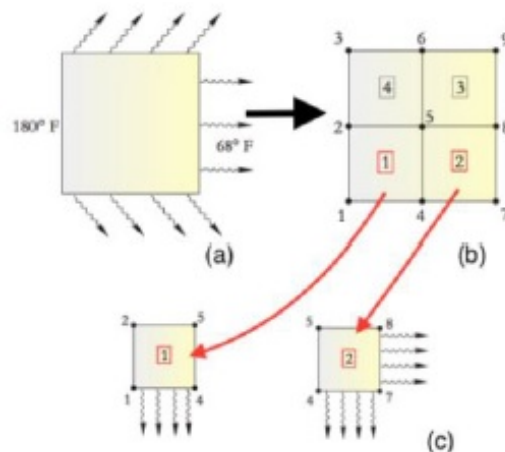
alívio de tensões produzia um efeito menor ou contrário.

No entanto, ao se debruçarem sobre a questão de uma hipotética mas não impossível situação de solicitação sísmica, Hachich *et al* (2004) afirma que a segurança da estrutura da futura Barragem do Castanhão se tornaria insustentável, o que levou a necessidade de se tomar providências à nível projetual a fim de que fossem alcançados níveis de segurança compatíveis com o cenário observado, o que passa pelo confinamento das areias de fundação. “Essa eventual redução de tensões efetivas só implicaria instabilização se não fosse garantido o adequado confinamento das areias de fundação por material com resistência adequada” (HACHICH *et al*, 2004, p.19).

### 1.5. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

De acordo com Silva Junior (2018) o Método dos Elementos Finitos se baseia em dividir um determinado problema em partes menores cujas dimensões sejam finitas, o que significa que a soma de todos os subdomínios seja igual ao problema original, uma noção que se apresenta ilustrada na Figura 9.

Figura 9– Discretização do Domínio



Fonte: Silva Junior (2018)

Em cada subdomínio são utilizadas funções algébricas que calculam aproximações locais do fenômeno físico. Quanto maior for o número de subdivisões, mais próximo o resultado estará do valor exato. Por tornar o meio contínuo em várias partes discretas finitas, os subdomínios são chamados de elementos finitos (SILVA JUNIOR, 2018, p.31).

De acordo com Alkmin (2016) o Método dos Elementos Finitos é um método de discretização empregado para se encontrar soluções aproximadas de equações diferenciais parciais e tornou-se o método padrão para resolução de problemas que envolvem estruturas e

mecânica dos sólidos, o que em seu entendimento, se deve a flexibilidade e padronização dos mecanismos de solução que o MEF permite.

A partir destas considerações, Alkmim (2016) explica as etapas do método como a resolução aproximada de equações de campo pertinentes a um determinado sub domínio intitulado “elemento”. A seguir é realizado um processo que chama de “assemblagem”, cujo objetivo é recuperar a solução em todo o domínio sem prejuízo a continuidade ou ao equilíbrio nodal dos elementos.

O Método dos Elementos Finitos está intimamente relacionado a aplicações computacionais desde a sua criação entre os anos de 1956 e 1964, momento em que o método foi convenientemente adaptado ao contexto computacional por meio da álgebra linear.

Durante o início do desenvolvimento da técnica podem-se citar 5 importantes autores que contribuíram para divulgação e aprimoramento da ferramenta: Courant, Argyris, Turner, Clough e Zienkiewicz (MEEK, 1996). Além desses autores, outros nomes como: Ritz, Bubnov, Galerkin são notórios no histórico, (GANDER; WANNER, 2012a). (ALKMIM, 2016, p.6).

Nesse sentido Leal (2015) afirma que o surgimento do Método dos Elementos Finitos não se deve a apenas uma pessoa ou um grupo de pesquisadores que tenham atuado em conjunto em um mesmo espaço de tempo, pois o método, tal como é conhecido hoje, pode ser seguramente descrito como resultado de diversos estudos e contribuições ao longo da história.

Sendo que os primeiros estudos a experimentarem a utilização do Método de Elementos Finitos remontam a primeira metade da década de 60, embora ainda se encontrassem baseados em larga medida nos métodos de Rayleigh-Ritz e Galerkin. Em seu estudo, Leal (2015) também aponta que os engenheiros da Boeing foram os primeiros a empregar o MEF na indústria aeronáutica.

Em suma, Leal (2015) considera que a Universidade de Berkeley foi o principal centro de pesquisa em torno do Método dos Elementos Finitos, levando em consideração que o mundo se encontrava no contexto da Guerra Fria, o que explica a adaptação do método para o ambiente computacional e o seu emprego no campo da pesquisa nuclear, defesa, indústria automotiva e setor aeroespacial.

No entanto, Logan (2007) vai mais além ao defender que o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos remonta a década de 40, em um contexto de engenharia estrutural a partir dos esforços de Hrennikoff e McHenry, em 1941 e 1943 respectivamente, portanto, bem antes do que apontam Leal (2015) e Alkmim (2016).

Além disso, Logan (2007) também afirma que Courant havia proposto em 1943 uma configuração para solução de tensões de forma variacional, o que veiculou na forma de um

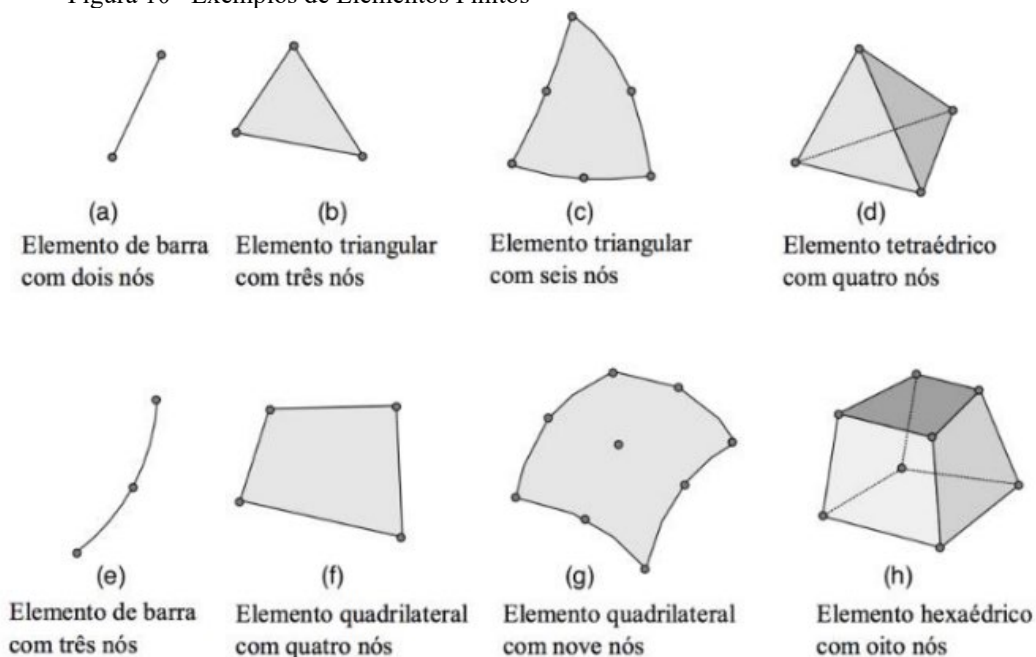
artigo, embora o devido reconhecimento tenha vindo muito tempo depois. Neste artigo ele propôs a introdução de funções de interpolação por partes em sub-regiões triangulares, formando toda a região como um método para obter soluções numéricas aproximadas.

Em 1947, Levy desenvolveu o método de flexibilidade ou força e, em 1953, seu trabalho sugeriu que outro método (o método de rigidez ou deslocamento) poderia ser uma alternativa promissora para o uso na análise de estruturas de aeronaves estaticamente redundantes. No entanto, suas equações eram difíceis de resolver manualmente, e assim o método se tornou popular apenas com o advento do computador digital de alta velocidade.

“Em 1954, Argyris e Kelsey desenvolveram métodos de análise estrutural de matriz usando princípios de energia. Esse desenvolvimento ilustrou o importante papel que os princípios energéticos desempenhariam no método dos elementos finitos.” (LOGAN, 2007, p.2). Conforme Silva Junior (2018) os elementos finitos podem ser classificados a partir de sua forma geométrica, funções de aproximação e pelos tipos de problemas para os quais foram criados, tal como ilustra a Figura 10.

Sendo que é possível observar que cada elemento possui uma quantidade determinada de pontos nodais, também chamados de “nós”, que possuem a função fundamental de ligar um elemento ao outro. “Os nós compartilhados por diferentes elementos adjacentes terão o mesmo valor independentemente dos elementos” (SILVA JUNIOR, 2018, p.32).

Figura 10– Exemplos de Elementos Finitos



Fonte: Souza (2003)

Todas as propriedades do contínuo confinado no interior do elemento são representadas através dos nós, que podem ser internos, quando interagem matematicamente somente com nós do mesmo elemento, ou externos, quando interagem com nós de outros elementos. Os nós permitem a discretização da estrutura, o que possibilita a simplificação do problema analítico em um sistema de equações que pode ser resolvido algebricamente (SOUZA, 2008, p. 56).

A seguir, Silva Junior (2018) afirma que os elementos finitos, bem como seus respectivos pontos nodais, ao serem vistos em sua totalidade e em conjunto na forma de domínio discretizado, passam a receber o nome de malha. Situação em que as informações de cada elemento são alocadas em um contexto matricial, permitindo a formação de um Sistema Global de Equações, que também chama de “matriz global”, sendo que a sua solução fornece valores para as incógnitas pertinentes aos pontos nodais, que são calculadas a partir dos valores dos nós conhecidos.

Por sua vez, Souza (2008) afirma que o Método dos Elementos pode ser definido a partir de diferentes enfoques, como se segue:

- i. Enfoque Matemático: Interpreta o método como uma possibilidade de encontrar soluções aproximadas para equações diferenciais parciais ou o que chama de Problemas de Valor de Contorno (PVC), tal como ocorre com o Método das Diferenças Finitas. Nesse sentido aponta que o MEF pode ser explicado pela seara da Matemática como sendo a forma fraca de um PVC;
- ii. Enfoque Físico: Interpreta o método como um método de discretização, ou seja, o analisa pela sua capacidade de transformar um sistema contínuo baseado em uma infinidade de pontos em um sistema discreto, que conta com um número finito de pontos;
- iii. Enfoque Variacional: Entende o MEF como uma modificação do Método Variacional de Rayleigh-Ritz, no qual o domínio de integração do funcional é subdividido em regiões.

Sobre isso Silva Junior (2018) afirma que existem três métodos distintos por meio dos quais é possível obter as equações de elementos finitos de um problema, na forma do método direto, variacional e o método dos resíduos ponderado, cujas características básicas se encontram no Quadro 3.

Quadro 3 – Comparativo entre métodos empregados para obtenção de equações de elementos finitos no contexto de um problema

<b>Método Direto</b>	Fornecer uma idéia física muito clara do MEF. O mais recomendado para quem está iniciando nos estudos sobre elementos finitos. Por outro lado, sua utilização se restringe a problemas unidimensionais.
<b>Método Variacional</b>	Requer a existência de um funcional, cuja minimização resulta nas equações diferenciais que descrevem os fenômenos físicos.
<b>Método dos Resíduos Ponderados</b>	Por se adequar a maioria dos problemas, o método de Galerkin encontra muita aceitação.

Fonte: O Autor (2020)

De acordo com Logan (2007) geralmente não é possível obter soluções matemáticas analíticas para problemas envolvendo geometrias complicadas, cargas e propriedades do material. Soluções estas que se caracterizam por ser fornecidas a partir de uma expressão matemática que produz os valores das quantidades desconhecidas desejadas em qualquer local do corpo (aqui estrutura total ou sistema físico de interesse).

Portanto, se apresentam como válidas para um número infinito de locais no corpo. Essas soluções analíticas geralmente exigem a solução de equações diferenciais ordinárias ou parciais, as quais, devido às geometrias complicadas, cargas e propriedades do material, geralmente não são obtidas. Portanto, precisamos confiar em métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, para soluções aceitáveis.

Nesse sentido, é seguro afirmar que esse processo de modelagem de um corpo, dividindo-o em um sistema equivalente de corpos ou unidades menores (elementos finitos) interconectados em pontos comuns a dois ou mais elementos (pontos ou nós nodais) e / ou linhas de fronteira e / ou superfícies, é chamado discretização. “No método dos elementos finitos, em vez de resolver o problema de todo o corpo em uma operação, formulamos as equações para cada elemento finito e as combinamos para obter a solução de todo o corpo.” (LOGAN, 2007, p.1).

Em suma, Souza (2008) afirma que uma das principais vantagens do método é permitir que sejam adotadas funções mais simples para se descrever o comportamento de um material que se encontra no interior do elemento, possibilitando desta forma uma significativa redução da complexidade da análise da estrutura como um todo.

Portanto, isso implica em dizer que o pesquisador, ao invés de buscar resolver globalmente a estrutura, opta por resolver espaços menores, levando em consideração que o comportamento físico do material seja mais fácil de averiguar e correlacionar com o modelo

matemático neste espaço, possibilitando ao fim encontrar uma solução global aproximada e razoável (SOUZA, 2008)

## 1.6. CONDIÇÕES DE CONTORNO

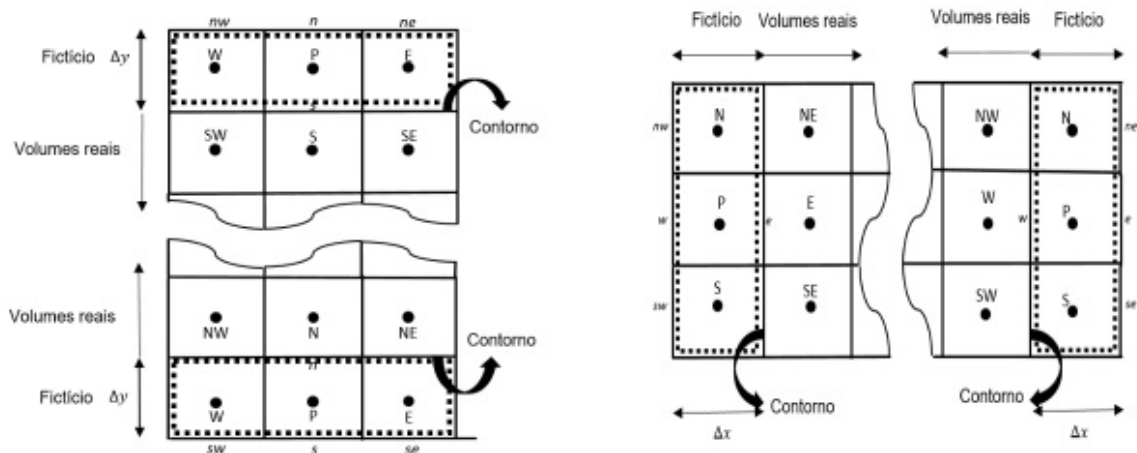
Conforme Justo (2001) a definição em torno das condições de contorno é uma das etapas mais significativas em matéria de resolução de problemas no âmbito da dinâmica computacional de fluidos. No entanto, chama a atenção para o fato de que o número de condições de contorno, bem como os seus tipos dependem do problema a que se apresenta para o pesquisador, bem como identificar se o tipo de equação é parabólica, hiperbólica ou elíptica.

De acordo com Oliveira, Ferreira e Pontes (2010) as condições de contorno também podem ser chamadas de condições de fronteira, e são utilizadas para se determinar os valores iniciais de um determinado campo, seja em matéria de potencial elétrico-magnético ou de um campo elétrico-magnético ao longo da fronteira estabelecida para o domínio de um problema.

Conforme Righi (2019) a abordagem metodológica das condições de contorno são de fundamental importância no âmbito dos problemas de engenharia, bem como suas implantações. Portanto, a etapa de escolha da técnica de aplicação não deve ser observada como uma atividade secundária.

Condições de contorno podem ser utilizados no contexto dos volumes fictícios, uma técnica baseada na criação de volumes inexistentes nas fronteiras (contornos) e que desta forma, não possuem posição geométrica na malha. O caso é que esta aplicação entende todos os volumes reais como volumes internos, estando inclusas as fronteiras, ao passo que a fronteira ela mesma é compartilhada por volumes reais e fictícios, nesse sentido a figura 11 contribui para ilustrar a teoria.

Figura 11 – Condição de contorno com volume fictício



Fonte: Righi (2019)

A técnica dos volumes fictícios também envolve desvantagens, como a criação de novas incógnitas, o que traz como resultado o aumento do tamanho do sistema linear. “É necessário criar equações para os volumes fictícios produzidos em função das condições de contorno existentes” (RIGHI, 2019, p.42). Resumidamente, as outras técnicas são os volumes de espessura zero e balanço para os volumes de fronteira.

Levando isso em consideração, em primeiro lugar Justo (2001) aborda a questão a partir do chamado “Arranjo diferenciado”. Sendo que o conceito implica na identificação de que topo de condição de contorno será utilizada. Além disso aponta que o trabalho em cima de condições de contorno deve ser realizada de formas ligeiramente diferentes a depender de que se o contexto é de variáveis escalares ou vetoriais.

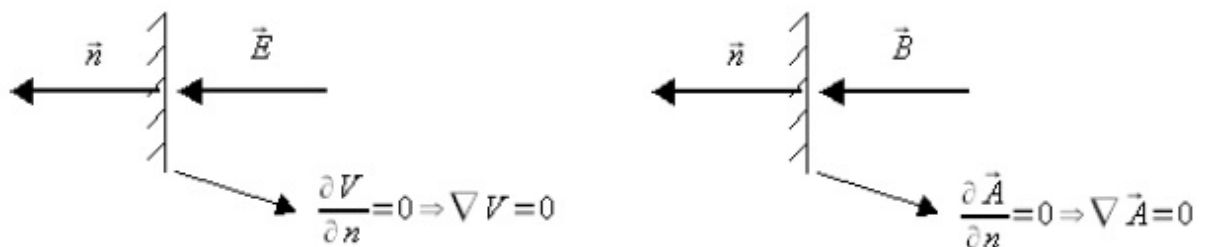
Segundo Oliveira, Ferreira e Pontes (2010) as duas principais condições de contorno recebem os nomes de Condição de Dirichlet (Figura 12) e Condição de Neumann (figura 13), sendo que a primeira é amplamente utilizada a fim de se definir um mesmo valor de potencial elétrico-magnético ao longo de parte da fronteira que delimita o domínio do problema, e a segunda se presta ao mesmo contexto, embora nesse caso o potencial elétrico-magnético não deva apresentar variação em sua direção ortogonal em relação as partes da fronteira que estão envolvidas na questão.

Figura 12 – Condição de contorno de Dirichlet, para um problema de eletrostática e magnetostática



Fonte: Oliveira, Ferreira e Pontes (2010)

Figura 13 – Condição de contorno de Neumann, para um problema de eletrostática e magnetostática



Fonte: Oliveira, Ferreira e Pontes (2010)

Por sua vez, Righi (2019) também coloca a Condição de Contorno de Robin entre as

principais utilizadas. Afirmando que a utilização deste artifício é necessária em face de situações em que equações alcançam somente os volumes internos do domínio deixando de fora volumes adjacentes aos contornos (ou fronteiras) desse domínio. O que implica em um tratamento diferente para a questão. “Isto ocorre porque há necessidade de um tratamento diferente para os volumes nos contornos do domínio, já que este possui as condições de contorno necessárias para representar o modelo físico” (RIGHI, 2019, p.41).

Em seu trabalho, Righi (2019) observa as diferenças entre a condição de contorno de Dirichlet e de Neumann apontando que na primeira, a variável  $\phi$  do contorno é conhecida, ao passo que na segunda, apenas o fluxo da variável  $\phi$  para o contorno é conhecida. No tocante a condição de contorno de Robin, sendo que indica que sua utilização está mais relacionada a problemas envolvendo transferência de calor, defende que esta se comporte mais como uma combinação linear entre a condição de contorno de Dirichlet e Neumann. “Ou seja, o fluxo de calor conhecido com o coeficiente de transferência de calor e a sua temperatura ao redor” (RIGHI, 2019, p.41). Por sua vez, Lopes Junior e Schulz (2012) elencam as diferenças tal como está exposto no Quadro 4.

Quadro 4 - Características dos principais Condições de Contorno

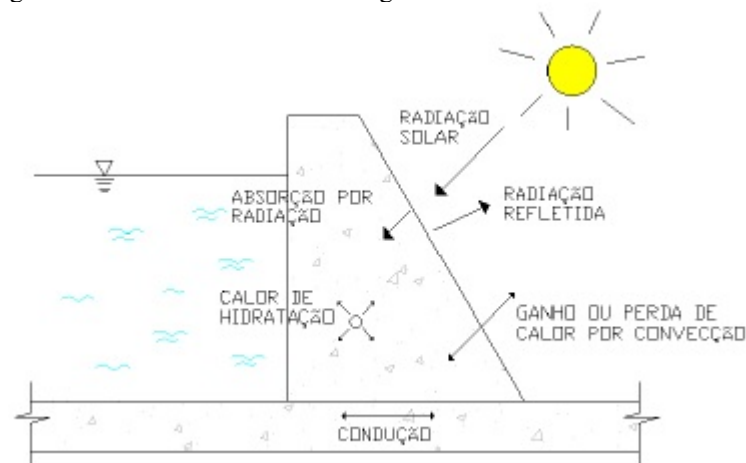
Condição de Dirichlet	Um valor específico da variável dependente é fornecido no contorno;
Condição de Neumann	Um valor específico para a derivada da variável dependente (ou gradiente) é fornecido no contorno;
Condição de Robin (ou Cauchy)	uma combinação linear dos dois primeiros tipos é fornecida no contorno.

Fonte: Lopes Junior e Schulz (2012)

## 1.7. EFEITO DA TEMPERATURA EM BARRAGENS

De forma geral, o calor absorvido em barragens em períodos quentes é igual ao perdido em períodos frios. “Nessa altura, a temperatura de cada ponto no interior da barragem, embora sofrendo variações, mantém um valor médio ao longo do tempo, que é a temperatura de equilíbrio” (COELHO *et al*, 2012, p.4). Cenário que pode ser observado por meio da Figura 14.

Figura 14 – Fluxo do Calor em barragem



Fonte: Coelho *et al* (2012)

Por sua vez, Hickmann *et al* (2015) aponta que barragens de concreto respondem a uma série de carregamentos distintos, que podem se dar na forma de força da gravidade, pressão hidrostática da água ou variações térmicas sazonais, o que é o caso descrito acima por Coelho *et al* (2012). Uma situação que move os pesquisadores a estudar a questão dos efeitos da temperatura sobre a estrutura de uma barragem de concreto.

A forma como uma barragem é construída também irá influenciar em seu comportamento no tocante a essas forças que atuam com o futuro concreto-massa da estrutura da barragem, ao mesmo tempo em que o fenômeno de transferência de calor ocorre por meio de dinâmicas de condução, convecção e radiação.

“As variações de temperatura dão origem a variações de forma e volume de um material que podem produzir tensões. No caso do concreto, quando essas tensões são de tração em uma barragem, (...) podem fissurar a barragem causando danos” (COELHO *et al*, 2012, p. 4).

Conforme Coelho *et al* (2012) a questão da transferência de calor no concreto pode ser estudada mais pormenorizadamente por meio da Equação de Fourier, que por sua vez se baseia em um fenômeno que delimita que uma quantidade de calor passa através de um determinado meio, em uma área A, em um determinado escopo de tempo.

Portanto, esse estudo acerca da condução de calor permite delimitar o campo de temperatura em um meio de acordo com as condições que são impostas em suas fronteiras. E partindo destas considerações, pode-se afirmar que entender a dinâmica das alterações de temperatura passa por entender como a temperatura se distribui.

## 2.MODELO MATEMÁTICO

### 2.1. EQUAÇÕES DE GOVERNO

A equação principal utilizada neste trabalho é a equação de condução de calor. A seguir, serão resumidas as equações e para fins de simplificação, as deduções de tais equações não serão abordadas, pois não é o foco deste projeto. Para uma explicação mais completa, pode-se consultar o trabalho de Çengel e Ghajar (2012).

A equação 2.1, é conhecida como Equação de Fourier-biot. Trata-se da equação geral para a condução de calor em regime transiente, em três dimensões e em coordenadas retangulares, onde a condutividade térmica  $k$  é constante,  $Q$  é a geração interna de calor e  $\alpha=k/\rho c$  é a difusividade térmica do material .

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

É possível reduzir a equação 2.1 as seguintes formas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{Q}{k} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

A equação 2.2 é chamada de equação de Poisson, é o caso em regime permanente onde há geração interna de calor. A equação 2.3, chama-se equação de difusão, é o caso transiente sem geração interna de calor. E equação 2.4, chamada de equação de Laplace é o caso em regime permanente sem geração interna de calor.

O caso bidimensional pode ser representado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{k} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.8)$$

O caso unidimensional, por sua vez, pode ser representado por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q}{k} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.12)$$

## 2.2. MEF: DISCRETIZAÇÃO E APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES.

Para compreensão do MEF, será desenvolvido um problema unidimensional, que consiste em determinar a temperatura em uma barra de comprimento  $l$  m, onde as temperaturas nas extremidades serão iguais a zero (condições de Dirichlet) e há a geração de calor  $Q=2$  W/m.°C.

### 2.2.1. Forma forte do problema de valor de contorno (PVC)

O problema proposto está representado pela equação 2.13. Esta formulação é chamada de forma forte do problema de valor de contorno (PVC).

$$\begin{cases} \frac{\alpha d^2 T}{dx^2} + Q = 0; 0 \leq x \leq 1 \\ T(x=0) = 0; T(x=1) = 0; Q = 2, \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Segundo Alves (2007), a forma forte do *PVC* pode ser definida de forma mais abrangente da seguinte forma: Seja o problema (*S*), dado por  $f: \Omega \rightarrow R$  e constantes  $m$  e  $n$ , devemos encontrar  $u: \Omega \rightarrow R$ , como solução da equação diferencial tal que:

$$u_{,xx} + f = 0 \text{ em } \Omega \quad (2.14)$$

Sujeito as condições de contorno:

$$u(0) = m \quad (2.15)$$

e

$$u(1) = n \quad (2.16)$$

Onde  $m$  e  $n$  são constantes dadas e  $u_{,xx}$  é a derivada segunda de  $u$  em  $x$ .

### 2.2.2. Método dos resíduos ponderados e método de Galerkin

O método dos resíduos ponderados (MRP) é uma ferramenta para obtenção de soluções aproximadas a problemas de engenharia. A equação 2.17 é a solução aproximada para a equação 2.13 obtida por meio do MRP.

$$T^n \approx u_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot c_n(x) \quad (2.17)$$

Na equação 2.17,  $n$  representa o número de nós na discretização do domínio,  $a_j$  são coeficientes a serem determinados e  $c_n(x)$  são funções escolhidas. Um requisito fundamental neste caso é que a aproximação  $u_n(x)$  satisfaça a condição de contorno associada ao problema definido na equação 2.13.

Segundo Lemos (2007), a substituição da aproximação proposta pela equação 2.17 gera um resíduo que pode ser representado por:

$$R(x) = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - u(x) \quad (2.18)$$

A integração do produto de  $R(x)$  pela função peso  $W_j$  resulta na equação 2.19, onde  $x$  é o domínio do problema e o número de funções peso  $W_j(x)$  é o mesmo número de coeficientes

$a_j$  apresentado na equação 2.17.

$$\int_x W_j(x) \cdot R(x) dx = 0 \quad (2.19)$$

Em seu trabalho, Lemos (2007) explica que o método de Galerkin é um caso particular do MRP onde as funções pesos utilizadas são as derivadas das funções tentativas em relação a cada um dos coeficientes, conforme equação 2.8.

$$W_j = \frac{\partial u(x)}{\partial a_j} \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

De maneira mais simples, dada uma função  $F$  genérica na sua forma forte, adiciona-se funções pesos  $W_j$  de modo a formular o problema em sua forma fraca. A vantagem do método de Galerkin é permitir o uso de formas integrais e com isso é possível desenvolver uma solução com elementos lineares. Uma explicação mais detalhada do Método de Galerkin e do método dos resíduos ponderados pode ser consultado em Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004).

### 2.2.3. Aplicação do MEF

A equação 2.21 é obtida por meio da aplicação do conceito da função peso  $W_j$  na equação 2.13.

$$\int_x \left[ \frac{\alpha d^2 T}{dx^2} + Q \right] w dx = 0 \quad (2.21)$$

$$\alpha \int_x \frac{d^2 T}{dx^2} w dx + \int_x Q w dx \quad (2.22)$$

Integrando por partes:

$$\left[ \alpha w \frac{dT}{dx} \right]_0^1 - \alpha \int_x \frac{dT}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \int_x Q w dx = 0 \quad (2.23)$$

Segundo Brenner e Scott (2008), uma característica imposta a função peso é que ela seja nula para pontos com condição de contorno de Dirichlet, isto é  $w = 0$ . A integração por

partes da equação 2.22 levou a duas parcelas, conforme equação 2.23, onde a primeira parcela é avaliada no contorno e a segunda no domínio. Já que temos contorno do tipo Dirichlet em  $x=0$  e  $x=1$ ,  $w=0$  nestes pontos, logo, o primeiro termo da equação 2.23 será zero. Com isso, a equação final é dada por:

$$-\alpha \int_x \frac{dT}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \int_x Qw dx = 0 \quad (2.24)$$

#### 2.2.4. Discretização do domínio

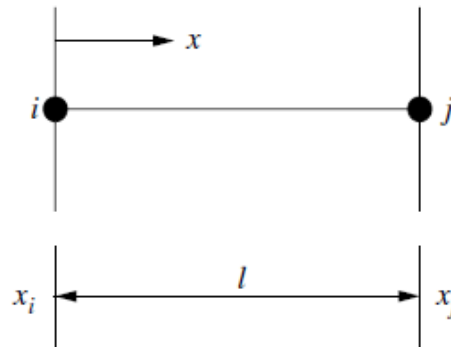
A Resolução de problemas pelo método dos elementos finitos consiste na discretização do domínio contínuo em partes finitas, assim é possível usar funções aproximadoras para achar a solução do problema de interesse em cada um dos nós. Para a aplicação deste conceito, a barra de comprimento  $1m$  do problema 2.13, foi dividida em partes, conforme ilustra a figura 15. Neste caso, o domínio foi dividido em nós que por sua vez delimitam os elementos, com cada elemento podendo ou não ter o mesmo comprimento.

Figura 15 – Discretização de domínio unidimensional



Fonte: O Autor (2020)

Conforme Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), as funções de aproximação ou funções de interpolação mais usadas são as lineares e as quadráticas. As funções de interpolação utilizadas neste trabalho são do tipo lineares. A Figura 16 mostra um elemento linear de comprimento  $l$  delimitado pelos nós  $i$  e  $j$ .

Figura 16 – Elemento linear delimitado pelos nós  $i$  e  $j$ 

Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

### 2.2.5. Funções de forma ou funções de interpolação

Considerando o elemento da figura 16, delimitado pelos nós  $i$  e  $j$  e com as temperaturas nos nós sendo respectivamente  $T_i$  e  $T_j$ . De acordo com Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), a variação linear da temperatura no elemento pode ser representada pela equação 2.25, onde  $T(x)$  é a temperatura em qualquer local  $x$  do elemento e os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes.

$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (2.25)$$

Como a equação 2.25 tem duas constantes arbitrárias, o elemento linear de dois nós resultará em um sistema com duas equações, conforme 2.26. As constantes  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , são obtidas isolando o restante dos termos do lado direito das equações, a situação é exemplificada em 2.27.

$$\begin{cases} T_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ T_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{T_1 x_2 - T_2 x_1}{x_2 - x_1} \\ \alpha_2 = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \end{cases} \quad (2.27)$$

A substituição de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , na equação 2.25, resulta em:

$$T = T_1 \left[ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right] + T_2 \left[ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right] \quad (2.28)$$

A equação 2.28 pode ser reescrita de forma mais simples conforme equação 2.29.

$$T = T_1 N_1 - T_2 N_2 \quad (2.29)$$

Na equação 2.29,  $N_i$  e  $N_j$  são as funções de interpolação, representadas em 2.30. Pode-se ainda derivar  $N_i$  e  $N_j$  em relação a  $x$ , conforme equação 2.31.

$$\begin{cases} N_i = N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ N_j = N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\begin{cases} \frac{dN_i}{dx} = \frac{-1}{x_j - x_i} \\ \frac{dN_j}{dx} = \frac{1}{x_j - x_i} \end{cases} \quad (2.31)$$

Segundo Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), a temperatura  $T$  em qualquer local  $x$  pode ser calculada usando as funções de forma, conforme equação 2.30. Há dois requisitos fundamentais para uma função de forma, um é que a função de forma assuma valor um no nó a ela associada e zero em todos os demais nós do domínio, o segundo requisito é que a soma de todas as funções de forma em um elemento é igual a um, incluindo os contornos. Os valores assumidos pelas funções de forma em diferentes locais de um dado elemento são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Valores assumidos pelas funções de forma em um elemento

Propriedades das funções de forma lineares			
Item	Nó $i$	Nó $j$	$x$ arbitrario
$N_i$	1	0	Entre 0 e 1
$N_j$	0	1	Entre 0 e 1
$N_i + N_j$	1	1	1

Fonte: Adaptado de Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

### 2.2.6. Resolução do problema

No método de Galerkin, as funções peso escolhidas são iguais as funções de interpolação. As funções aproximadoras para  $T$ ,  $W$  e  $Q$  são obtidas a partir da equação 2.17, onde as funções de interpolação são tais que  $C_n(x) = N_n(x)$ .

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \cdot N_i(x) \quad (2.32)$$

$$W = \sum_{j=1}^n W_j \cdot N_j(x) \quad (2.33)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot N_i(x) \quad (2.34)$$

Substituindo as 2.32, 2.33 e 2.34 na equação 2.24:

$$- \alpha \int_x \sum_{i=1}^n \frac{dT_i N_i}{dx} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{dW_j N_j}{dx} dx + \int_x \sum_{i=1}^n Q_i N_i \sum_{j=1}^n W_j N_j dx = 0 \quad (2.35)$$

$$\sum_{i=1}^n \cdot \sum_{j=1}^n W_j \left[ - \alpha T_i \int_x \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx + Q_i \int_x N_i N_j dx \right] = 0 \quad (2.36)$$

Para o desenvolvimento da equação 2.36, usa-se as funções de interpolação 2.30 e 2.31. A figura 15 apresenta o domínio de 1m dividido em 4 nós e três elementos de 1/3 m cada. O elemento 1 terá domínio de 0 a 1/3 com  $i=1$  e  $j=1$ , pode-se representar a primeira parte da equação 2.36 como:

$$\int_0^{1/3} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = \int_0^{1/3} \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] \cdot \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] dx = \frac{x}{(x_2 - x_1)^2} \Big|_0^{1/3} \quad (2.37)$$

Assim, chega-se à equação 2.38.

$$\int_0^{1/3} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (2.38)$$

Realiza-se o mesmo procedimento no elemento 1 para  $i=1$  e  $j=2$ .

$$\int_0^{1/3} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \int_0^{1/3} \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] \cdot \left[ \frac{1}{x_2 - x_1} \right] dx = \frac{-x}{(x_2 - x_1)^2} \Big|_0^{1/3} \quad (2.39)$$

$$\int_0^{1/3} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (2.40)$$

Para  $i=2$  e  $j=1$ :

$$\int_0^{1/3} \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = \int_0^{1/3} \left[ \frac{1}{x_2 - x_1} \right] \cdot \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] dx = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (2.41)$$

Com  $i=2$  e  $j=2$ :

$$\int_0^{1/3} \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \int_0^{1/3} \left[ \frac{1}{x_2 - x_1} \right] \cdot \left[ \frac{1}{x_2 - x_1} \right] dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (2.42)$$

Os resultados obtidos em 2.38, 2.40, 2.41 e 2.42 são apresentados na equação 2.43 na forma matricial.

$$K_{\text{elemento 1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

O procedimento usado na obtenção da equação 2.43 deve ser usado para os demais elementos. O elemento 2, tem domínio entre  $1/3$  e  $2/3$ , com  $i=1$  e  $j=1$  pode-se obter:

$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = \int_{1/3}^{2/3} \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] \cdot \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (2.44)$$

Para  $i=1$  e  $j=2$

$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \int_{1/3}^{2/3} \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] \cdot \left[ \frac{1}{x_2 - x_1} \right] dx = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \quad (2.45)$$

Ao seguir com o desenvolvimento, obtém-se o mesmo resultado da equação 2.43. A equação 2.45 pode ser representada de forma geral como em 2.46

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{-1}{x_2 - x_1} \right] \cdot \left[ \frac{1}{x_2 - x_1} \right] dx = \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \quad (2.46)$$

Neste exemplo o domínio é discretizado de tal forma que  $h=1/3$  m para cada elemento. Definindo  $h=(x_2 - x_1)$ , é possível chegar a forma matricial geral para o elemento linear:

$$K_{\text{elemento}} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

A aplicação das funções de interpolação, para o elemento 1, com  $i=1$  e  $j=1$  no segundo termo da equação 2.36 resulta na equação 2.50.

$$\int_0^{1/3} N_1 N_1 dx = \int_0^{1/3} \left[ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right] \left[ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right] dx \quad (2.48)$$

Assim:

$$\frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_0^{1/3} (x_2^2 - 2x_2x + x) dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot (x_2^2x - x_2x^2 + \frac{x^3}{3}) \Big|_0^{1/3} \quad (2.49)$$

Por fim:

$$\int_0^{1/3} N_1 N_1 dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^3}{3} = \frac{(x_2 - x_1)}{3} \quad (2.50)$$

Para  $i=1$  e  $j=2$

$$\int_0^{1/3} N_1 N_2 dx = \int_0^{1/3} \left[ \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right] \left[ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right] dx \quad (2.51)$$

Faz-se então:

$$\int_0^{1/3} N_1 N_2 dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_0^{1/3} (x_2x - 2x_2x_1 - x^2 + x_1x) dx \quad (2.52)$$

De 2.52, obtém-se:

$$\int_0^{1/3} N_1 N_2 dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \left( \frac{x_2x^2}{2} - x_2x_1x - \frac{x^3}{3} + \frac{x_1x^2}{2} \right) \Big|_0^{1/3} \quad (2.53)$$

O resultado final é representado por:

$$\int_0^{1/3} N_1 N_2 dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} = \frac{(x_2 - x_1)}{6} \quad (2.54)$$

Ainda no elemento 1, com  $i=2$  e  $j=1$ , o processo de cálculo levará ao mesmo resultado obtido em 2.54, com  $i=1$  e  $j=2$ , isto é:

$$\int_0^{1/3} N_2 N_1 dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^3}{6} = \frac{(x_2 - x_1)}{6} \quad (2.55)$$

Para o elemento 1, com  $i=2$  e  $j=2$ , o processo de cálculo levará ao mesmo resultado obtido em 2.50, com  $i=1$  e  $j=1$ :

$$\int_0^{1/3} N_2 N_2 dx = \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^3}{3} = \frac{(x_2 - x_1)}{3} \quad (2.56)$$

O agrupamento do resultado obtido em 2.50, 2.54, 2.55 e 2.56 na forma matricial é representado pela equação 2.57, onde  $(x_2 - x_1) = h$ .

$$M_{elemento} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

As matrizes obtidas em 2.47 e 2.57 estão em sua forma local, caso onde cada elemento é analisado individualmente. O agrupamento da matrizes locais para todos os elementos em uma matriz resultante leva a forma global, na qual analisa-se o domínio com todos os nós. Na forma matricial, é possível reescrever a equação 2.36 como:

$$-\alpha KT + MQ = b \quad (2.58)$$

A equação 2.58 está na forma global, onde  $K$  é chamada matriz de rigidez,  $M$  é chamada matriz de massa e  $b$  é o vetor das condições de contorno. O primeiro termo da equação 2.36 levará a matriz  $K$  e o segundo termo levará a matriz  $M$ , assim:

$$-\alpha KT = -\alpha T_i \int_x \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \quad (2.59)$$

e

$$MQ = Q_i \int_x N_i N_j dx \quad (2.60)$$

Um domínio com apenas dois elementos e três nós, resulta nas duas matrizes locais  $k^1$  e  $k^2$ , mostradas em 2.61 e 2.62 e delas resulta a matriz global  $K$ , que será uma matriz  $3 \times 3$ . A composição da matriz global é tal que  $k_{11}$  será o valor pertencente a linha 1 e coluna 1 da Matriz local do elemento 1, isto é  $k_{11} = k_{11}^1$ .  $k_{12}$  Será o valor da matriz local do elemento 1, linha 1 e coluna 2 e assim sucessivamente. No caso do elemento  $k_{22}$ , por pertencer tanto a  $k^1$  quanto a  $k^2$ , seu valor será o somatório dos dois valores, isto é  $k_{22} = k_{22}^1 + k_{22}^2$ . Os demais elementos da matriz global terão valores iguais a zero, o resultado é dado em 2.63.

$$k^1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$k^2 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Para o caso onde o domínio é dividido em 3 elementos e 4 nós, a matriz global resultante será do tipo  $4 \times 4$ , o procedimento de montagem é o mesmo do caso 2.63, conforme equação 2.64:

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1/3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

No caso geral, para um domínio com  $n-1$  elementos e  $n$  nós, a matriz de rigidez vai ter do tipo  $n$  linhas e  $n$  colunas, com o seguinte aspecto:

$$K = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & k_{12}^3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 + k_{11}^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{nn}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

O procedimento para montagem da matriz  $M$  é o mesmo. O caso geral, para um domínio com  $n-1$  elementos e  $n$  nós, a matriz de de massa será do tipo  $n \times n$ , como em 2.66:

$$M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{21}^2 & m_{22}^2 + m_{11}^3 & m_{12}^3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_{21}^3 & m_{22}^3 + m_{11}^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Assim, no caso onde há um domínio com 3 elementos e 4 nós, temos:

$$M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & 0 & 0 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 + m_{11}^2 & m_{12}^2 & 0 \\ 0 & m_{21}^2 & m_{22}^2 + m_{11}^3 & m_{12}^3 \\ 0 & 0 & m_{21}^3 & m_{22}^3 \end{bmatrix} = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Na equação 2.58, para um domínio com  $n$  nós,  $Q$  e  $b$  são vetores com  $n$  linhas. O vetor  $b$  será montado de acordo com o tipo de condição de contorno, terá o valor da condição de contorno nos nós especificados e zero nos demais. No exemplo apresentado pela equação 2.13,  $Q=2$ , constante para cada nó e a multiplicação de  $M$  por  $Q$  resulta em um vetor de  $n$  linhas

por uma coluna. Neste exemplo, com 4 nós pode-se representar:

$$MQ = \frac{1/3}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

A equação 2.58, pode ser ordenada da seguinte forma:

$$\alpha KT = MQ + b \quad (2.69)$$

Substituindo os valores, com  $\alpha = 1$  e  $h = 1/3$  temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

Na condição de contorno de Dirichlet, se conhece o valor de  $T$  no nó sujeito a essa condição. A aplicação das condições de contorno consiste então em aplicar 1 no nó da matriz global sujeito a condição de contorno de Dirichlet, a linha a qual esse nó se refere pode ser zerada e usa-se o método de eliminação Gaussiana para eliminar todos os elementos da coluna do nó em questão.

A aplicação da condição de contorno no nó 1 da primeira coluna da matriz global dada na equação 2.70, consiste em fazer  $1.T_1 = 0$  e em seguida zerar a linha 1 da matriz. Para zerar a primeira coluna, é necessário multiplicar o valor da posição  $a_{21}$  por  $T_1$  e jogar para o vetor do lado direito alternando o sinal, neste caso,  $T_1 = 0$ . O mesmo processo teria de ser feito para os demais elementos da primeira coluna que fossem diferentes de zero. A segunda condição de contorno é imposta fazendo  $1.T_4 = 0$ , zerando a quarta linha e a quarta coluna da matriz. Para isso, multiplica-se o elemento da posição  $a_{34}$  por  $T_4$  e se leva o resultado para o lado direito da igualdade, invertendo-se o sinal, como  $T_4 = 0$ , a soma no vetor do lado direito será zero. Assim, o resultado obtido é dado pela equação 2.71.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Uma formulação geral para a implementação da condição de contorno de Dirichlet é apresentada pela equação 2.72, para um caso com  $n$  nós, a matriz global com dimensões  $n \times n$  e onde os nós de contorno são os nós 1 e  $n$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Para aplicar a condição de contorno no primeiro nó, inclui-se o valor 1 na matriz global, no elemento com local de linha e coluna correspondente ao nó de contorno, nesse caso  $a_{11}$ , zera-se os demais elementos da linha correspondente e, para zerar os elementos da coluna, multiplica-se todos os demais elementos da coluna pela temperatura no nó da condição de contorno, neste caso  $T_1$  e passa-se o valor para o vetor do lado direito, invertendo o sinal. Repete-se o procedimento para os demais nós de contorno, neste caso para o nó  $n$  de modo que após as condições impostas se chega seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - a_{11} \cdot T_1 - a_{1n} \cdot T_n \\ b_2 - a_{21} \cdot T_1 - a_{2n} \cdot T_n \\ b_3 - a_{31} \cdot T_1 - a_{3n} \cdot T_n \\ \vdots \\ b_n - a_{n1} \cdot T_1 - a_{nn} \cdot T_n \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Reorganizando a equação 2.73 se obtém então o resultado dado pela equação 2.74. O processo é o mesmo para  $n$  nós de contorno Dirichlet. No exemplo apresentado não foi tratada da condição de contorno de Neumann, pois ela não será utilizada nos casos estudados neste trabalho.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \cdot T_1 - \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \cdot T_n \quad (2.74)$$

Voltando à análise para a equação 2.71, o trabalho se resume a encontrar a solução desta equação e então será encontrada a temperatura procurada em cada nó do domínio. Tal solução será encontrada multiplicando ambos os lados da equação pela inversa da matriz global e resolvendo o sistema resultante.

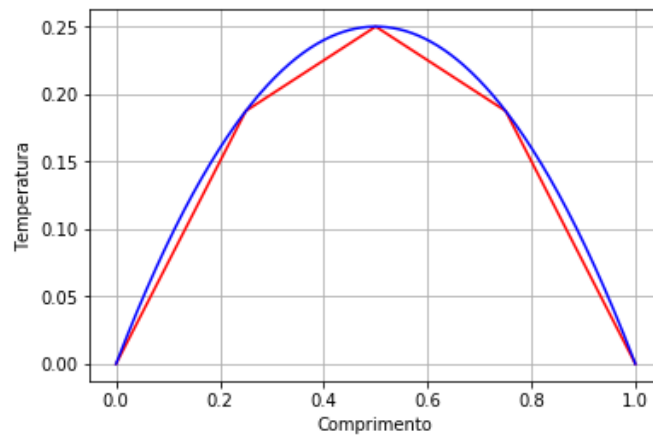
### 2.2.7. Implementação de solução computacional

O código desenvolvido neste trabalho foi pensado de modo a ser possível achar a

solução independente do número de nós da malha. O gráfico da figura 17, gerado pelo matplotlib, mostra a solução do problema para uma malha com 5 nós. O gráfico em azul é a solução analítica e o gráfico em vermelho é a solução aproximada pelo python.

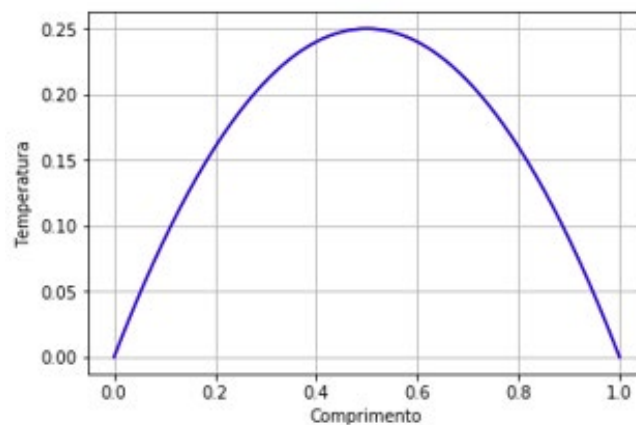
Pode-se notar que com apenas 4 elementos, a solução leva ao valor exato nos nós, mas no interior dos mesmos há uma região onde a solução analítica difere da solução aproximada, pois os nós estão muito espaçados uns dos outros, isso se deve ao fato de se usar funções de aproximação lineares. Ao aumentar-se o número de nós do domínio, aumenta-se a precisão do resultado. A figura 18 mostra a solução com 1001 nós. Nesse caso, o resultado se aproxima tanto da solução analítica que já não se visualiza a diferença entre a solução exata e a aproximada.

Figura 17 – Solução da equação 2.13, malha com 5 nós.



Fonte: O Autor (2020)

Figura 18– Solução da equação 2.13, malha com 1001 nós.



Fonte: O Autor (2020)

### 2.2.8. Caso transiente 1D

O problema desenvolvido no t3pico anterior 3 uma situa33o em regime estacion3rio onde a temperatura varia apenas no espa3o. Para um caso transiente a temperatura varia no tempo e no espa3o, neste caso existe um termo com derivada temporal, que segundo Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), pode ser discretizado por meio de aproxima33o por diferen3as finitas, o processo 3 mostrado a seguir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \quad (2.75)$$

Na equa33o 2.75,  $T^n$  3 a temperatura no instante “ $n$ ”,  $T^{n+1}$  3 a temperatura no instante de tempo ap3s “ $n$ ” e  $\Delta t$  3 o passo de tempo escolhido para a simula33o. Este m3todo 3 chamado de m3todo expl3cito, pois as temperaturas nodais para o novo instante de tempo “ $n+1$ ” s3o determinadas exclusivamente pelas temperatura nodais conhecidas no instante “ $n$ ”. Voltando a equa33o 2.13, em sua forma transiente, ela pode ser representada por:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha d^2T}{dx^2} + Q \quad (2.76)$$

A formula33o integral resulta na equa33o 2.77.

$$\int_x w \frac{dT}{dt} dx - \left[ -\alpha \int_x \frac{dT}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \int_x Q w dx \right] = 0 \quad (2.77)$$

Os termos dentro dos colchetes na equa33o 2.77 j3 foram apresentados na equa33o 2.35, a aplica33o das fun33es de interpola33o dadas pelas equa33es 2.32 e 2.33 apenas no termo da derivada temporal, resulta em:

$$\int_x w \frac{dT}{dt} dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_j N_j \frac{dT_i N_i}{dt} dx \quad (2.78)$$

Na equa33o 2.36, o termo  $W_j$  foi isolado, fazendo o mesmo processo, dessa vez considerando o componente temporal apresentado na equa33o 2.78, chega-se a:

$$\sum_{i=1}^n \cdot \sum_{j=1}^n W_j \left[ \frac{dT_i}{dt} N_i N_j dx + \alpha T_i \int_x \cdot \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx - Q_i \int_x N_i N_j dx \right] = 0 \quad (2.79)$$

Na forma matricial e lembrando que  $M$  é a matriz de massa e  $K$  a matriz de rigidez, pode-se representar a quação 2.79 como:

$$M \left( \frac{dT}{dt} \right) + \alpha K T - MQ = 0 \quad (2.80)$$

Aplicando a aproximação dada em 2.75:

$$M \left( \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right) + \alpha K T^{n+1} - MQ = 0 \quad (2.81)$$

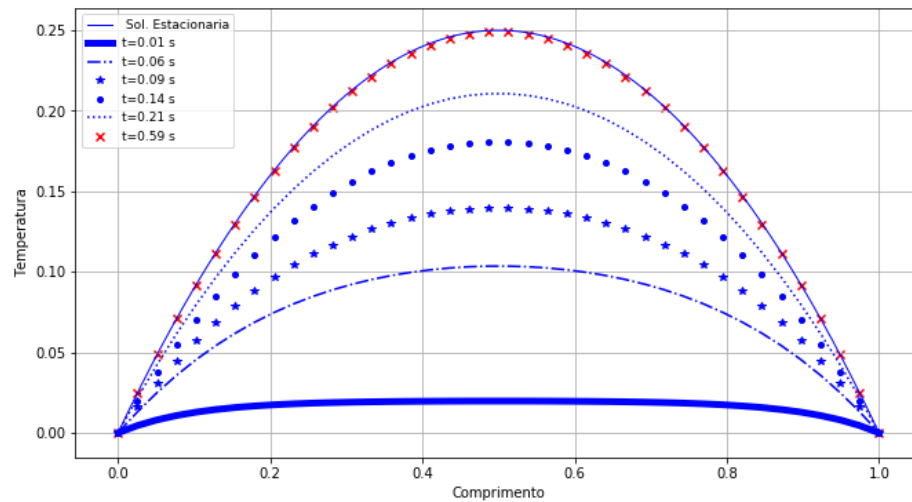
Por fim, reorganizando a equação 2.81, obtém-se:

$$\left( \alpha K + \frac{M}{\Delta t} \right) T^{n+1} = \left( \frac{M}{\Delta t} \right) T^n + MQ \quad (2.82)$$

A solução gráfica para o problema da equação 2.76, em um caso com as mesmas condições de contorno do problema dado na equação 2.13 é apresentada na figuras 19, na qual é possível ver a evolução da temperatura ao longo do tempo. O código foi desenvolvido usando uma malha de 400 nós e passo de tempo  $\Delta t = 0.01$ . Após 0.59 segundos a solução converge o regime estacionário

Como a temperatura no tempo “ $n+1$ ” é definida em função da temperatura no tempo “ $n$ ”, para o estado inicial, foi definido um vetor de temperatura com todos os nós tendo temperaturas iguais a zero, com isso é criado um loop a partir do qual é encontrado a temperatura nos nós em “ $n+1$ ”, o loop é repetido novamente para a temperatura seguinte, onde “ $n+1$ ” é encontrado em função das temperaturas nodais determinadas anteriormente e assim sucessivamente e as temperaturas tendem a evoluir para o caso estacionário. O código será explicado em maiores detalhes no próximo capítulo e pode ser consultado no Apêndice C.

Figura 19 – Variação da temperatura com passo de tempo igual a 0.01 s



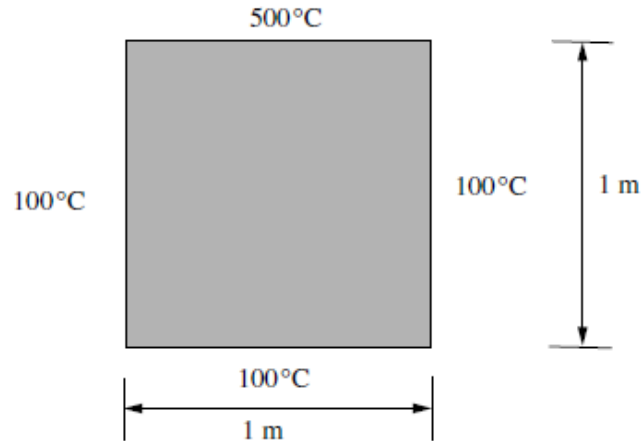
Fonte: O Autor (2020)

Foram feitas simulações no caso 1D usando o vetor de temperatura inicial com a temperatura em todos os nós iguais a um, nesse caso o gráfico do caso transiente assumiu estado inicial diferente, mas conforme o loop evoluía a solução tendia para a solução estacionária. Em simulações variando  $\Delta t$  nota-se que quanto menor  $\Delta t$ , maior será o tempo necessário para a solução convergir para o caso estacionário.

### 2.2.9. Aplicação do MEF ao caso bidimensional

A figura 20 mostra um problema bidimensional a ser resolvido. O problema consiste em determinar a distribuição de temperatura na placa de  $1m \times 1m$  sujeita a condições de contorno isotermicas de  $100^\circ C$  em todos os lados, exceto na superfície superior, onde a temperatura é de  $500^\circ C$ . A condutividade termica do material é constante e igual  $10W/m^\circ$ . O problema tem solução analítica dada pela equação 2.83 e a seguir serão discutidas as equações e matrizes que serão usadas na resolução de casos 2D.

Figura 20 – condução de calor, regime permanente em superfície quadrada.



Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

$$T(x, y) = (T_{top} - T_{side}) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{w}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{w}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi H}{w}\right)} + T_{side} \quad (2.83)$$

Como a condutividade termica é constante, pode-se representar o problema pela equação 2.84.

$$\begin{cases} k\nabla^2 T = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = 0; 0 \leq x \leq 1m; 0 \leq y \leq 1m \\ T(0, x) = T(x, 0) = T(1, y) = 100^\circ C; T(x, 1) = 500^\circ C; , k = 10W/m^\circ C \end{cases} \quad (2.84)$$

Na formulação intergral, sendo o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}$  é possível representar o problema como:

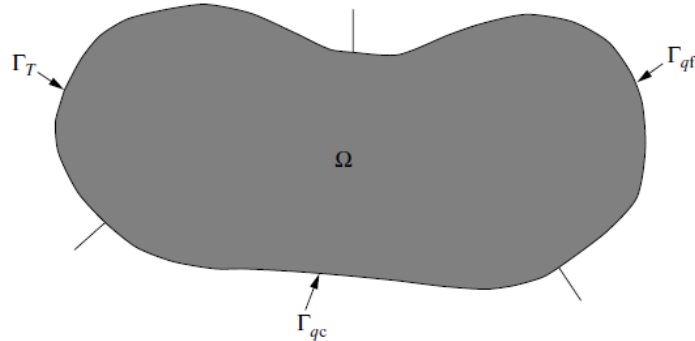
$$\int_{\Omega} w(k\nabla^2 T) d\Omega = 0 \quad (2.85)$$

A figura 21 ilustra um domínio genérico e sua fronteira, aplicando o teorema de Green na equação 2.85, chega-se a equação 2.86. Aplicando as condições de contorno na forma contínua, o primeiro termo da equação 2.86 será zero, pois há apenas condições de contorno de Dirichlet, logo,  $w=0$  e assim, chega-se a equação 2.87.

$$\oint_{\Gamma} w\nabla T d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla w \nabla T d\Omega = 0 \quad (2.86)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_w \nabla T d\Omega = 0 \quad (2.87)$$

Figura 21 – Região de um domínio e sua fronteira.



Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

Como o problema é em duas dimensões, as funções de aproximação podem ser dadas por:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \cdot N_i(x, y) \quad (2.88)$$

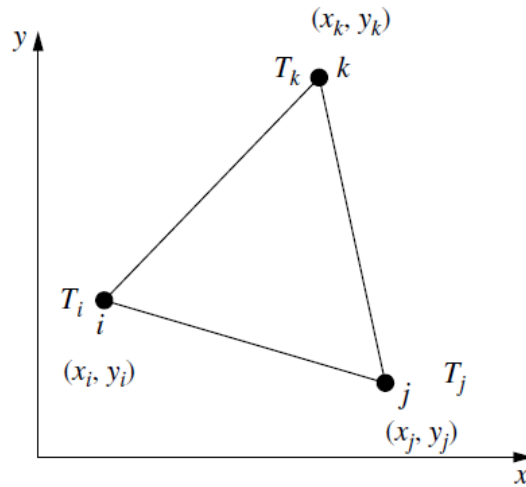
$$W = \sum_{j=1}^n W_j \cdot N_j(x, y) \quad (2.89)$$

Neste problema não há geração interna de calor, como no problema 2.13, de modo que o equacionamento levará apenas a matriz de rigidez  $K_e$ , a qual, de acordo com Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004) e Logan (2007), pode ser representada por:

$$K_e = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega = 0 \quad (2.90)$$

Na equação 2.90,  $D$  é a multiplicação de um coeficiente  $k$  pela matriz identidade  $I$ ,  $B$  é dado para o caso de um elemento triangular de 3 pontos como o da figura 22, pela matriz da equação 2.91 e  $A$  é a área do elemento triangular, dado pela equação 2.92.

Figura 22 – Elemento triangular de três nós



Fonte: Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_i & c_k \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

$$2.A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

No caso particular em que o coeficiente  $k$  é constante e isotrópico, a matriz  $K_e$  pode ser escrita como:

$$K_e = \frac{k}{4A} B^T . B \quad (2.93)$$

Na notação matricial, a equação 2.93 é representada como:

$$K_e = \frac{k}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Os coeficientes da matriz da equação 2.94 são dados por:

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j \quad (2.95)$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k; b_j = y_k - y_i; c_j = x_i - x_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i; b_k = y_i - y_j; c_k = x_j - x_i$$

Os coeficientes dados em 2.95 são obtidos dos termos  $N_i$ ,  $N_j$  e  $N_k$  por meio de sistemas de equações e o desenvolvimento completo de todas as equações e matrizes mencionadas até aqui podem ser consultadas em mais detalhes em Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004).

No estudo do problema 1D, onde havia geração interna de calor, após desenvolvimento atinge-se a equação 2.69 em sua forma matricial. Para o caso 2D, onde não há geração interna de calor ( $Q=0$ ), não há a matriz  $M$  e é possível representar o problema em sua forma matricial pela equação 2.96.

$$T = \frac{1}{\alpha} K^{-1} b \quad (2.96)$$

### 2.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Segundo Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), para problemas de condução de calor, pode-se definir as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann conforme mostram as equações 2.97 e 2.98. Considerando um domínio genérico como dado pela figura 21, tem-se que  $T_0$  é a temperatura especificada em uma dada região de contorno,  $\Gamma$  é a superfície de contorno,  $n$  é a direção externa normal à superfície e  $C$  é o fluxo constante dado. Para o caso de contorno isolado ou adiabático,  $C = 0$

$$\text{Condição de Dirichlet} \quad T = T_0 \text{ em } \Gamma_T \quad (2.97)$$

$$\text{Condição de Neumann} \quad q = -k \frac{\partial T}{\partial n} = C \text{ em } \Gamma_{qT} \quad (2.98)$$

### 3.VALIDAÇÃO

#### 3.1. CHAPA METÁLICA QUADRADA

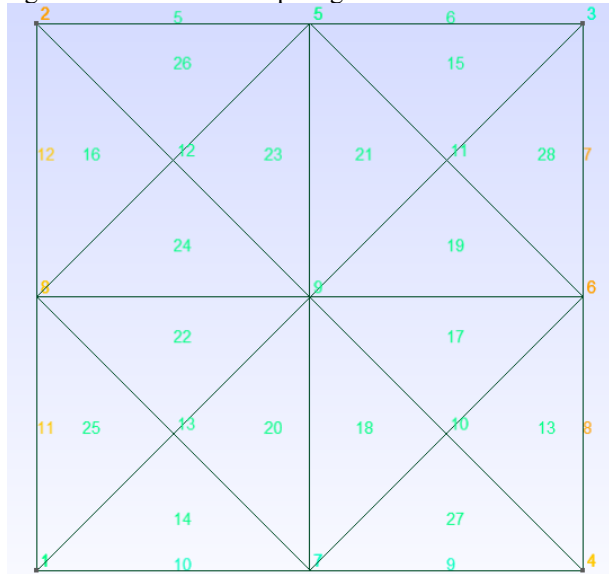
##### 3.1.1. Softwares utilizados no projeto

A implementação computacional para problemas 2D foi possível com a utilização de alguns softwares, todos gratuitos e disponíveis na internet. Devido a importância de tais softwares para este projeto, é válido mencionar os principais programas utilizados.

- a) Python: Foi escolhido por ser uma linguagem de programação de alto nível e ter ampla utilização no mercado. Para facilitar, foi usado por meio do Anaconda, programa de interface gráfica que permite trabalhar em um ambiente visualmente mais agradável. As vantagens da utilização do anaconda é que ele já vem com várias bibliotecas do python instaladas e prontas para uso além de ser um ambiente de melhor visualização e manipulação pelo usuário.
- b) Paraview: O pós processamento de projetos 1D é de fácil visualização gráfica pelo próprio python, plotando gráficos pela biblioteca do matplotlib, por exemplo. O pós processamento de projetos 2D é de difícil interpretação numérica e se torna difícil sua implementação gráfica pelo python, torna-se então interessante o uso de um programa que mostre graficamente o resultado de um problema, é isso que o paraview faz. O projeto 2D foi resolvido numericamente pelo python, que estabelece a temperatura em cada nó do domínio e o paraview foi utilizado para plotar a visualização desse resultado.
- c) Gmsh: Programa gerador de malhas onde é possível criar a geometria de acordo com o interesse do usuário e gerar malhas com grande número de elementos, de acordo com o nível de refinamento que se pretende ter no projeto. Com a malha criada, salva-se o arquivo gerado no gmsh em formato *.msh* que é usado no python para desenvolvimento de um código capaz de ler a malha. É importante ficar atento a versão do gmsh que se está usando já que cada versão do programa gera o arquivo da malha em um formato diferente. Neste projeto, foi usada a versão *4.4.1*

A figura 23 mostra uma malha 2D criada no Gmsh. Trata-se de uma placa quadrada com dimensões  $1 \times 1$ . Este exemplo foi criado inicialmente com 4 pontos os quais foram conectados por linhas, criou-se uma superfície 2D e então foi gerada a malha. Para mais detalhes de como criar geometrias no gmsh, pode-se consultar os tutoriais do programa disponíveis no site do programa.

Figura 23 – Malha Gmsh para geometria 2D



Fonte: O Autor (2020)

O gmsh cria a malha numerando primeiro os pontos da figura (pontos de 1 a 4), em seguida as linhas (elementos 1D, das arestas) e por último os elementos 2D (triangulares). Para um projeto 2D, precisa-se ler os índices dos nós, as coordenadas  $x$  e  $y$  de cada ponto, nós de contorno e a matriz de conectividade IEN, que é a matriz que associa cada elemento a seus respectivos pontos nodais e é tal que possui  $n$  linhas e 3 colunas, onde  $n$  é o número de elementos 2D do nosso domínio.

Como forma de validação, o código foi aplicado na resolução de problemas com solução analítica conhecida, a fim de comparar os valores da solução analítica com os da solução dada pelo MEF. O primeiro caso analisado é um problema apresentado no trabalho de Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), mostrado na figura 20, cuja solução analítica é dada pela equação 3.01.

### 3.1.2. Criação e leitura de malha

Nós próximos tópicos, o código numérico será explicado em maiores detalhes. É importante mencionar que o código desenvolvido é genérico possibilitando a simulação de todos os problemas apresentados neste projeto, com poucas adaptações. Esta é a grande vantagem do MEF em relação a outros métodos matemáticos, como o método das diferenças finitas, por exemplo.

A primeira etapa da resolução do problema consiste na criação de uma malha para a geometria do problema no gmsh, como a malha da figura 23 e posterior importação para o Python e leitura dos dados. Após a malha ser gerada e o arquivo salvo em formato *.msh*, importa-se o arquivo para o Python da seguinte forma:

```
Malha=[]

with open("arquivo.msh") as mesh:
    for line in mesh:
        row=line.split()
        malha.append(row[:])
```

O código acima abre o arquivo *.msh* e faz um loop sobre todos os dados do arquivo, dividindo os dados por cada linha do arquivo e adicionando cada uma das linhas a lista *malha*, criada no início do código. Uma vez que existe os dados na lista *malha*, cria-se um outro loop para percorrer a lista *malha* e armazenar os dados necessários.

Os índices no Python se iniciam em zero, para se adequar a malha obtida no gmsh ao programa criado, optou-se por diminuir em um os índices de cada um dos nós da malha. Então, tomando como exemplo a malha da figura 23, como a aresta superior tem nós [2, 5, 3], no código será usado ['1', '4', '2'] o elemento 13 tem nós ['4', '6', '10'], será utilizado ['3', '5', '9'].

Para a malha da figura 23, faz-se necessário fazer a leitura dos seguintes dados:

- Numero de nós = 13
- Número de elementos 2D triangulares = 16
- Lista com coordenadas x = ['0', '0', '1', '1', '0.5', '1', '0.5', '0', '0.5', '0.75', '0.7499', '0.249', '0.25']
- Lista com coordenadas y = ['0', '1', '1', '0', '1', '0.5', '0', '0.499', '0.5', '0.25', '0.75', '0.749', '0.249']
- Lista com os nós de contorno. Alguns nós pertencem a duas arestas,

para estes casos, pode-se escolher uma aresta como preferencial e o nó em questão será adicionado a esta aresta apenas. Considerando apenas condições Dirichlet, e que a aresta superior e a inferior serão as preferenciais, tem-se:

$\text{dirichlet\_1}=[\text{'0'}, \text{'3'}, \text{'6'}]$

$\text{dirichlet\_2}=[\text{'5'}]$

$\text{dirichlet\_3}=[\text{'1'}, \text{'2'}, \text{'4'}]$

$\text{dirichlet\_4}=[\text{'7'}]$

- Matriz IEN, mostrada na figura 24. Possui 16 elementos 2D em que a numeração dada pelo gmsh vai de 13 a 28.

Figura 24 – Matriz IEN referente a malha da figura 25

<b>Linha</b>	<b>Matriz IEN</b>			<b>Elemento</b>
1	3	3	9	13
2	6	0	12	14
3	4	2	10	15
4	7	1	11	16
5	8	5	9	17
6	6	8	9	18
7	5	8	10	19
8	8	6	12	20
9	8	4	10	21
10	7	8	12	22
11	4	8	11	23
12	8	7	11	24
13	0	7	12	25
14	1	4	11	26
15	3	6	9	27
16	2	5	10	28

Fonte: O Autor (2020).

### 3.1.3. Assembly

A próxima etapa na resolução do problema é o *assembly*, processo iterativo usado para a montagem da matriz  $K$  e se for o caso, da matriz  $M$ , utilizando a matriz IEN e as matrizes locais. No código, é feito um *loop* percorrendo todos os elementos da malha, dentro deste loop, escreve-se as equações locais do problema por meio de listas e matrizes, fazendo uso das coordenadas  $x, y$  e matriz IEN de modo que elas capturem as características de cada elemento. Em seguida é feito uso de um segundo *loop* para montagem da matriz global a partir das matrizes locais. O código completo pode ser consultado no Apêndice A.

### 3.1.4. Condições de contorno e solver

Para a imposição das condições de contorno, inicialmente foram criadas listas de armazenamento dos nós de contorno e a qual aresta de contorno o nó se refere e uma lista com todos os nós de contorno, as listas são *dirichlet\_1*, *dirichlet\_2*, *dirichlet\_3*, *dirichlet\_4* e *dirichlet*. Foi criado um vetor *aux1* cujo número de elementos será igual ao número de nós da malha e por meio de loops foram atribuídos a ele a temperatura especificada em cada um dos nós de contorno, aos nós que não são de contorno, o vetor *aux1* receberá o valor zero. Em seguida foi desenvolvido um vetor para tratar das condições de contorno de Neumann, como todas as condições deste problema são de Dirichlet, este vetor terá todos os seus valores iguais a zero.

Como há nós que pertencem a duas arestas simultaneamente, optou-se por estabelecer uma aresta como preferencial, para estes casos e montar o problema de modo que o nó em questão será considerado apenas na aresta preferencial.

Foram criados dois vetores, o vetor *bc\_dirichlet* que será usado para atribuir as condições de contorno e o vetor *aux2* no qual será atribuído o valor zero para os nós de contorno e o valor um para os demais nós. Os dois vetores terão número de elementos igual ao número de nós da malha. A seguir, aplicou-se o método de eliminação gaussiana, seguindo os seguintes passos:

1. Cria-se um loop sobre os nós de contorno, multiplicando a coluna da matriz global cujo índice é um nó com condição de contorno e o valor da condição de contorno do nó que armazenamos no vetor *aux1*.
2. Zera-se a linha e a coluna da matriz global correspondente ao índice da condição de contorno e colocamos 1 na diagonal principal.
3. Atribui-se a condição de contorno do nó
4. Repete-se o processo para os demais nós de contorno.

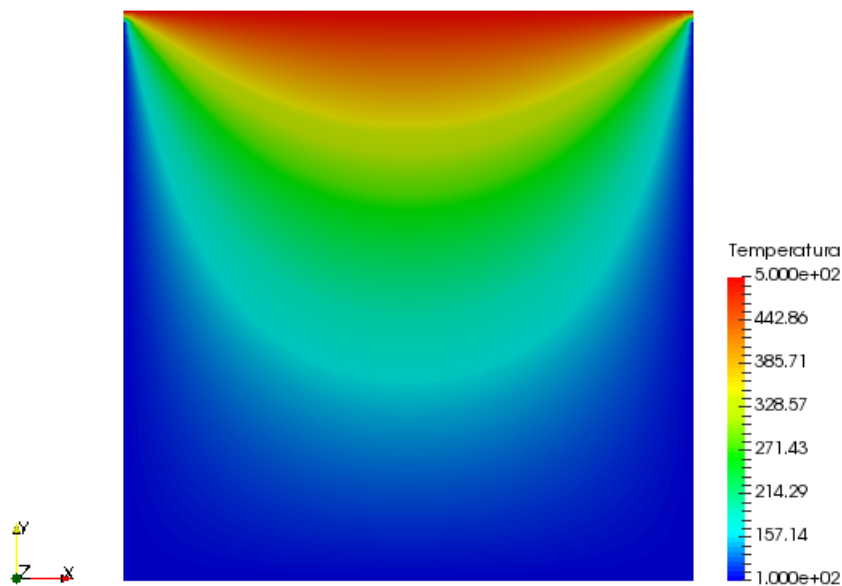
Foi criado um vetor denominado de *RHS*, que receberá os valores do lado direito da equação matricial, que terá um formato do tipo  $A.T=B$ , onde  $A$  será a matriz global,  $T$  o vetor de temperatura que se quer descobrir e  $B$  o vetor *RHS*. Houve ainda a criação do vetor  $T$ , que será o vetor final com as temperaturas que se quer descobrir. O Vetor *RHS* vai receber, neste caso, apenas as condições de contorno de Dirichlet, já que é a única condição do problema. A multiplicação do vetor *RHS* por *aux2* resulta na zeragem das linhas associadas as condições de contorno, então soma-se o *RHS* com o vetor *aux1* de modo a se ajustar o vetor com as corretas condições de contorno. Por fim, a equação matricial foi resolvida e se chega ao vetor  $T$  com as

temperaturas nos nós do problema. O Código pode ser consultado no Apêndice B.

### 3.1.5. Pós processamento

A Solução do problema, obtida no Python para uma malha com 3143 nós e plotada no paraview é dada pela figura 25, onde se pode observar a distribuição de temperatura ao longo da placa.

Figura 25 – Solução do problema da figura 24.



Fonte: O Autor (2020).

A comparação da solução obtida no código com a solução analítica dada pela equação 2.83, será feita por meio do erro percentual absoluto médio – MAPE (Mean Absolute Percentage Error). O MAPE é uma medida de acurácia do erro e fornece uma ideia do tamanho médio do erro, é a média do erro percentual, dado pela seguinte fórmula:

$$Mape = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|R_t - P_t|}{R_t} \times 100 \quad (3.01)$$

Onde

$R_t$  = Valor real

$P_t$  = Valor aproximado

Para comparação, o problema foi resolvido para uma malha com 212 nós. Como na solução optou-se por escolher as arestas preferenciais e arbitrar os nós de contorno como pertencentes as arestas preferenciais, os valores obtidos foram comparadas de três formas

distintas, conforme será mostrado a seguir:

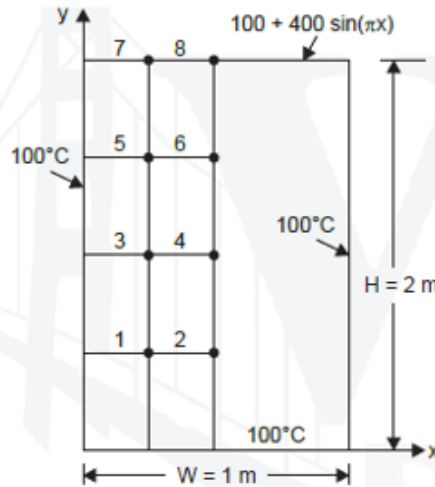
1. Paredes laterais preferenciais. Temperatura nos nós das arestas = 100 °C
  - 212 nós
  - 374 Elementos 2D
  - Paredes laterais e parede inferior =100 °C, parede superior 500 °C.
  - Mape= 0.40%
2. Paredes superior e inferior preferenciais. Temperatura nos nós da aresta superior = 500 °C
  - 212 nós
  - 374 Elementos 2D
  - Paredes laterais e parede inferior =100 °C, parede superior 500 °C.
  - Mape= 4.18%
3. Paredes superior e inferior preferenciais. Temperatura nos nós da aresta superior = 500 °C
  - 212 nós
  - 374 Elementos 2D
  - Paredes laterais e parede inferior =100 °C, parede superior 500 °C.
  - Mape= 0.41%, desconsiderando os dois nós das arestas superiores.

O resultado obtido está em linha com a solução analítica. É possível notar também que dependendo de como for feita a escolha das arestas preferenciais, os nós de contorno das arestas podem ter impacto relevante na mensuração do erro em relação a solução analítica.

### 3.2. CHAPA RETANGULAR COM CONDIÇÃO DE CONTORNO SENOIDAL.

O segundo problema a ser analisado é do trabalho de Kothandaraman (2006). O problema consiste em determinar a distribuição de temperatura na placa de  $1m \times 2m$  sujeita a condições de contorno conforme figura 26.

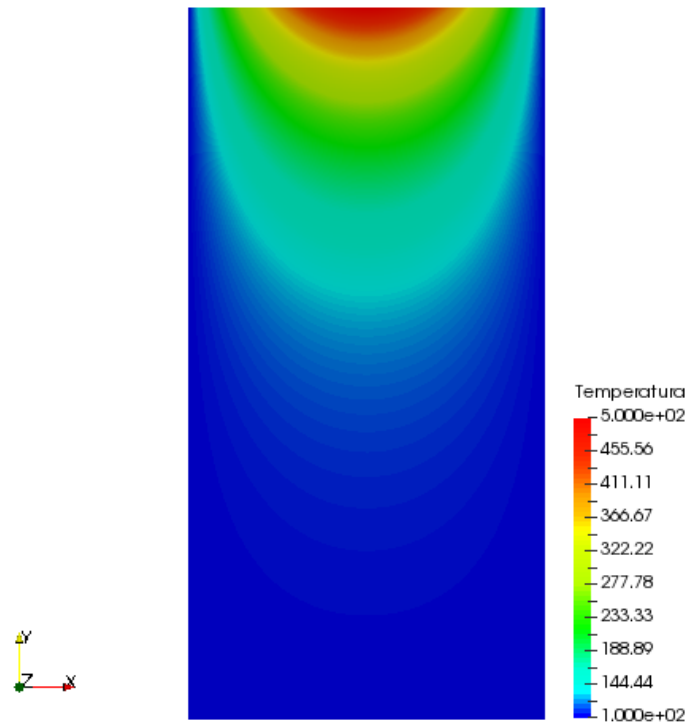
Figura 26 – condução de calor 2D em placa retangular



Fonte: Kothandaraman (2006).

Para este problema, as únicas alterações que foram feitas no código foram nas condições de contorno, já que a geometria do problema, a malha e as condições de contorno são diferentes. A solução do problema, plotada no paraview é dada pela figura 27.

Figura 27 – Solução analítica, malha com 6739 nós



Fonte: Kothandaraman (2006).

A solução analítica deste problema, segundo Kothandaraman (2006), é dada pela equação 3.16. Os valores obtidos pelo código serão comparados aos valores obtidos com a solução analítica para diversas malhas com o objetivo de analisar a influência da malha na precisão do resultado obtido.

$$T_{(x,y)} = T_1 + T_m \frac{\sinh(\pi y/W)}{\sinh(\pi H/W)} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{W} \right) \quad (3.02)$$

1) Nós = 37

- Element Size Factor = 0.35
- Elementos 1D = 18
- Elementos 2D = 54
- Mape = 0,581%

2) Nós = 47

- Element Size Factor = 0.30
- Elementos 1D = 22
- Elementos 2D = 70
- Mape = 0,241%

3) Nós = 86

- Element Size Factor = 0.20
- Elementos 1D = 30
- Elementos 2D = 140
- Mape = 0,138%

4) Nós = 438

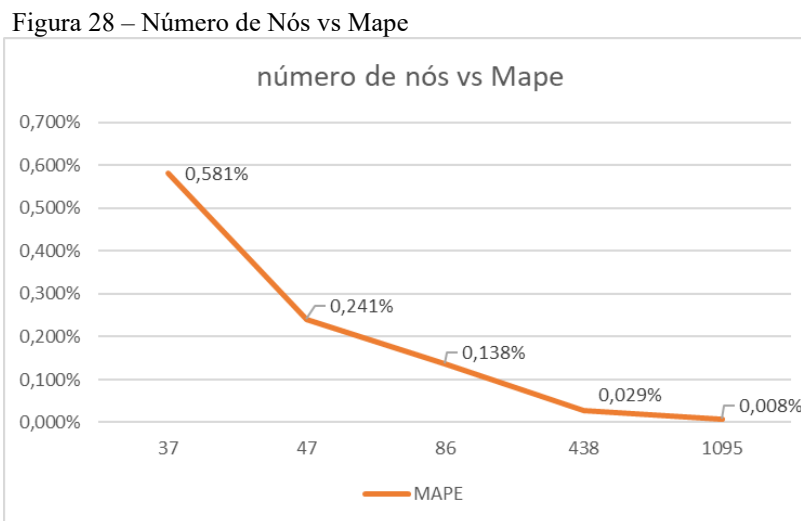
- Element Size Factor = 0.08
- Elementos 1D = 76
- Elementos 2D = 798
- Mape = 0,029%

5) Nós = 1095

- Element Size Factor = 0.05
- Elementos 1D = 76
- Elementos 2D = 798
- Mape = 0,008%

Ao se gerar a malha, foram gerado os nós em função do *Element Size Factor*. Quanto menor o *Element Size Factor*, maior o número de nós e conseqüentemente, mais refinada a malha. Nota-se que quanto maior o número de nós da malha, menor será o erro. Inicialmente, um pequeno aumento no número de nós da malha gera um aumento significativo na precisão

do resultado, a medida o número de nós é aumentado, os ganhos adicionais na precisão vão decaindo. Quanto mais refinada a malha, maior será o tempo necessário para o processamento do código de modo que se deve buscar uma malha que vai dar resultados satisfatórios sem prejudicar o resultado do projeto e nem demorar muito tempo no processamento do resultado. A figura 28 mostra o gráfico Número de Nós vs Mape. É possível notar que o gráfico assume tendência exponencial.



Fonte: O Autor (2020)

## 4. RESULTADOS

### 4.1. PERFIL DE TEMPERATURA DE BARRAGEM – ANÁLISE PERMANENTE

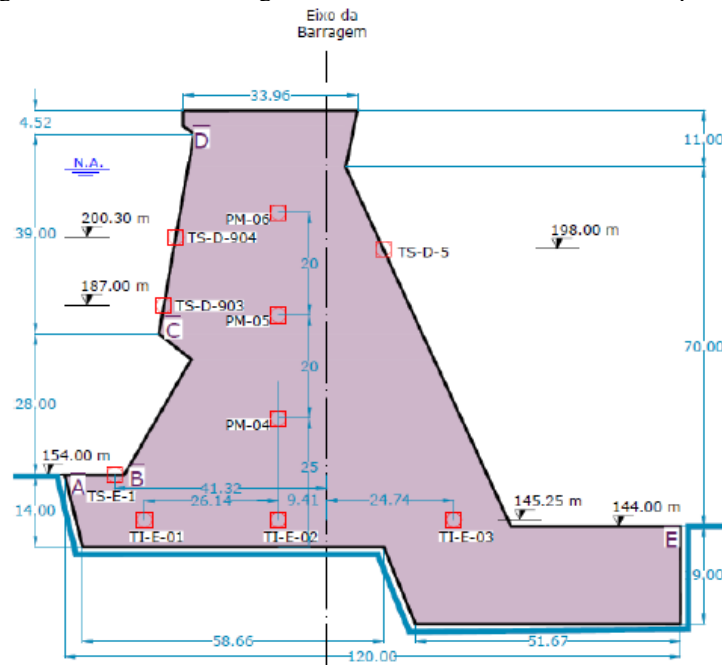
Em seu estudo, Hickmann *et al* (2015) tomam como objeto de estudo o comportamento térmico e estrutural de uma seção de contrafortes integrantes do Trecho “E” que fazem parte da Barragem da Usina Hidrelétrica de Itaipu (UHI), localizada na cidade de Foz do Iguaçu, local que está exposto a significativas variações térmicas, ao contar com máximas que chegam a casa dos 30°C no verão e mínimas abaixo dos 13°C no inverno. O trecho em questão possui 102 m de comprimento e é formado por seis blocos de contrafortes, cuja fundação é um maciço rochoso basáltico.

A UHI destaca-se pela elevada quantidade de instrumentos instalados em toda barragem, os quais monitoram o seu comportamento estrutural desde o período de construção, enchimento do reservatório e atualmente em plena operação. No início da década de 1980 diversos termômetros foram instalados na barragem com a função de monitorar as mudanças de temperaturas no interior do bloco, na superfície a montante

em contato com o reservatório e na superfície a jusante expostas as variações climáticas locais. O lançamento de concreto da Usina de Itaipu foi realizado com gelo para diminuir a temperatura durante o processo de hidratação do cimento e as tensões provenientes das variações de temperatura sempre foram foco de monitoramento por parte da equipe de engenharia da UHI (HICKMANN *et al*, 2015, p.10).

Hickmann (2016) analisa a temperatura para diversas datas, entre 1985 a 2014. A figura 29 mostra o perfil da barragem com a localização dos termômetros, sendo alguns termômetros internos e outros superficiais. A Tabela 2 mostra uma tabela com o resumo das temperaturas ao longo do período. O interesse deste projeto é no momento em que os termômetros posicionados na barragem acusaram a maior máxima e a menor mínima registradas desde a construção da barragem e a partir dos dados obtidos nesta data foram realizadas simulações.

Figura 29 – Perfil da barragem com termômetros internos e de superfícies



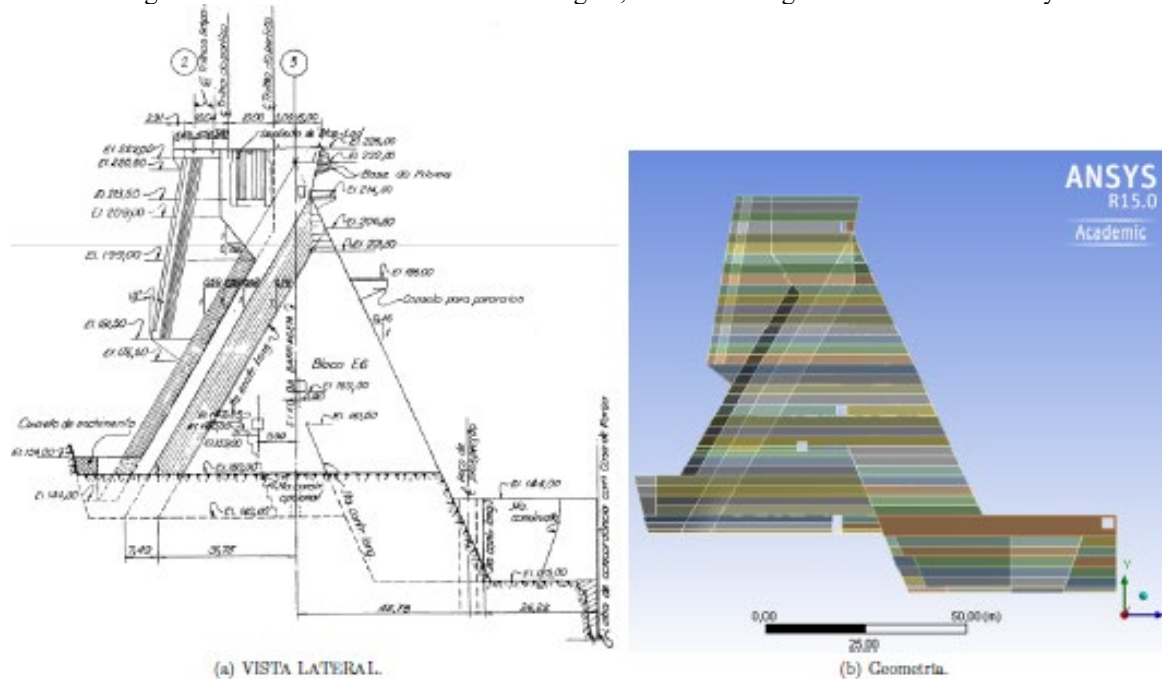
Fonte: Hickmann (2016)

Tabela 2 – Temperaturas mínima, máxima, média, desvio padrão e coeficientes de variação nos termômetros no período de análise (1985 a 2014)

Termômetro	Mín.	Máx.	Média	Desv. Pad.	Coef. de Var. (%)
TS-D-903	17.34	31.54	24.10	3.43	14.22
TS-D-904	17.67	30.53	24.49	3.52	14.38
TS-D-5	6.45	38.39	22.53	6.63	29.43
TS-E-1	18.43	25.74	21.56	1.90	8.80
TI-E-1	20.66	23.18	21.81	0.60	2.73
TI-E-2	19.55	24.25	22.09	1.23	5.58
TI-E-3	20.71	24.31	22.60	0.93	4.10

Fonte: Hickmann (2016)

Figura 30 – Bloco bidimensional da barragem, vista lateral e geometria criada no Ansys.



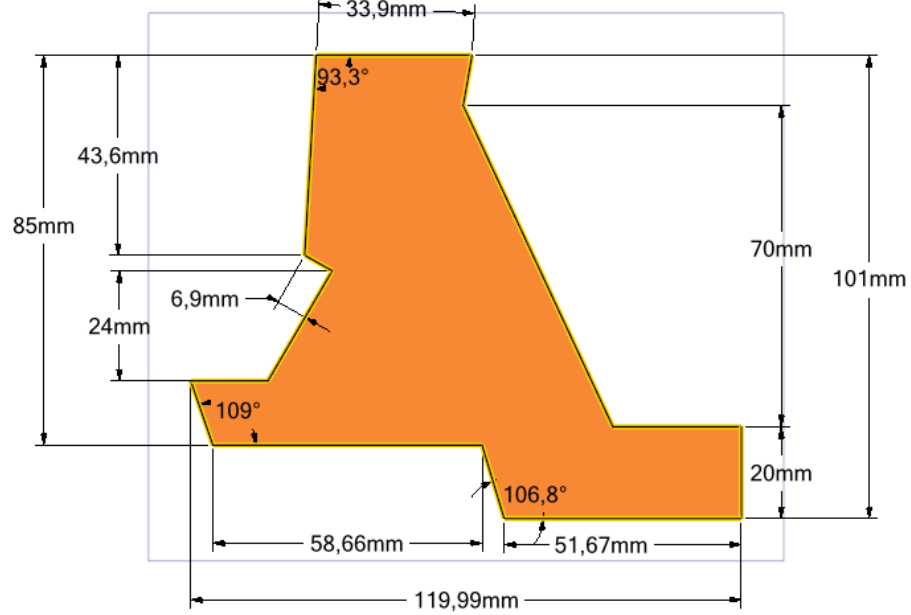
Fonte: Adaptado de Hickmann (2016)

A figura 30, adaptada do trabalho de Hickmann (2016) mostra em a) o projeto da vista lateral da barragem e em b) uma geometria 2D da barragem criada no Ansys. Seguindo para a definição da geometria do problema que é apresentada na figura 31.

A imposição das condições de contorno foi feita considerando todos os termômetros como sendo de superfície e no caso de arestas sem termômetro de superfície, considerou-se como termômetro correto o interno mais próximo da aresta em questão. As figuras 32 e 33 mostram a temperatura em cada superfície de contorno para a máxima e mínima temperatura registrada, respectivamente. Algumas outras simplificações foram consideradas de modo que a solução do problema possa ser representado pela equação 2.96 e que seja possível usar na resolução, o mesmo código apresentado no tópico 3.1.

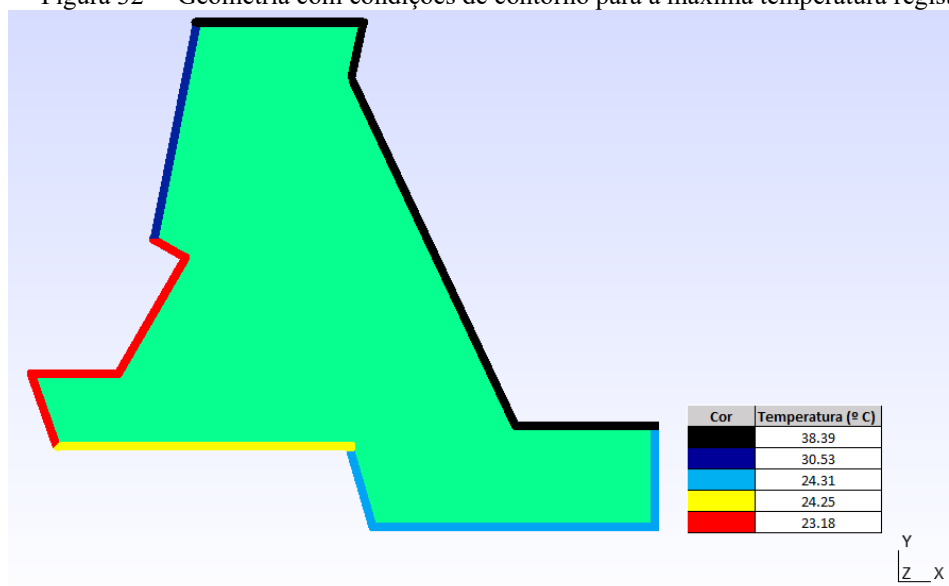
Algumas simplificações foram consideradas na geração do modelo(...): Ausência de fonte geradora de calor, homogeneidade do material, comportamento isotrópico e elástico linear e simplificações na geometria, como ausência de chanfros, drenagem, suportes e vigas. (Hickmann, 2016, p.66).

Figura 31 – Geometria do projeto com dimensões.



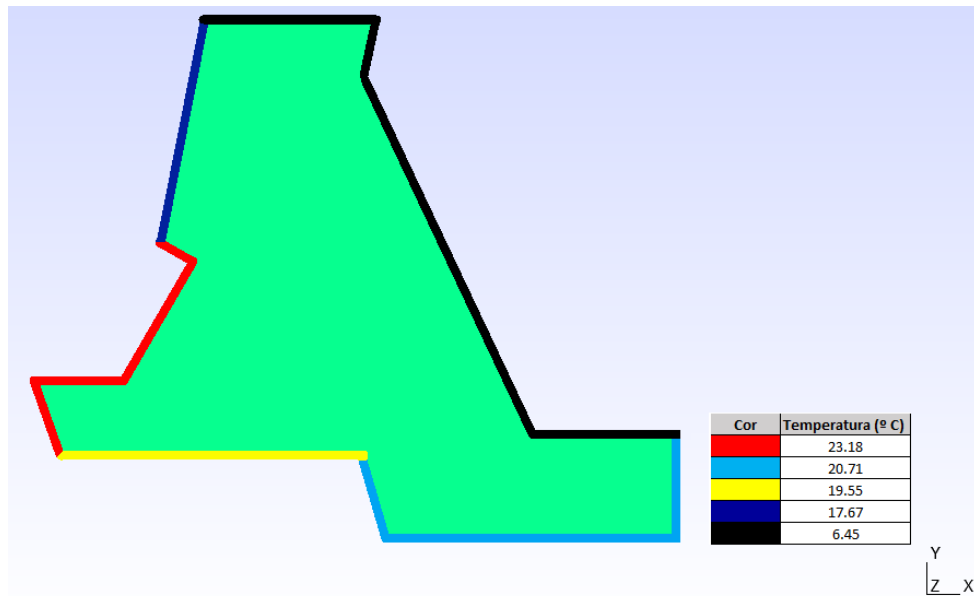
Fonte: O autor(2020)

Figura 32 – Geometria com condições de contorno para a máxima temperatura registrada.



Fonte: O autor(2020)

Figura 33 – Geometria com condições de contorno para a mínima temperatura registrada.



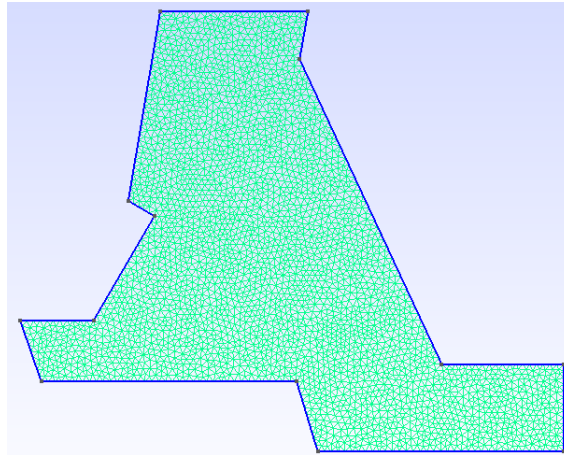
Fonte: O autor(2020)

A figura 33 mostra a malha criada no gmsh para o problema. A malha tem 3391 nós, 265 elementos 1D e 6515 elementos 2D. Para a solução deste problema, foram adaptadas apenas as condições de contorno, por este problema ter 13 arestas de contorno enquanto os problemas 2D apresentados nos tópicos 3.1 e 3.2, apresentarem apenas 4 arestas.

A distribuição de temperatura, plotada no paraview, é apresentada na figura 34 para a maior máxima registrada e na figura 35 para a menor mínima registrada. É importante mencionar que o resultado será influenciado pela forma como se escolhe as condições de contorno.

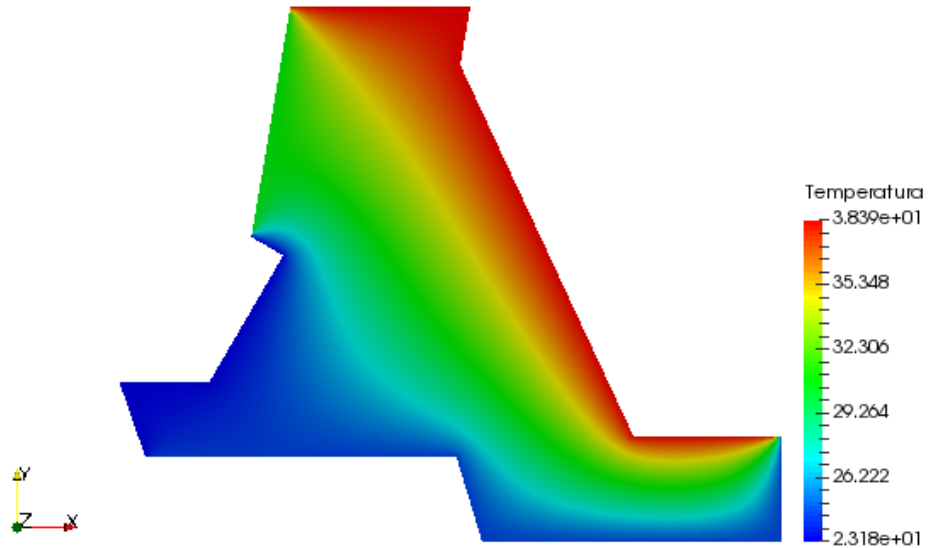
Na figura 34, nota-se que a superfície da barragem em contato com o ar é a que apresenta a maior temperatura, máxima de 38.39 °C e a superfície em contato com a água apresenta a menor temperatura, mínima de 23.18 °C. Na figura 35, a superfície em contato com o ar apresenta a menor temperatura, sendo 6.45° C e a maior temperatura encontra-se na superfície inferior em contato com a água, com 23.18°. A temperatura máxima foi registrada no termômetro durante o horário mais quente de verão no período analisado enquanto a temperatura mínima foi registrada no horário mais frio do inverno. Essa alteração no perfil de temperatura da barragem ocorre porque a água atua como um regulador térmico. Podemos notar a importancia de se considerar a variação sazonal de temperatura em um projeto de barragem devido a altas variações de temperatura que podem ocorrer ao longo do ano.

Figura 33 – Malha gmsh do projeto com 3391 nós, 265 elementos 1D e 6515 elementos 2D.



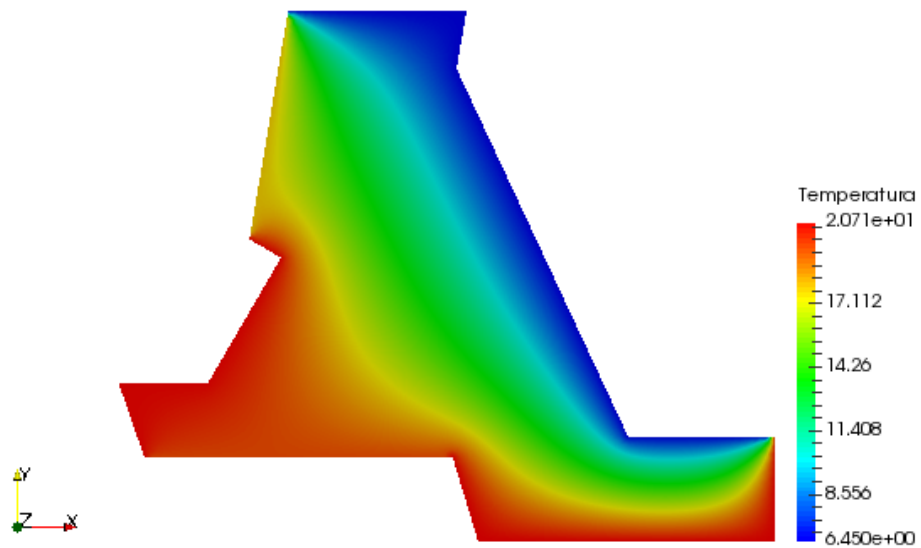
Fonte: O autor(2020)

Figura 34 – Distribuição de temperatura, Máxima registrada.



Fonte: O autor (2020)

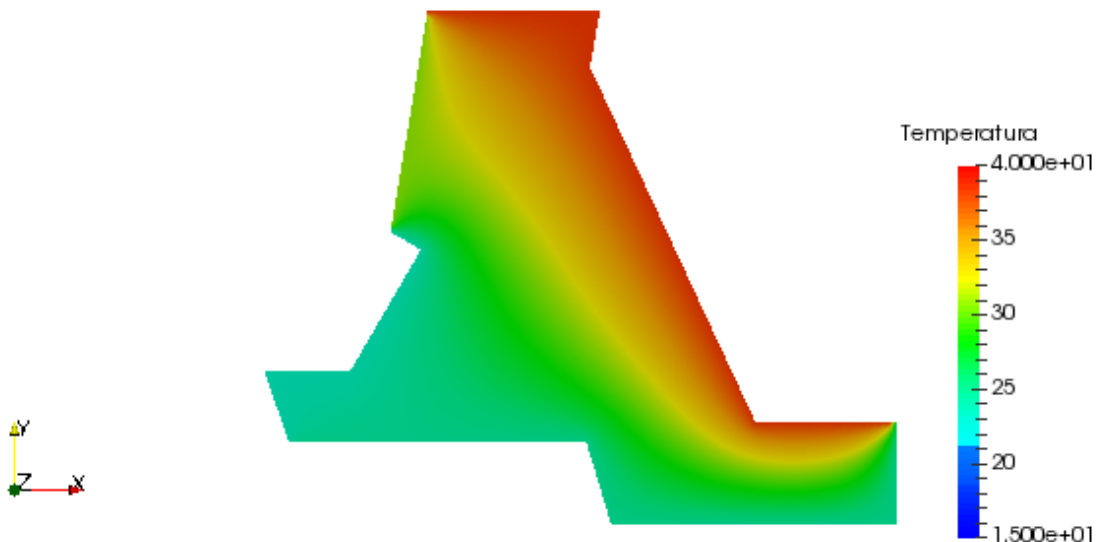
Figura 35 – Distribuição da temperatura, Mínima registrada.



Fonte: O autor (2020)

Na criação do gráfico, o paraview gera uma escala automática da mínima até a máxima temperatura de forma a maximizar a visualização do resultado, as figuras 34 e 35 são exemplos disso. As figuras 36 e 37 foram geradas com uma escala fixa de 15 a 40 °C, para representação dos mesmos resultados apresentados pelas imagens das figuras 34 e 35. É possível notar que nessa escala, para a mínima temperatura registrada, o gráfico apresentado tem um menor nível de detalhes visuais, isso ocorre porque as temperaturas estão na faixa de temperatura de 6.45°C a 20.66°. Já para a máxima temperatura registrada, há um maior nível de detalhes, pois a escala escolhida é melhor para a representação deste caso, no qual a temperatura varia de 23.18°C a 38.39°C.

Figura 36 – Distribuição de temperatura, Máxima registrada.



Fonte: O autor (2020)

Figura 37 – Distribuição da temperatura, Mínima registrada.



Fonte: O autor (2020)

#### 4.2. DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA COM X OU Y FIXOS

A partir da solução para a maior máxima registrada, dada pela figura 36, foi decidido fixar  $x$  ou  $y$  em alguns pontos e plotar gráficos de distribuição de temperatura. Alguns testes foram realizados para malhas muito refinadas, de modo a se obter uma grande quantidade de nós para um  $x$  ou  $y$  fixo, porem o uso de malhas com grande número de nós se torna inviável devido ao alto tempo que o computador precisa para processar o código. Simulações foram realizadas com o uso dos nós em um dado intervalo (por exemplo, em vez de se usar  $y=7.4$ , foi usado um intervalo, como  $7.36 < y < 7.44$ ) e as malhas foram testadas com quantidades diferentes de nós, analisando o tempo de processamento e a quantidade de nós no intervalo. A tabela 3 mostra um resumo de alguns testes.

Tabela 3 – Malhas com diferentes quantidades de nós, tempo de processamento em segundos e número de nós em dado intervalo.

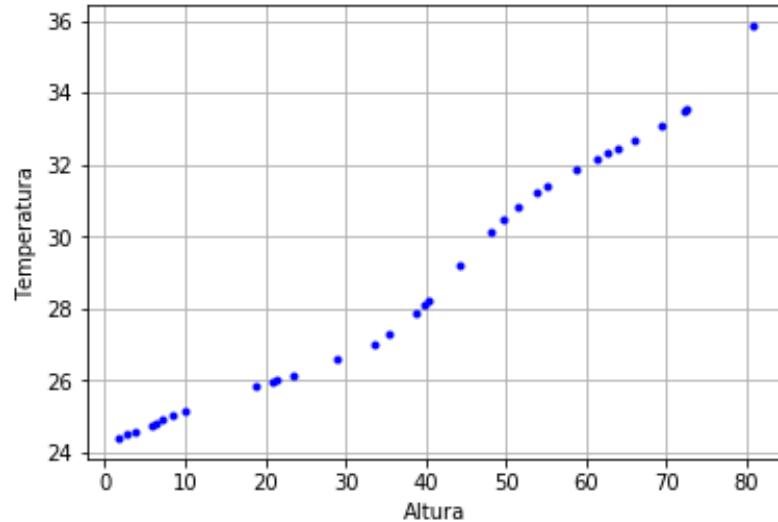
Nº nós da malha	Tempo de processamento	Nº nós com $y=7,4\pm 0,06$	Tempo de processamento	Nº nós com $y=7,4\pm 0,2$
3391	2.72	7	2.45	20
6368	7.61	15	6.69	43
7974	14.88	27	12.7	57
16000	122.55	35	104.09	100

Fonte: O autor (2020)

Uma malha com 16000 nós foi escolhida para a análise, pois a partir disso torna-se difícil a resolução do código devido ao tempo gasto no processamento. Fixando um intervalo de variação, como  $x \pm dx$  ou  $y \pm dy$ , onde  $dx$  e  $dy$  são os limites dentro dos quais  $x$  ou  $y$  podem

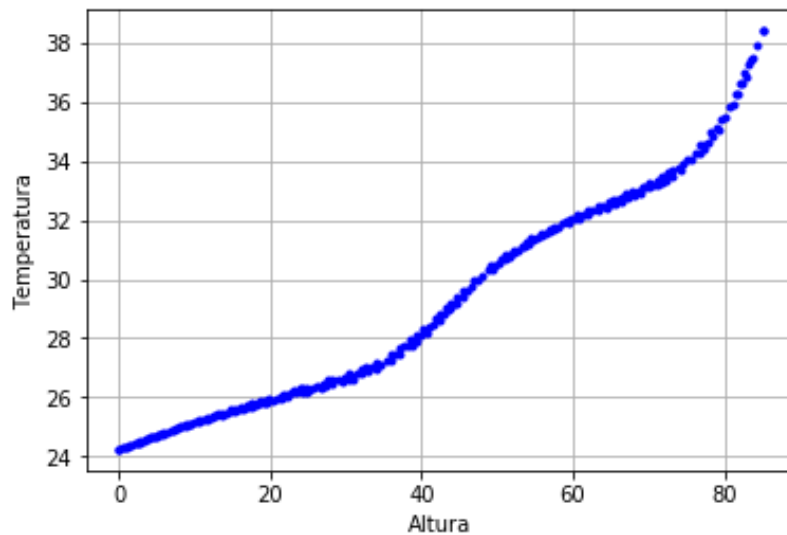
variar, as simulações sugerem que é possível usar intervalos relativamente grandes e ainda assim conseguir um gráfico com a correta tendência da distribuição de temperatura na região. Os gráficos das figuras 38 e 39, plotados no matplotlib, exemplificam essa situação:

Figura 38 – Temperatura ao longo de y, com  $x = 34 \pm 0,06$



Fonte: O autor (2020)

Figura 39 – Temperatura ao longo de y, com com  $x = 34 \pm 0,5$



Fonte: O autor (2020)

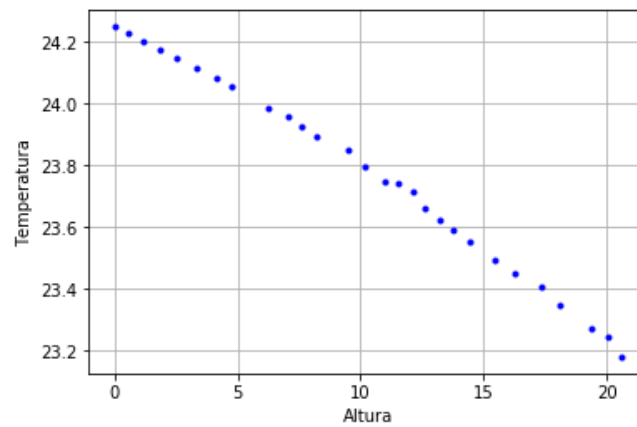
A sequência de figuras 40 a 46, mostram os resultados das simulações com x e y fixos dentro de um intervalo em diferentes regiões da geometria. Foi necessária a criação de um loop que percorre as listas com os nós x e y e armazena em uma nova lista os nós que estão dentro do intervalo estabelecido, em seguida, as novas listas foram usadas para plotar o gráfico desejado, o código criado é dado apresentado abaixo.

```

y1d=[]; T1d=[] ;x1d=[]
for i in range(0,len(x)): #Loop sobre os nós.
    if float(x[i])>17.7 and float(x[i])<18.3: #intervalo, com x 18±0.3
        y1d.append(float(y[i])) # y dentro do intervalo
        x1d.append(float(x[i])) #x dentro do intervalo
        T1d.append(float(T[i])) ] #temperatura dentro do intervalo
plt.xlabel('Altura')
plt.ylabel('Temperatura')
plt.grid(True)
plt.plot(y1d,T1d,'b.')
plt.show()

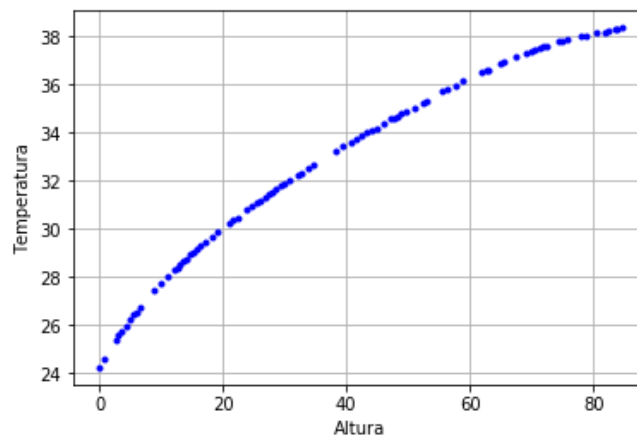
```

Figura 40 – Temperatura ao longo de y, com com  $x = 16 \pm 0,2$



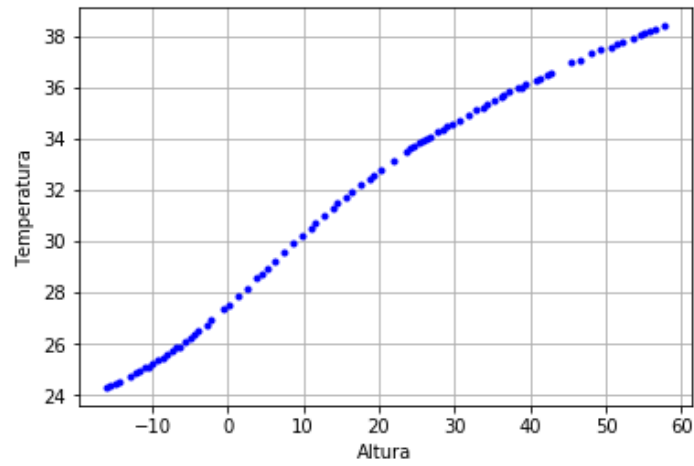
Fonte: O autor (2020)

Figura 41 – Temperatura ao longo de y, com com  $x = 55 \pm 0,2$



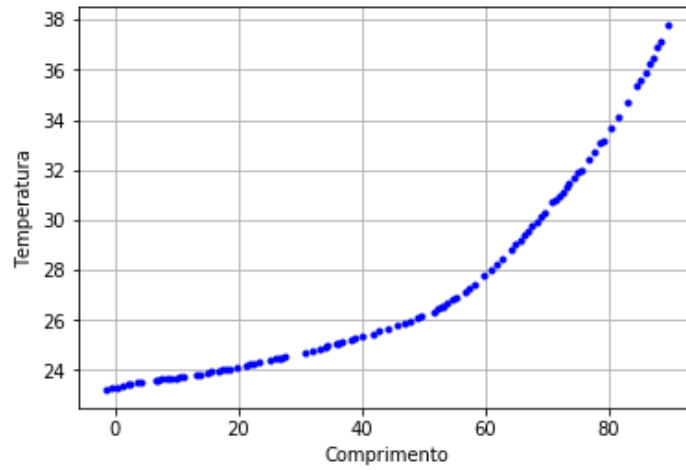
Fonte: O autor (2020)

Figura 42 – Temperatura ao longo de y, com  $x = 66 \pm 0,2$



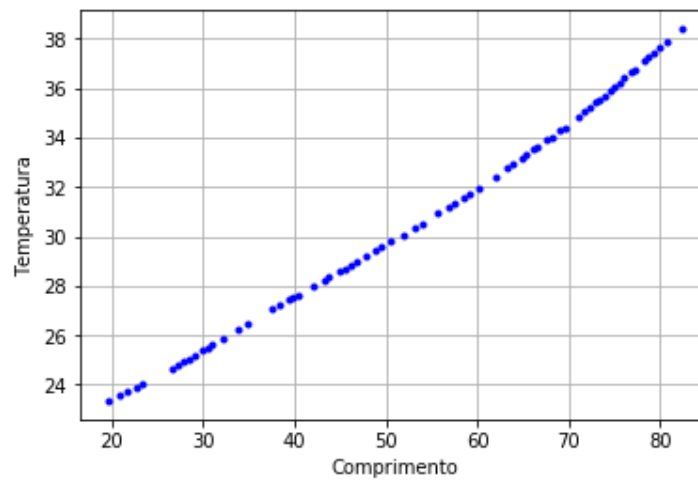
Fonte: O autor (2020)

Figura 43 – Temperatura ao longo de x, com  $y = 7,4 \pm 0,2$



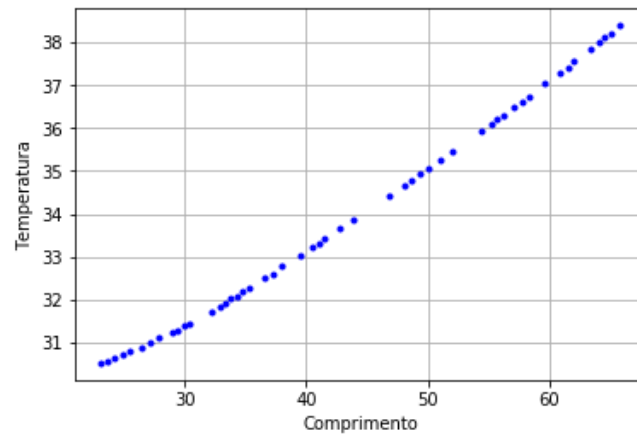
Fonte: O autor (2020)

Figura 44 – Temperatura ao longo de x, com  $y = 25 \pm 0,2$



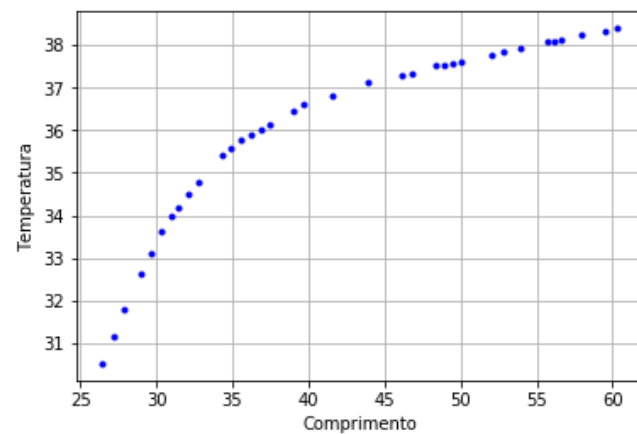
Fonte: O autor (2020)

Figura 45 – Temperatura ao longo de x, com  $y=60\pm 0,2$



Fonte: O autor (2020)

Figura 46 – Temperatura ao longo de x, com  $y=79,5\pm 0,2$



Fonte: O autor (2020)

### 4.3. ANÁLISE TRANSIENTE

Agora, será analisada a evolução temporal da temperatura na barragem usando os conceitos apresentados na seção 2.2.8, onde foi apresentado o caso transiente. Tomando como base a equação 2.82 e considerando que no problema atual não há geração interna de calor, isto é  $Q=0$ , pode-se representar a equação para a barragem como:

$$\left(\alpha K + \frac{M}{\Delta t}\right) T^{n+1} = \left(\frac{M}{\Delta t}\right) T^n \quad (4.01)$$

Segundo Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), para o caso 2D, a matriz M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.02)$$

O mesmo código do problema permanente foi usado, a única alteração necessária foi a criação de um loop para evolução temporal do problema. Como mencionado na seção 2.2.8, defini-se um vetor  $T^n$  fora do loop, resolve-se o problema no loop, chegando-se a solução para  $T^{n+1}$  e repete-se o processo, agora  $T^{n+1}$  do passo anterior, passa a ser  $T^n$  da próxima iteração. O processo é mostrado abaixo.

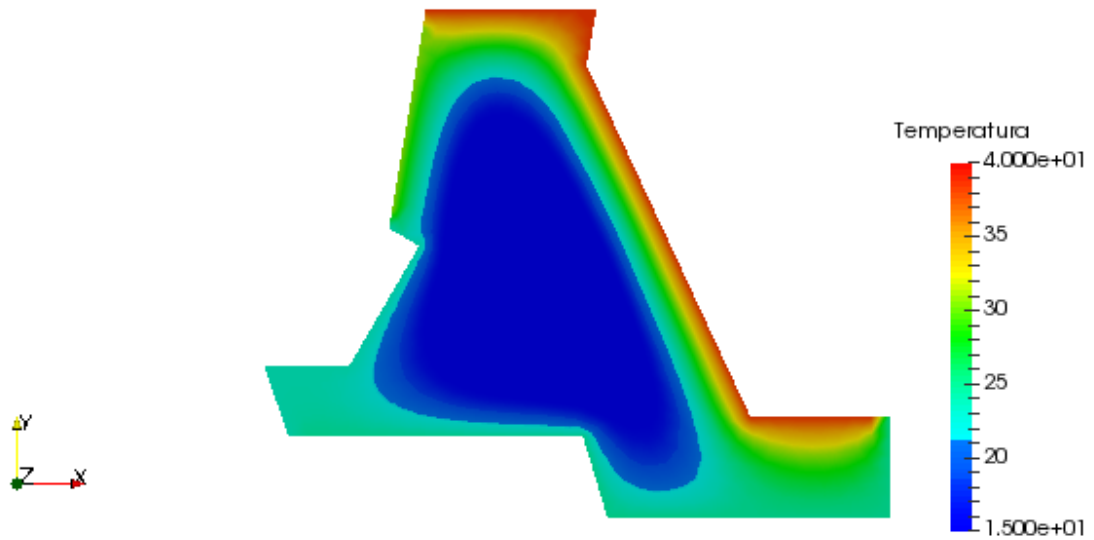
```
T = np.zeros((num_nos,1)) #Vetor T^n, inicial
for i in range (0,num_nos):
    T[i]=23.18
it=1
RHS = np.zeros((num_nos,1)) #"right hand side"
for t in range(0,maxtime):
    vtk = VTKGustavo.InOut(x,y,ien,int(NumeroDeNos),int(NumeroElementos),T)
    vtk.saveVTK('\home\dalvan\Barragem_transiente', '# Main_vtk2',it)#local no PC.
    RHS = np.dot((M/dt),T)
    RHS = RHS + newmann - bc_dirichlet
    RHS = np.multiply(RHS,aux2)
    RHS = RHS + aux1
    T = np.linalg.solve(Mglobal,RHS)
    it+=1
```

Os gráficos das figuras 47 a 54 mostram a evolução temporal da distribuição de temperatura do problema para a máxima temperatura, conforme condições de contorno da figura 32. As imagens foram plotadas no paraview com uma escala fixa de 15 a 40 °C, para um sistema que se inicia com a temperatura 23.18° C, que é a menor temperatura entre todas as condições de contorno do problema. Para a simulação, foram utilizados os seguintes parâmetros:

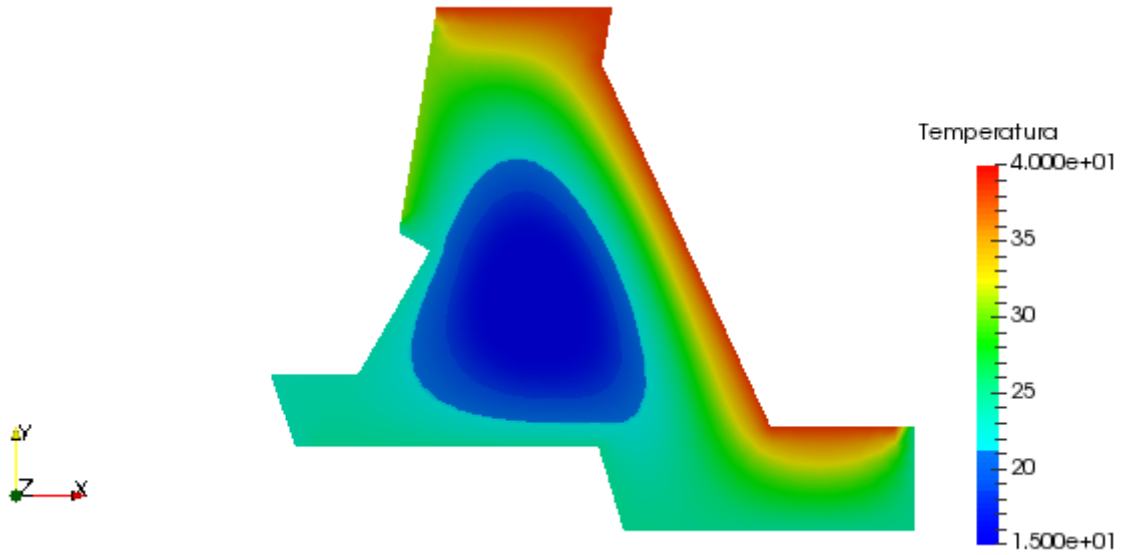
- Número de nós da malha =600
- Número de elementos 2D=1089
- Tempo t=50 min
- Passo de tempo  $\Delta t=0,1s$

Figura 47 – Distribuição de temperatura, para  $t=10\text{ s}$ 

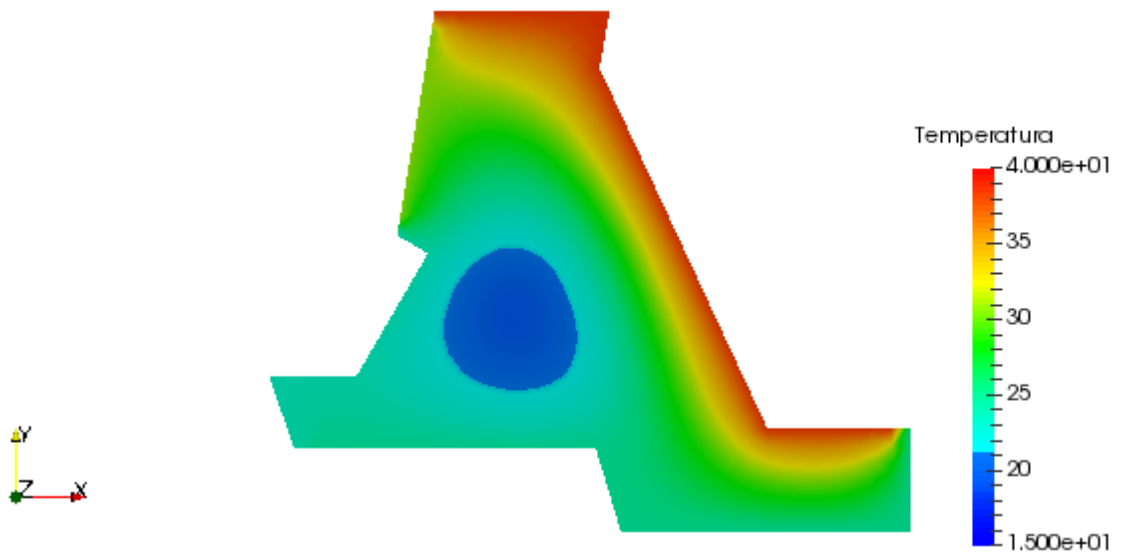
Fonte: O autor (2020)

Figura 48 – Distribuição de temperatura, para  $t=1\text{min e } 40\text{ s}$ 

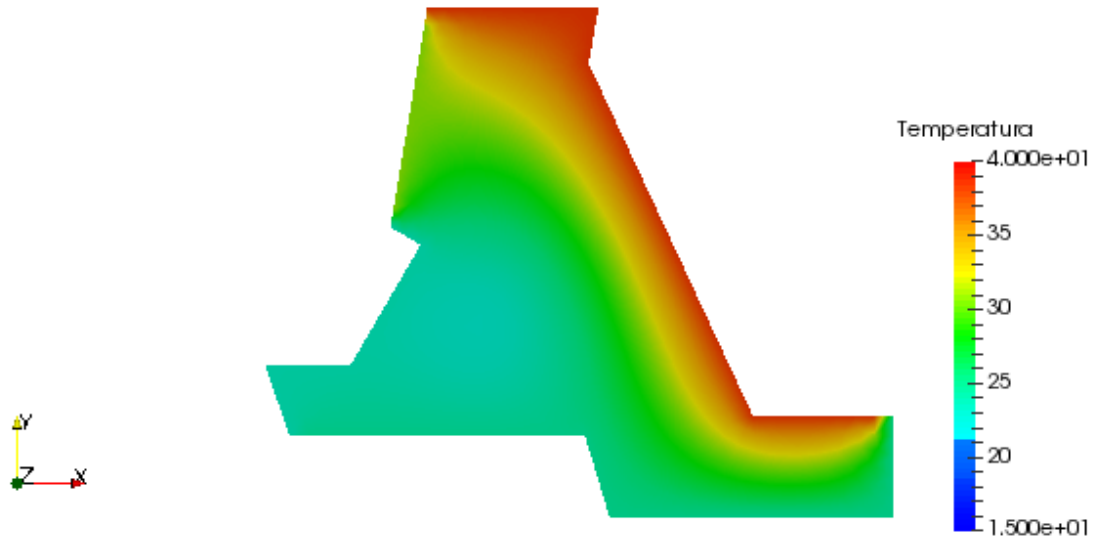
Fonte: O autor (2020)

Figura 49 – Distribuição de temperatura, para  $t=3 \text{ min e } 20 \text{ s}$ 

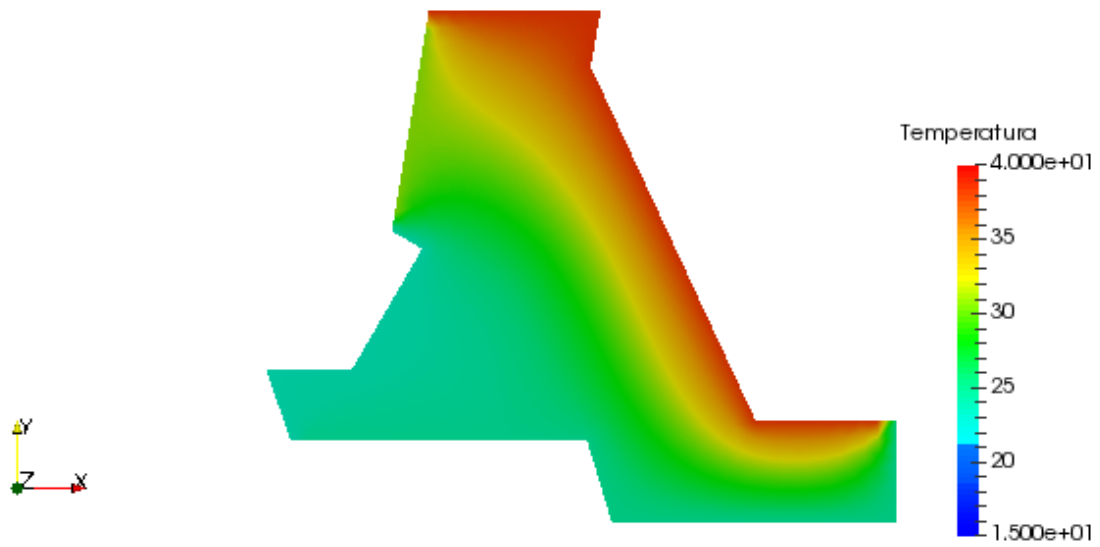
Fonte: O autor (2020)

Figura 50 – Distribuição de temperatura, para  $t=5 \text{ min}$ 

Fonte: O autor (2020)

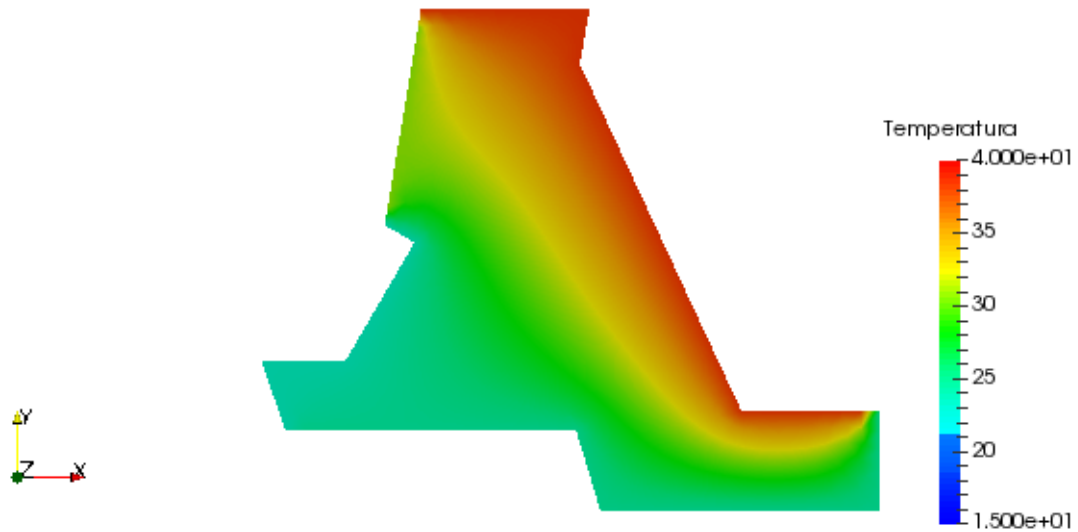
Figura 51 – Distribuição de temperatura, para  $t=6 \text{ min e } 40 \text{ s}$ 

Fonte: O autor (2020)

Figura 52 – Distribuição de temperatura, para  $t=8 \text{ min e } 20 \text{ s}$ 

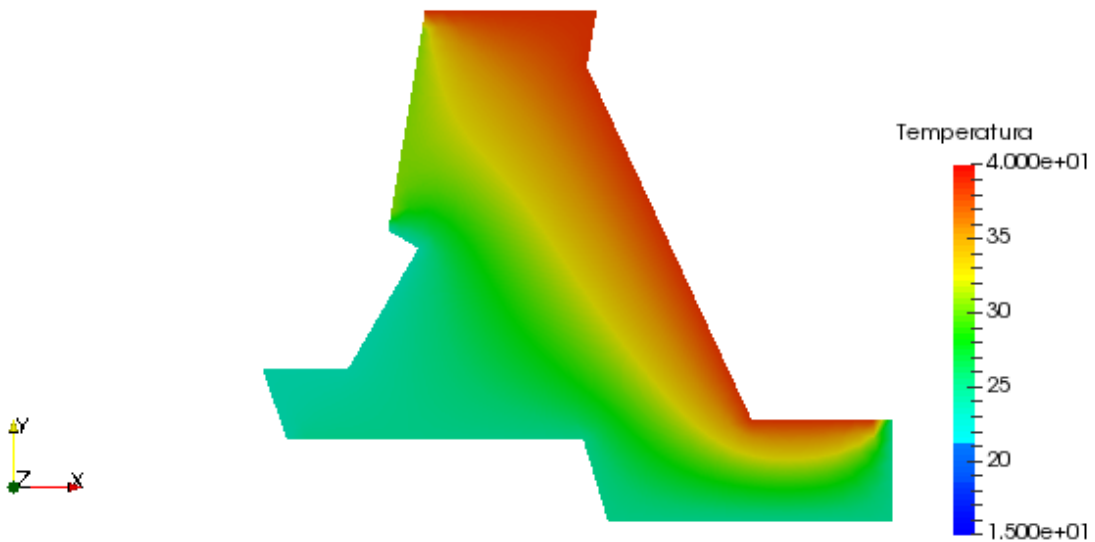
Fonte: O autor (2020)

Figura 53 – Distribuição de temperatura, para  $t=16 \text{ min e } 40 \text{ s}$



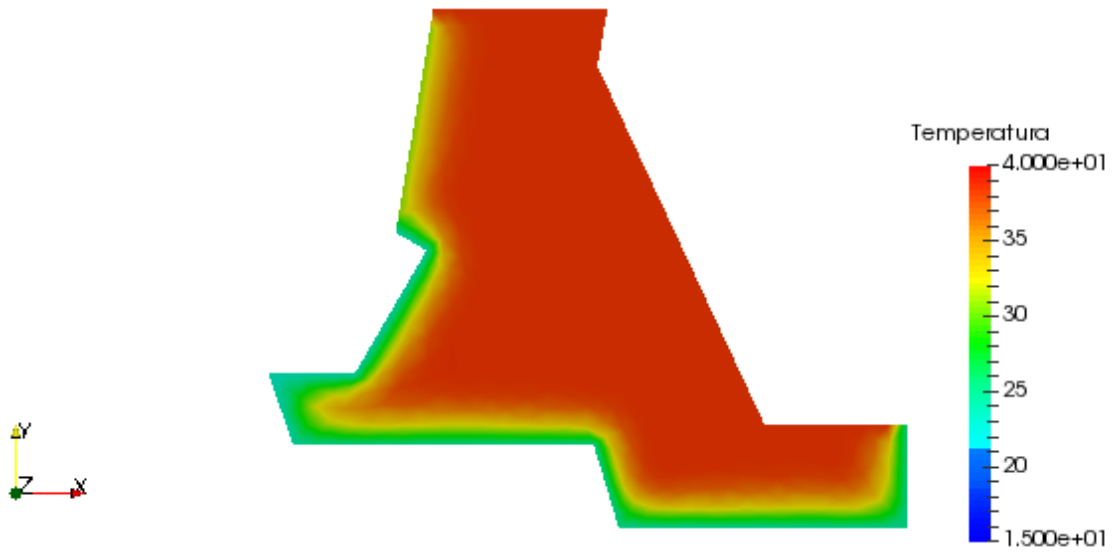
Fonte: O autor (2020)

Figura 54 – Distribuição de temperatura, para  $t=50 \text{ min}$

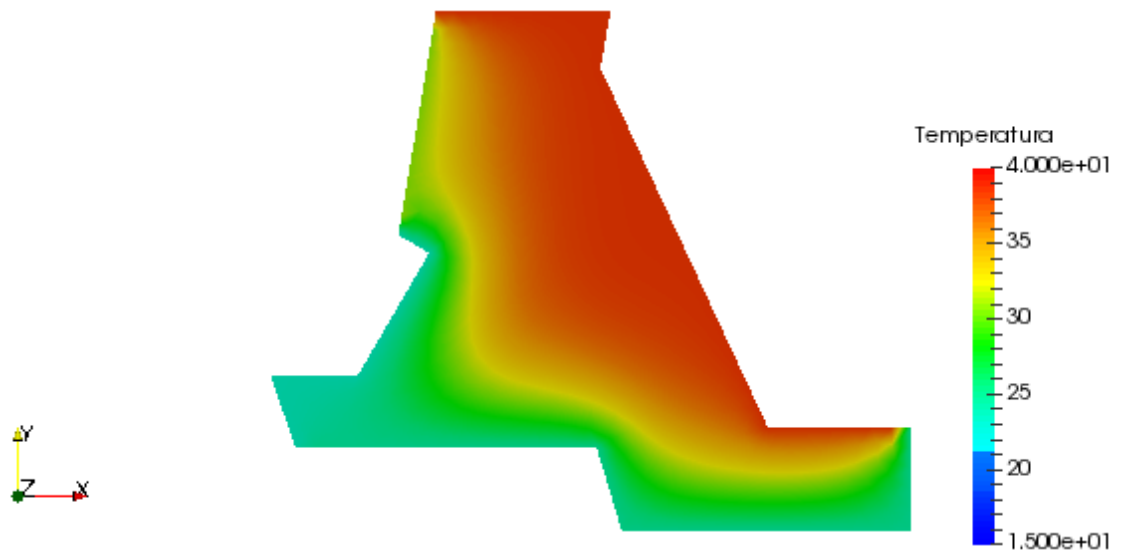


Fonte: O autor (2020)

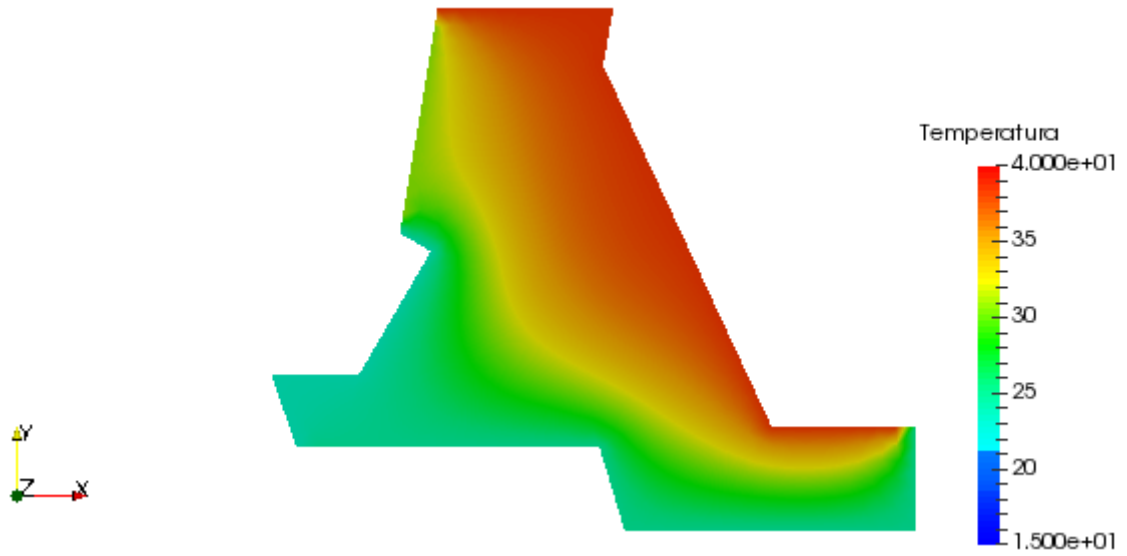
As figuras 55 a 62 Representam a solução para o problema na escala de 15 a 40 °C, partindo da temperatura inicial de 38.39 °C, temperatura máxima dentre as condições de contorno do problema.

Figura 55 – Distribuição de temperatura, para  $t=10\text{ s}$ 

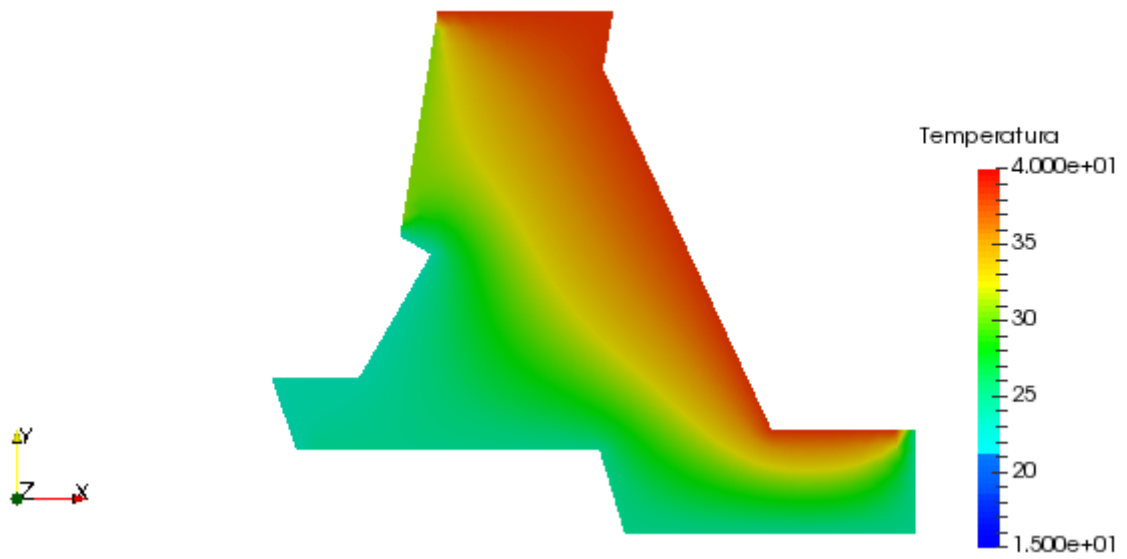
Fonte: O autor (2020)

Figura 56 – Distribuição de temperatura, para  $t=1\text{ min e }40\text{ s}$ 

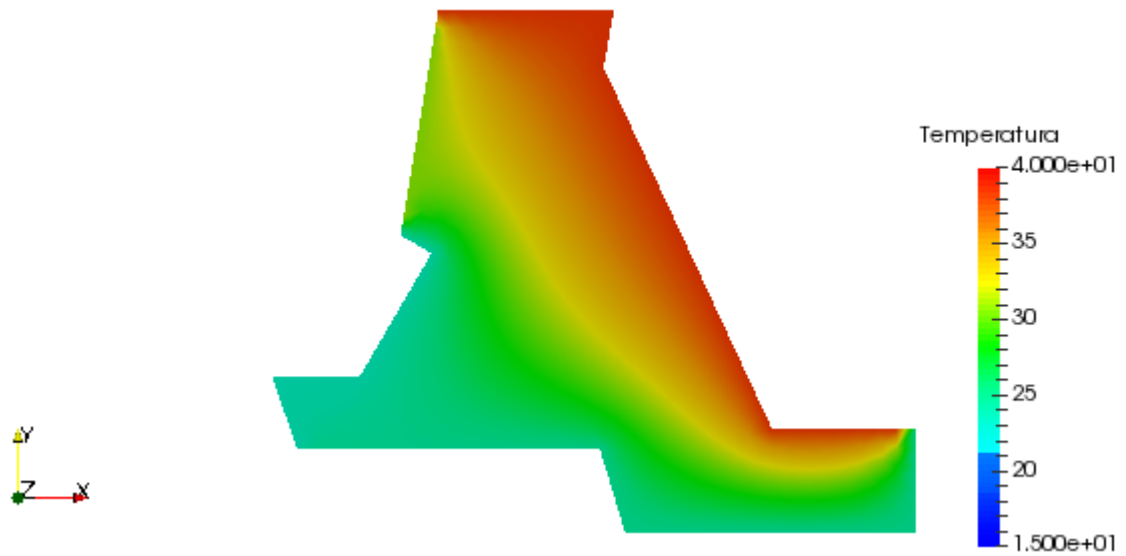
Fonte: O autor (2020)

Figura 57 – Distribuição de temperatura, para  $t=3 \text{ min e } 20 \text{ s}$ 

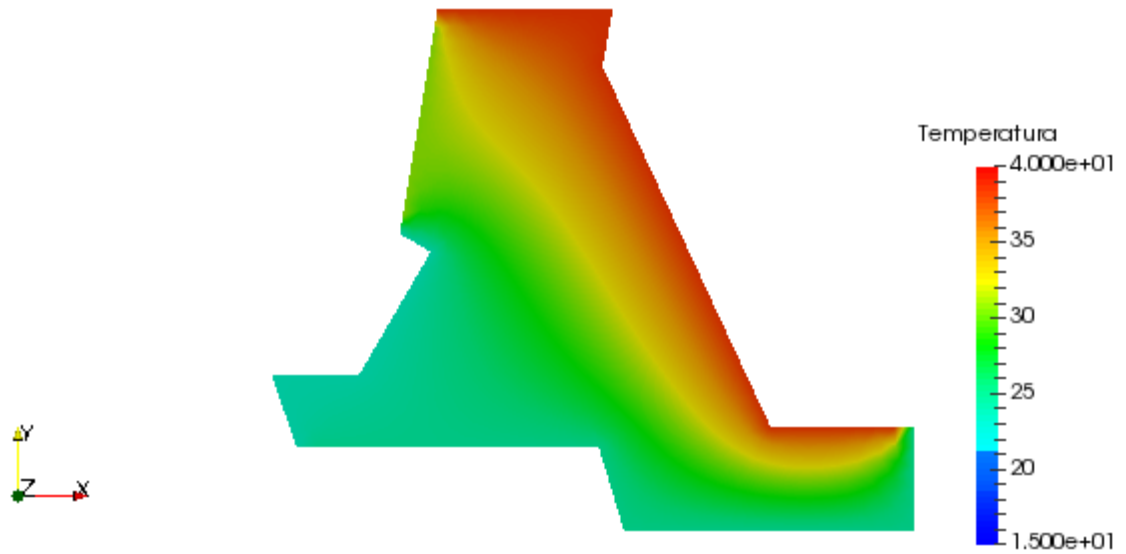
Fonte: O autor (2020)

Figura 58 – Distribuição de temperatura, para  $t=5 \text{ min}$ 

Fonte: O autor (2020)

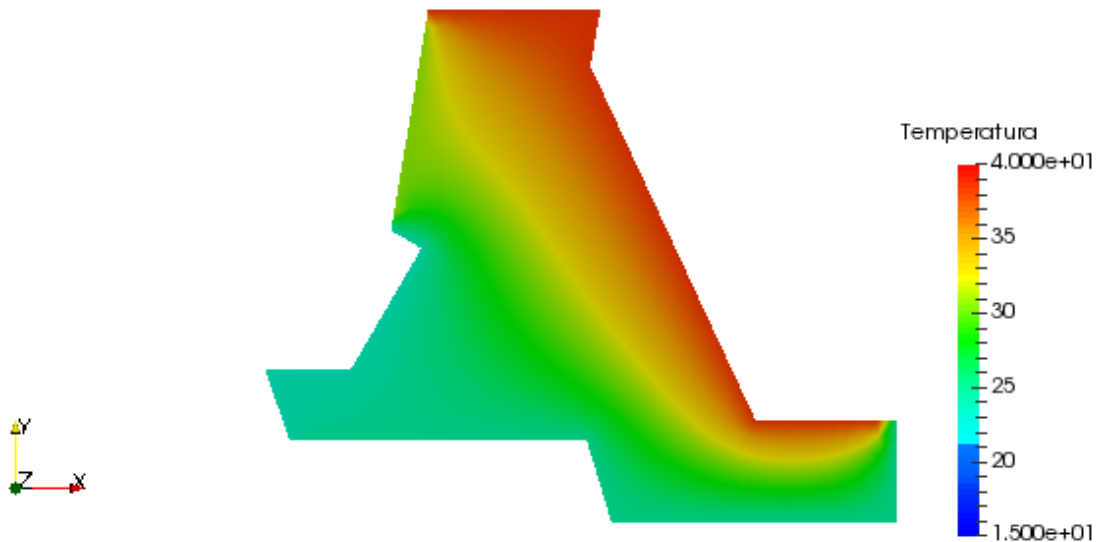
Figura 59 – Distribuição de temperatura, para  $t=6 \text{ min e } 40 \text{ s}$ 

Fonte: O autor (2020)

Figura 60 – Distribuição de temperatura, para  $t=8 \text{ min e } 20 \text{ s}$ 

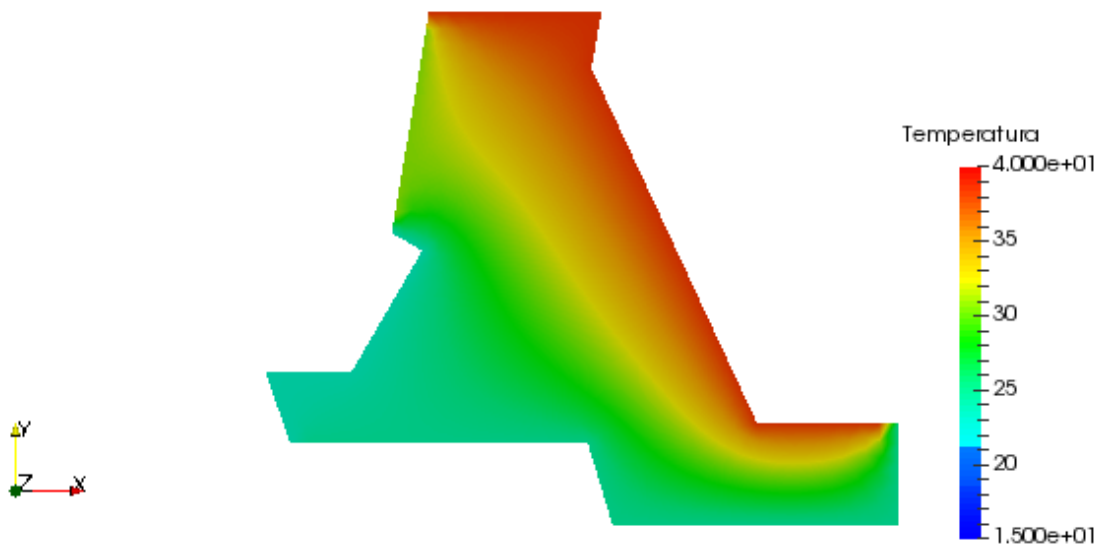
Fonte: O autor (2020)

Figura 61 – Distribuição de temperatura, para  $t=16 \text{ min e } 40 \text{ s}$



Fonte: O autor (2020)

Figura 62 – Distribuição de temperatura, para  $t=50 \text{ min}$



Fonte: O autor (2020)

Houve um teste usando  $\Delta t = 0,01s$ , onde foi observado que o problema demorava um tempo considerável para a solução convergir para o regime estacionário. Para testes com  $\Delta t = 0,01s$  e uma malha de 600 nós, após 50 minutos o problema ainda não converge para a solução estacionária e o computador levou mais de 8 minutos na execução do código.

Optou-se por realizar a simulação transiente com  $\Delta t = 0,1s$  e uma malha com 600 nós, para se obter o resultado de forma mais rápida. Foi observado que neste caso, após 50 minutos, a diferença entre a solução numérica do caso transiente e a solução numérica em regime estacionário é menor que  $10^{-6}$ . A tabela 4 mostra o tempo necessário para esta diferença se tornar menor que  $10^{-6}$  para alguns nós. Pode-se afirmar então que após 50 minutos, o sistema

converge para a solução estacionária.

Tabela 4 - Solução em regime permanente e tempo necessário para o sistema transiente convergir para a solução em regime permanente para alguns nós.

Coordenada x	Coordenada y	Temperatura Estacionária	Tempo em segundos	Tempo aproximado em minutos
42.569	10.479	26.002	2489.70	41.50
51.031	49.517	33.744	2557.30	42.62
113.45	-2.368	30.645	1370.00	22.83
47.016	13.956	27.159	2549.30	42.49
80.929	15.982	36.217	2292.40	38.21
70.437	40.793	37.194	2367.80	39.46
109.536	-8.888	27.829	1506.40	25.11
98.562	0.972	35.899	1715.70	28.60
47.7	82.547	37.957	2026.40	33.77
82.784	17.741	37.291	2177.30	36.29

Fonte: O autor (2020)

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentada a modelagem matemática da equação de calor por meio do MEF bem como sua aplicação a problemas em uma e duas dimensões. O código numérico desenvolvido apresentou resultados satisfatórios. Tanto no regime permanente quanto no regime transiente a solução aproximada converge, com alto grau de precisão, para a solução analítica, conforme apresentado em 2.2.7 e 2.2.8, para o caso unidimensional e em 3.1.5 e 3.2, para o caso bidimensional.

Para o desenvolvimento de um código próprio para resolução de problemas via método dos elementos finitos, é importante iniciar por projetos 1D para melhor entendimento das equações, já que trabalhando em uma dimensão as equações são mais simples e a partir deste conhecimento partir para o projeto 2D. A validação do código é a fase mais importante que é como asseguramos que os resultados do código estarão em linha com uma possível solução analítica.

O código utilizado neste trabalho para resolver problemas bidimensionais foi adaptado do mesmo código desenvolvido para resolução de problemas 1D. No estudo bidimensional, a mesma estrutura de código foi utilizada para a resolução de todos os problemas bidimensionais, com alterações sendo necessárias apenas na implementação das condições de contorno e para a leitura das malhas. Foi possível assim observar duas das principais vantagens do método dos elementos finitos, que é a possibilidade de aplicar o mesmo código a diversos problemas e a

viabilidade para resolução de problemas com geometrias mais complexas, como foi o caso da geometria da barragem.

A simulação realizada com os dados da barragem da UHI, mostrou que a barragem passa por altas variações de temperatura ao longo do tempo. Foi possível observar também que a face da barragem em contato com o ambiente sofre as maiores variações de temperatura ao passo em que a face em contato com a água sofre menos variação. Isso se deve ao fato de a água atuar como um regulador térmico.

As simulações mostraram que malhas mais refinadas apresentam soluções mais precisas, mas o computador precisa de mais tempo para conseguir processar o problema. No limite, malhas muito refinadas podem inviabilizar a solução devido ao grande número de equações a serem processadas. Na simulação da barragem no caso transiente, com passo de tempo igual a 0.1 s, podemos notar que após 50 minutos a solução converge para o regime estacionário.

Por fim, este projeto apresentou com detalhes a modelagem matemática via MEF aplicada a condução de calor em 1D e foi desenvolvido um código para solução de problemas de condução de calor em uma e duas dimensões em regime permanente e regime transiente. O trabalho apresentou também os softwares necessários para a resolução de problemas, de forma gratuita e disponível para qualquer estudante com acesso a internet. Este trabalho pode então ser usado como base para novos estudos bem como servir para o desenvolvimento de outros códigos e estudo de casos mais complexos.

### 5.1. TRABALHOS FUTUROS

A análise da barragem apresentada neste trabalho foi feita considerando algumas simplificações, como o fato de ter sido desconsiderado o efeito da convecção e da radiação e o problema apresentar apenas condições de contorno do tipo Dirichlet. Para trabalhos futuros, sugere-se:

- Melhoria do código a fim de se considerar o efeito da convecção e radiação;
- Resolução de problemas utilizando também a condição de contorno de Neumann;
- Desenvolvimento do código para análise tridimensional da trechos da barragem de Itaipu;
- Análise da estrutura da barragem dentro do contexto de sua construção para quantificar o efeito do calor de hidratação na estrutura.

## REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, G.B.M.L. **Dimensionamento de vigas de concreto armado em situação de incêndio**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: <https://teses.usp.br/>. Acesso em: 2020-05-14.
- ALVES, L.M. **Método dos elementos finitos**. 2007. Apostila de aula (Curso de doutorado do programa de pós-graduação em métodos numéricos) – Departamento de engenharia civil/Departamento de matemática, Universidade do Paraná, Paraná, 2007. Disponível em: <http://www.portalsaberlivre.com.br/manager/uploads/apostilas/1316558246.pdf>. Acesso em: 2020-08-01.
- ANJOS, G.R. **Hydrodynamics Field Solution of electrochemical Cells Through Finite Element Method**. [S.l.]: Metallurgical and Materials Engineering, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 2007. Disponível em: <https://gustavorabello.github.io/media/pdf/publications/congress/cobem2013-2.pdf>. Acesso em: 2020-08-01
- ALKMIM, N.S. **Implementação Computacional da Solução de Problemas Térmicos e Mecânicos pelo Método dos Elementos Finitos em Python**. 147 p. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2016. Disponível em: <https://bdm.unb.br/handle/10483/17826>. Acesso em: 22 abr. 2020.
- ARAÚJO, F. N. **Modelagem da Turbulência Aplicada ao Escoamento sobre uma Placa Plana Inclinada**. Instituto Militar de Engenharia, 2012. Disponível em: <http://www.ime.eb.mil.br/>. Acesso em: 28 mai. 2020.
- ARAÚJO, J.M. Tensões térmicas em blocos de concreto armado. **Teoria e Prática na Eng. Civil**, vol. 22, pp. 1–14, 2013. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/5092>. Acesso em: 2020-05-14.
- ARAÚJO, J.M. **Análise de Barragens de Gravidade de Concreto Considerando A Fase Construtiva e A Interação Dinâmica Barragem-Reservatório-Fundação**; 1995; Tese (Doutorado em Engenharia Civil (Estruturas) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, 1995. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/1456>. Acesso em: 27 mai. 2020.
- BAGGIO, Gustavo Aparecido Pita. **Solução das equações de Navier-Stokes e da equação de transporte por um método de elementos finitos estabilizado pela técnica de separação baseada na característica**. 2015. 99 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Engenharia, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/132106>. Acesso em: 28 mai. 2020.
- LEMONS, E.M. **Implementação dos métodos dos resíduos ponderados por quadraturas gaussianas**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) -COPPE, Universidade federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007. Disponível em: <http://portal.peq.coppe.ufrj.br/>. Acesso em: 2020-08-01.
- CAMPOS JÚNIOR, Henrique Silva. **Procedimentos progressivos analíticos e numéricos**

**para análise de barragens em arco.** 2011. xxii, 184 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil)-Universidade de Brasília, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/9845>. Acesso em: 2020-05-14.

COELHO, N. A.; PEDROSO, L. J.; RÊGO, J. H. S.; NEPOMUCENO, A. A. Um Estudo Numérico dos Efeitos Térmicos Provocados Pelo Calor de Hidratação do Cimento em Barragens. Maceió. **Anais... Dam World – IBRACON**: 2012. Disponível em: <https://www.researchgate.net/>. Acesso em: 01 jun. 2020.

COELHO, N. A. ; SILVA, D. A. ; PEDROSO, L. J. . Efeito Térmico Provocado Pelo Calor de Hidratação em Barragem de Gravidade Construída em Camadas. **Anais... XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING**, 2016, BRASÍLIA-DF. CILAMCE 2016 - XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2016. v. XXXVII. p. 238-238. Disponível em: <https://www.researchgate.net/>. Acesso em: 01 jun. 2020.

COUTINHO, Pedro Mitzcun. **Análise numérica comparativa entre pontes integrais e convencionais de concreto armado sujeitas às ações indiretas de temperatura, retração e fluência.** 2019. 222f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/>. Acesso em: 14 mai. 2020.

ERTHAL, G.T. **Simulação Computacional De Detonação Artificial Por Smoothed Particle Hydrodynamics.** Instituição Militar de Engenharia, 2018. Disponível em: [crea-rj.org.br](http://crea-rj.org.br). Acesso em: 28 mai. 2020.

FONSECA, J. J. S., MORAES, A.M. **Metodologia da pesquisa científica.** Ceará: UEC, 2002.

GERHARDT, T. E. *et al.* **Método de pesquisa.** Rio Grande do Sul: UFRGS, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4ª. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar.** Rio de Janeiro: Record, 1997.

GUTSTEIN, Daniela. **Estudo das tensões em fundações de barragens de gravidade de concreto pelo método de elementos finitos.** Masters dissertation, UFSC, Santa Catarina, 2003. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/85113>. Acesso em: 27 mai. 2020.

HACHICH, W. ; MELLO, Luiz Guilherme de ; BILFINGER, Werner ; BUCALEM, Miguel Luiz . Análise tridimensional das tensões em uma barragem e suas fundações: implicações na avaliação da segurança. **Geotecnia (Lisboa)** , Lisboa, v. 100, p. 123-142, 2004. Disponível em: <https://www.researchgate.net/>. Acesso em: 27 mai. 2020.

HICKMANN, T. **Análise da variação térmica sazonal em barragens de contrafortes com o uso de cálculo fracionário.** Coorientador: Eloy Kaviski, 2016. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Universidade Federal do Paraná, 2016. Disponível em: <https://www.acervodigital.ufpr.br/handle/1884/43384>. Acesso em: 01 jun. 2020.

SOUZA, M.M. **Estudo para o projeto geotécnico da barragem de alto irani, SC.** 2013. Dissertação

(Graduação em Engenharia Civil) - Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em <http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10006346.pdf>. Acesso em: 08 Nov 2020

HICKMANN, T.; GRAMANI, L. M.; KAVISKI, E.; GARCIA, E. L. Análise da Transferência de Calor Transiente em Barragem de Concreto Através do Método dos Elementos Finitos. In: Congresso em Métodos Numéricos, 2015, Lisboa. Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia. **Anais...** Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia, 2015, Lisboa. CMN2015, 2015. Disponível em: <http://www.dem.ist.utl.pt/>. Acesso em: 01 jun. 2020.

SILVA JUNIOR, E.J. **Análise Termo-Mecânica 2D da Barragem de Contraforte de Itaipu pelo Método dos Elementos Finitos em Fortran.** (Monografia). Foz Do Iguaçu, 2018. Disponível em: <https://dspace.unila.edu.br/handle/123456789/4229>. Acesso em: 22 abr. 2020.

LOPES JUNIOR, G. B.; SCHULZ, H. E. Análise de condições de contorno para a quantificação da transferência de massa unidimensional em regime turbulento, **Anais...** XXXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (2012) p.391–397. Disponível em: <https://www.researchgate.net/>. Acesso em: 22 abr. 2020.

JUSTO, D. **Geração de malhas, condições de contorno e discretização de operadores para dinâmica de fluidos computacional.** UFRGS-PPGMAp, Porto Alegre, 2001. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/77767>. Acesso em: 22 abr. 2020.

KLEIN JÚNIOR, Odinir. **Pilares de concreto armado em situação de incêndio submetidos à flexão normal composta.** 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, University of São Paulo, São Paulo, 2011. doi:10.11606/D.3.2011.tde-17082011-154210. Acesso em: 2020-05-14.

LEAL, Cleber E.F. **Formulação do Método dos Elementos Finitos para Análise Elástica Linear de Placas Delgadas.** 2015. 80 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2015. Disponível em: <http://repositorio.roca.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/6623>. Acesso em: 22 abr. 2020.

LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method.** 4ª Ed. Ontario: Thompson, 2007.

MELO, A. R.; GRAMANI, L. M.; KAVISKI, E.. Esquema Explícito Semi-Analítico para a Solução da Equação da Onda Unidimensional com Condições de Contorno Naturais. **TEMA (São Carlos)**, São Carlos , v. 20, n. 1, p. 77-93, Abr. 2019. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2179-84512019000100077&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2179-84512019000100077&lng=en&nrm=iso). Acesso em: 27 mai. 2020.

MOECKE, G.C. **Análise do rompimento hipotético da barragem oeste do vale do rio Itajaí,** 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <http://www.labhidro.ufsc.br/Artigos/TCCgiorgia.pdf>. Acesso em: 22 abr. 2020.

NASCIMENTO JÚNIOR, C.A. **Um estudo comparativo analítico-numérico de tensões locais e globais em barragens gravidade de concreto.** 2016. xxii, 134 f., il. Dissertação

(Mestrado em Estruturas e Construção Civil)—Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/21868>. Acesso em: 14 mai. 2020.

NASCIMENTO, FRAGA FILHO, LOVATTE, REIS, SANTOS, J. M. Metodologia de ensino de dinâmica dos fluidos computacional aplicada ao curso de engenharia ambiental. **Anais... XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**, 2012, Belem - Pará. XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2012. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/>. Acesso em: 28 mai. 2020.

PASKIN, L. **Solução computacional das equações de Navier-Stokes com uma formulação penalizada de elementos finitos**. 2016. 51 f. Projeto de graduação –Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.monografias.poli.ufrj.br/>. Acesso em: 28 mai. 2020.

PEREIRA, A.S. *et al.* **Metodologia da pesquisa científica**. [e-book]. Santa Maria. Ed. UAB/NTE/UFSM., 2018. Disponível em: [https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15824/Lic\\_Computacao\\_Metodologia-Pesquisa-Cientifica.pdf?sequence=1](https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15824/Lic_Computacao_Metodologia-Pesquisa-Cientifica.pdf?sequence=1). Acesso em: 22 abr. 2020.

PEREIRA, L.M.M. **Avaliação das condições de manutenção e segurança de barragens no interior do estado do Rio Grande do Norte**. 2019. 74f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019. Disponível em: <https://monografias.ufrn.br/>. Acesso em: 14 mai. 2020.

SILVA, Angelo Augusto Negrão da. **Simulação numérica do escoamento em um túnel de cavitação**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Naval e Oceânica) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015. doi:10.11606/D.3.2016.tde-26102016-115317. Acesso em: 2020-05-28.

SOUZA, M. M.. **Solução das Equações de Navier-Stokes para Fluidos Incompressíveis via Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado, PPGMAP-UFRGS, 2013. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/75769>. Acesso em: 28 mai. 2020.

SOUZA, R. M. **O Método Dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. Universidade Federal do Pará, Belém, 2003. Disponível em: <http://www.inf.ufes.br/~luciac/fem/livros-fem/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf>

OLIVEIRA, D. N. FERREIRA, G. B. PONTES, R. S. T. Método dos Elementos Finitos como ferramenta didática para o ensino de eletrostática e magnetostática. **Anais... XXXVIII COBENGE**, Fortaleza/CE, 2010. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/9/artigos/562.pdf>. Acesso em: 27 mai. 2020.

RIGHI, Aline Roberta Santos. **Verificação de formas de aplicação de condições de contorno em problemas bidimensionais utilizando malhas estruturadas não-ortogonais com o método de volumes finitos**. 2019. Exame de qualificação (Mestrando em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Paraná. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/64247>. Acesso em: 27 mai. 2020.

SANTOS, A. R. **Metodologia científica: a construção do conhecimento**. 4ª. ed. Rio de Janeiro:

DP&A, 2001.

SOUZA, Andrielle Nascimento de. Análise do comportamento da barragem engenheiro Armando Ribeiro Gonçalves - Açu/RN - durante sua construção, primeiro enchimento e operação do reservatório. 2017. 322f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/23444>. Acesso em: 27 mai. 2020.

SOUZA, Kleber Isaac Silva. **Barragens de Enrocamento com Face de Concreto**: Análise de tensões pelo método dos elementos finitos na fase construtiva por etapas. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/91825>. Acesso em: 22 abr. 2020.

TARTUCE, T. J. A. **Métodos de pesquisa**. Fortaleza: UNICE, 2006.

VASATA, Darlon *et al* . Solução computacional do problema da cavidade cúbica através das equações de Navier-Stokes tridimensionais. **Rev. Bras. Ensino Fís.**, São Paulo , v. 33, n. 2, p. 1-10, Jun 2011. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1806-11172011000200013&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172011000200013&lng=en&nrm=iso). Acesso em: 28 mai. 2020.

ZUNIGA, L. O. et al. Análise Comparativa de Tensões de uma Barragem de Concreto em Arco Devido a Pressão Hidrostática. **REVISTA MIRANTE (ONLINE )** , v. 9, p. 75-86, 2016. Disponível em: <https://www.sumarios.org>. Acesso em: 27 mai. 2020.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2004.

ÇENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J.; Transferência de calor e massa - Uma abordagem prática. 4º Ed.: McGraw Hill, 2012.

KOTHANDARAMAN, C.P. Fundamentals of heat and mass transfer. 3ª Ed. New Age international publishers, 2006.

BRENNER, S.C.; SCOTT, L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Method. [S.l.]: Springer Science +Business Media, LLC., 2008.

## APÊNDICE A – ASSEMBLY 2D

```

bi=[]; bj=[]; bk=[]; ci=[]; cj=[]; ck=[]
K=np.zeros((num_nos,num_nos))
for elem in range(0, ne):
    # listas onde são definidos os termos dados em 2.95
    bi.append(float(y[ien[elem,1]])-float(y[ien[elem,2]]))
    bj.append(float(y[ien[elem,2]])-float(y[ien[elem,0]]))
    bk.append(float(y[ien[elem,0]])-float(y[ien[elem,1]]))
    ci.append(float(x[ien[elem,2]])-float(x[ien[elem,1]]))
    cj.append(float(x[ien[elem,0]])-float(x[ien[elem,2]]))
    ck.append(float(x[ien[elem,1]])-float(x[ien[elem,0]]))
    #Area, matriz apresentada em 2.92
A=np.array([[1,x[ien[elem,0]],y[ien[elem,0]]],[1,x[ien[elem,1]],y[ien[elem,1]]],
            [1,x[ien[elem,2]],y[ien[elem,2]]]],dtype='float')
    #Matriz de rigidez, dada em 2.94
Ke=0.25*np.array([(bi[elem])**2+(ci[elem])**2,bi[elem]*bj[elem]+ci[elem]*cj[elem],
bi[elem]*bk[elem]+ci[elem]*ck[elem]],[bi[elem]*bj[elem]+ci[elem]*
            cj[elem],[bj[elem])**2+(cj[elem])**2,bj[elem]*bk[elem]+cj[elem]*
            ck[elem]],[bi[elem]*bk[elem]+ci[elem]*ck[elem],bj[elem]*bk[elem]+
            cj[elem]*ck[elem],[bk[elem])**2+(ck[elem])**2]),dtype='float')
Area=np.linalg.det(A)
Area=2*Area
Kelem=k*Ke/Area
for ilocal in range(0,3):
    i=ien[elem,ilocal]
    for jlocal in range(0,3):
        j=ien[elem,jlocal]
        K[i,j]=K[i,j]+Kelem[ilocal,jlocal]
Mglobal=K

```

## APÊNDICE B – CONDIÇÕES DE CONTORNO E SOLVER 2D

```

aux1 = np.zeros((num_nos,1))
for i in range(0,int(len(dirichlet_1))):
    aux1[int(dirichlet_1[i]),0]=Tinf
for i in range(0,int(len(dirichlet_2))):
    aux1[int(dirichlet_2[i]),0] = Tesq
for i in range(0,int(len(dirichlet_3))):
    aux1[int(dirichlet_3[i]),0] = Tdir
for i in range(0,int(len(dirichlet_4))):
    aux1[int(dirichlet_4[i]),0] = Tsup
newmann=np.zeros((num_nos,1))
#Zerar a Matriz Global,
bc_dirichlet = np.zeros((1,num_nos))
aux2 = np.ones((num_nos,1))
for i in dirichlet: #LHS
    bc_dirichlet += Mglobal[:,int(i)]*aux1[int(i)] #Soma das colunas da matriz
    Mglobal[:,int(i)] = 0 #Zerei a linha
    Mglobal[int(i),:] = 0 #Zerei a coluna
    Mglobal[int(i),int(i)] = 1 # Coloquei 1 no diagonal principal
    bc_dirichlet[0][i]=aux1[i] #Imposição da condição de contorno
    aux2[int(i)] = 0 #Imposição do valor zero ao nó de contorno
bc_dirichlet = bc_dirichlet.T
T = np.zeros((num_nos,1)) #Vetor T
RHS = np.zeros((num_nos,1)) #vetor com zeros
RHS = RHS + newmann - bc_dirichlet
RHS = np.multiply(RHS,aux2)
RHS = RHS + aux1
T = np.linalg.solve(Mglobal,RHS)

```

## APÊNDICE C – CODIGO COMPLETO 1D TRANSIENTE SEM MALHA GMSH

```

# Problema termico 1D em regime transiente
# Resolver numericamente a equacao (dT/dt) = a*(d2T/dx2) + Q
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pylab
# -----DADOS INSERIDOS MANUALMENTE -----
L=1.0
nx=40      # numero de nos
ne=nx-1    # numero de elementos
Tin=0.0    # temperatura do primeiro nó
Tout=0.0   # temperatura do ultimo nó
dx=L/(nx-1) # distancia entre os nos
dt=1e-02   # passo de tempo
maxtime = 59 #maximo de iteracoes
epsilon = 1e-5 #erro maximo
a=1.0      # difusividade termica do material
Q2=2.0     # geracao interna de calor
nos_dirichlet=[0,nx-1] #Vetor com dois nos, sendo no 1=0 e no 2 = ultimo no.
#-----FIM DADOS MANUAIS-----
#Malha padrão
x = np.zeros((nx,1))
for i in range(0,nx):
    x[i] = i*dx
# Solucao analitica no estado estacionario.
C1=((Tout-Tin)/L)-(((Q2/a)/2)*L)
C2=Tin
x_ana=0.0
Tanalitico=np.zeros((nx,1))
#print('T analitica')
for i in range (0,nx):
    Tana=-(((Q2/a)/2)*(pow(x_ana,2))+C1*x_ana+C2)
    Tanalitico[i]=Tana
    #print(Tana)
    x_ana+=dx
# -----Solucao numerica do problema transiente-----
# Matriz de conectividade
ien=np.zeros((ne,2),dtype="int")
for i in range (0,ne):
    ien[i,0]=i
    ien[i,1]=i+1
# Matriz elemento
Kelem=np.zeros((2,2))
Kelem[0,0]=(1/dx)*(1)
Kelem[0,1]=(1/dx)*(-1)
Kelem[1,0]=(1/dx)*(-1)
Kelem[1,1]=(1/dx)*(1)
# Matriz elemento de massa
Melem=np.zeros((2,2))
Melem[0,0]=(dx/6)*(2)
Melem[0,1]=(dx/6)*(1)
Melem[1,0]=(dx/6)*(1)
Melem[1,1]=(dx/6)*(2)
# Matriz global
K=np.zeros((nx,nx))
M=np.zeros((nx,nx))
Mglobal=np.zeros((nx,nx))
for elem in range (0,ne):
    for ilocal in range (0,2):
        i=ien[elem,ilocal]
        for jlocal in range (0,2):
            j=ien[elem,jlocal]
            K[i,j]=K[i,j]+Kelem[ilocal,jlocal]
            M[i,j]=M[i,j]+Melem[ilocal,jlocal]
Mglobal = (np.copy(M)/dt) + (a*np.copy(K)) #MONTAGEM DA MATRIZ GOBAL
Q = np.ones((nx,1))
Q = Q*Q2

```

```

#Vetor auxiliar 1
aux1 = np.zeros((nx,1))
aux1[nos_dirichlet[0],0] = Tin
aux1[nos_dirichlet[1],0] = Tout
newmann=np.zeros((nx,1)) #problema sem condições de contorno de Neumann
#-----BLOCO IMPOSIÇÃO DAS CCs/GAUSS-----
bc_dirichlet = np.zeros((1,nx))
aux2 = np.ones((nx,1))
for i in nos_dirichlet:
    bc_dirichlet += Mglobal[:,i]*aux1[i] #Soma das colunas da matriz
Mglobal[:,i] = 0 #Zerei a linha
Mglobal[i,:] = 0 #Zerei a coluna
Mglobal[i,i] = 1 # Coloquei 1 no diagonal principal
aux2[i] = 0
bc_dirichlet = bc_dirichlet.T
T = np.zeros((nx,1)) #Vetor T
T0=[]; T1=[]; T2=[];T3=[];T4=[];T5=[]
erro = np.zeros((nx,1))
for t in range(0,maxtime):
    RHS = np.dot((M/dt),T) + np.dot(M,Q)
    RHS = RHS + newmann - bc_dirichlet
    RHS = np.multiply(RHS,aux2)
    RHS = RHS + aux1
    T = np.linalg.solve(Mglobal,RHS)
    t1=t
for i in range(0,nx):
    erro[i] = abs(T[i] - Tanalitico[i])
    if t == 0: #Com 1 iteração
        T0.append(float(T[i][0]))
    if t == 5: #Com 5 iterações
        T1.append(float(T[i][0]))
    if t == 8: #Com 9 iterações
        T2.append(float(T[i][0]))
    if t == 13 : #com 14 iterações
        T3.append(float(T[i][0]))
    if t == 19: #Com 20 iterações:
        T4.append(float(T[i][0]))
    if t == 58: #Com 20 iterações:
        T5.append(float(T[i][0]))
    print 59*dt
delta = float(max(erro))
if delta < epsilon:
    break
C1=((Tout-Tin)/L)-(((Q2/a)/2)*L)
C2=Tin
x_ana = np.linspace(0,1,1000)
Tanalitico=np.zeros((len(x_ana),1))
for i in range (0,len(x_ana)):
    Tanalitico[i] = -(((Q2/a)/2)*(pow(x_ana[i],2))+C1*x_ana[i]+C2)
plt.ylabel('Temperatura')
plt.xlabel('Comprimento')
plt.grid(True) #Serve para por "linhas de grade" no grafico
plt.plot(x_ana,Tanalitico,'-b',linewidth=1,label =' Sol. Estacionaria')
plt.plot(x,T0,c='b', ls='-',lw='1',linewidth=5,label ='t=0.01 s')
plt.plot(x,T1,'-b', ls='-.', label ='t=0.06 s')
plt.plot(x,T2,'*',color='b',label='t=0.09 s')
plt.plot(x,T3,c='b', marker='o', ls='',ms=4,label='t=0.14 s')
plt.plot(x,T4,'-b', ls=':',label='t=0.21 s')
plt.scatter(x, T5, marker="x", color='red',label='t=0.59 s')
plt.savefig('Temperatura100'+str(t)+'.png')
plt.legend(loc=2, prop={'size': 9})
plt.rcParams['figure.figsize'] = (11,7)
plt.show()

```

## APÊNDICE D – CÓDIGO COMPLETO 2D - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO 2.84

```

#Código para abrir e ler a Malha gmsh. Apenas na versão 4.4.1
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import export_vtk
import VTKGustavo
import time
#Bloco que importa a malha para o Python
malha=[] #Cria uma lista
with open("MalhaRefinada.msh") as mesh: #Abre a malha do gmsh
    for line in mesh: #loop sobre todas as linhas do código
        row = line.split() #divide/separa os dados da malha por espaço.
        malha.append(row[:]) #Adiciona as linhas do arquivo na lista

#Extracao dos dados que preciso para o programa
for i in malha: #loop sobre os elementos da lista
    local = malha.index(i) # índice/posição do "vetor" procurado
    for b in i: #loop sobre os elementos dos "vetores" da lista
        if b == "$PhysicalNames": #Ve se o elemento, do vetor, na lista, é o
            que quero.
                NumerodeCC=malha[local+1][0] # valor que usado para criar as CC
                posInicioCC=int(local)+2

                if b == "$Nodes":
                    local2 = malha[local].index(b)
                    InicioNos=local
                    NumeroDeNos=malha[local+1][local2+1]
                if b == "$EndNodes":
                    local2 = malha[local].index(b)
                    FimNos=local
                if b == "$Elements":
                    local2 = malha[local].index(b) # Seg. elem. que está dentro do 1
                    InicioElementos=local+1
                    NumTotalElementos=malha[local+1][local2+1]
                if b == "$EndElements":
                    local2 = malha[local].index(b) # Segundo elemento que está dentro 1
                    FimElementos=local

#-----Usado para capturar o numero de elementos-----
for i in range(InicioElementos,FimElementos):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])== str(2) and str(malha[i][1])==
str(1) and str(malha[i][2])== str(2):
        NumeroElementos=malha[i][3]

#-----captura as coordenadas dos nós-----
dirichlet=[]
dirichlet_1=[]
dirichlet_2=[]
dirichlet_3=[]
dirichlet_4=[]
coord_nos_contorno=[]
#Os nós de contorno sempre vao até uma estrutura do Mesh com 2 1 1 X
#Os nos de contorno exceto os das arestas, se iniciam na estrutura 1,1,1,k ,
#onde K depende do num de nos e X é o numero de nos da malha
for i in range(InicioNos+1,FimNos):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(1):
        ji=i
for i in range(InicioNos+1,FimNos):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(2) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(1):
        N=int(malha[i][3])+1
        j=i
for i in range(InicioNos+1,j):
    if len(malha[i])==1:
        dirichlet.append(malha[i][0]) #P/ todos os nós de CC.

```

```

    if len(malha[i])==3:
        coord_nos_contorno.append((malha[i])) # P/ os vetores de coordenadas
dos nos.
for i in range(ji,j+1):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(2): # Dirichlet 1
        s1=i
        if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(3):#Dirichlet 2
            s2=i
        if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(4): #dirichlet 3
            s3=i
        if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(2) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(1): #dirichlet 4
            s4=i
dirichlet_1=[] #preferencial
dirichlet_2=[]
dirichlet_3=[] #preferencial
dirichlet_4=[]
for i in range(ji,s4):
    if len(malha[i])==1 and i<s1: #
        dirichlet_1.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s1 and i<s2:
        dirichlet_2.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s2 and i<s3:
        dirichlet_3.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s3 and i<s4:
        dirichlet_4.append(malha[i][0])

#Superior e Inferior preferencial
#Linha 2 , preferencial
dirichlet_1.insert(0,4)
dirichlet_1.insert(0,1)
#Linha 4, preferencial
dirichlet_3.insert(0,3)
dirichlet_3.insert(0,2)
dir_geral=[]
au1=[]
au2=[]
au3=[]
au4=[]
for i in dirichlet:
    dir_geral.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_1:
    au1.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_2:
    au2.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_3:
    au3.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_4:
    au4.append(int(i)-1)
dirichlet=dir_geral
dirichlet_1=au1
dirichlet_2=au2
dirichlet_3=au3
dirichlet_4=au4
#-----Para achar o número de nós-----
x=[]
y=[]
#P/ nós de contorno de aresta
for i in range(InicioNos+1,ji):
    if len(malha[i])==3:
        x.append(malha[i][0])
        y.append(malha[i][1])
#p/ nós internos

for i in range(ji+1,j):

```

```

    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][2])==str(0):
        x.append(malha[i][0])
        y.append(malha[i][1])
#Nós do interior
for i in range(j, FimNos):
    if len(malha[i])==5:
        x.append(malha[i][0])
        y.append(malha[i][1])
#-----BLOCO PARA PEGAR O VETOR IEN-----
Lista1_ien=[]
Lista2_ien=[]
Lista3_ien=[]
nos_ien=[]
for i in range(InicioElementos,FimElementos):
    TotalElem=malha[InicioElementos][1]
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(2) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(2):
        l=i+1
for i in range(l,FimElementos):
    Lista1_ien.append(malha[i][1]) #Penultimos elementos de cada lista
    Lista2_ien.append(malha[i][2]) #Últimos elementos de cada lista
    Lista3_ien.append(malha[i][3])
    nos_ien.append(malha[i][0])
#Transforma as duas listas anteriores em um vetor IEN
ien=np.zeros((int(NumeroElementos),3),dtype="int")
for i in range(0,int(NumeroElementos)):
    ien[i,0]=int(Lista1_ien[i])-1
    ien[i,1]=int(Lista2_ien[i]) -1
    ien[i,2]=int(Lista3_ien[i]) -1
#----- PRINCIPAIS DADOS DA MALHA -----
Elem1D= int(TotalElem) -int(NumeroElementos) - int( NumerodeCC)
print "Numero de Nos= ",NumeroDeNos
print "Numero de elementos 2D= ", NumeroElementos
print "Numero de elementos 1D = ", Elem1D
print "Numero de Pontos=", NumerodeCC
print('ien')
print "lembrar que o IEN está subtraído de 1, pois o python começa em 0, o gmsh
em 1"
print "As arestas preferenciais são: superior e inferior"
#-----INICIO DO MEF-----
#-----CARACTERISTICAS DO PROBLEMA-----
l=1 #Espessura da placa
k=1.65 #W/m.C condutividade termica
# condicoes de contorno
Tesq=100 # Temperatura na superficie da esquerda
Tdir=100 #Temperatura na Superficie da direita
Tinf=100 #Temperatura na superficie inferior
Tsup=500 #Temperatura na superficie Superior
#IEN
Lx=1.0 #Comprimento da peça em X
Ly= 1.0 #Comprimento da peça em Y
num_nos=int(NumeroDeNos) # numero total de nos
ne=int(NumeroElementos)
# Solucao numerica do problema permanente
# Matriz elemento. Essa Matriz precisará ser dentro de um loop
bi=[];bj=[];bk=[];ci=[];cj=[];ck=[]
K=np.zeros((num_nos,num_nos))
for elem in range (0,ne):
    bi.append(float(y[ien[elem,1]])-float(y[ien[elem,2]]))
    bj.append(float(y[ien[elem,2]])-float(y[ien[elem,0]]))
    bk.append(float(y[ien[elem,0]])-float(y[ien[elem,1]]))
    ci.append(float(x[ien[elem,2]])-float(x[ien[elem,1]]))
    cj.append(float(x[ien[elem,0]])-float(x[ien[elem,2]]))
    ck.append(float(x[ien[elem,1]])-float(x[ien[elem,0]]))
A=np.array([[1,x[ien[elem,0]],y[ien[elem,0]],1,x[ien[elem,1]],y[ien[elem,1]],
1,x[ien[elem,2]],y[ien[elem,2]]],dtype='float')
Ke=0.25*np.array([[bi[elem]**2+(ci[elem])**2,bi[elem]*bj[elem]+ci[elem]*
cj[elem], bi[elem]*bk[elem]+ci[elem]* ck[elem]], [bi[elem]*

```

```

        bj[elem]+ci[elem]*cj[elem], (bj[elem])**2+(cj[elem])**2,
        bj[elem]*bk[elem]+cj[elem]* ck[elem]], [bi[elem]*bk[elem]+
        ci[elem]* ck[elem],bj[elem]*bk[elem]+
        cj[elem]*ck[elem], (bk[elem])**2+(ck[elem])**2]], dtype='float')
Area=np.linalg.det(A)
Area=2*Area
Kelem=k*Ke/Area
for ilocal in range (0,3):
    i=ien[elem,ilocal]
    for jlocal in range (0,3):
        j=ien[elem,jlocal]
        K[i,j]=K[i,j]+Kelem[ilocal,jlocal]
Mglobal=K
#Vetor auxiliar 1
aux1 = np.zeros((num_nos,1))
for i in range(0,int(len(dirichlet_1))):#captura todos os elementos do vetor 1.
    aux1[int(dirichlet_1[i]),0]=Tinf
for i in range(0,int(len(dirichlet_2))):
    aux1[int(dirichlet_2[i]),0] = Tesq
for i in range(0,int(len(dirichlet_3))):
    aux1[int(dirichlet_3[i]),0] = Tsup
for i in range(0,int(len(dirichlet_4))):
    aux1[int(dirichlet_4[i]),0] = Tdir

#Problema sem condições de contorno de Neumann
newmann=np.zeros((num_nos,1))

#----- IMPOSIÇÃO DAS CCs/GAUSS -----
#Zerar a Matriz Global
bc_dirichlet = np.zeros((1,num_nos))
aux2 = np.ones((num_nos,1))
for i in dirichlet: #LHS
    bc_dirichlet += Mglobal[:,int(i)]*aux1[int(i)] #Soma das colunas da matriz
    Mglobal[:,int(i)] = 0 #Zerei a linha
    Mglobal[int(i),:] = 0 #Zerei a coluna
    Mglobal[int(i),int(i)] = 1 # Coloquei 1 no diagonal principal
    bc_dirichlet[0][i]=aux1[i]
    aux2[int(i)] = 0
bc_dirichlet = bc_dirichlet.T
T = np.zeros((num_nos,1)) #Vetor T
RHS = np.zeros((num_nos,1)) #vetor com zeros
RHS = RHS + newmann - bc_dirichlet
RHS = np.multiply(RHS,aux2)
RHS = RHS + aux1
T = np.linalg.solve(Mglobal,RHS)
t=0.0
it=1
dt=0.5
while it <21: #delta>0.00001:
    #vtk = VTKGustavo.InOut(x,y,ien,int(NumeroDeNos),int(NumeroElementos),T)
    #vtk.saveVTK('\home\dalvan\Q1_3143_NOS', '# Main_vtk2',it)
    t+=dt
    it+=1

```

## APÊNDICE E – CÓDIGO COMPLETO 2D – SIMULAÇÃO DA BARRAGEM

```

#Código para abrir e ler a Malha gmsh. Apenas na versão 4.4.1
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import VTKGustavo
import time
inicio_t=time.time()
#importa a malha do Python
malha=[] #Cria uma lista
with open("itaipuV23.msh") as mesh: #Abre a malha do gmsh
    for line in mesh: #loop sobre todas as linhas do código
        row = line.split() #divide/separa os dados da malha por espaço.
        malha.append(row[:]) #Adiciona as linhas do arquivo na lista
#Extracao dos dados que preciso para o programa
for i in malha: #loop sobre os elementos da lista
    local = malha.index(i) # índice/posição do "vetor" procurado
    for b in i: #loop sobre os elementos dos "vetores" da lista
        if b == "$PhysicalNames":
            NumerodeCC=malha[local+1][0]
            posInicioCC=int(local)+2
        if b == "$Nodes":
            local2 = malha[local].index(b)
            InicioNos=local
            NumeroDeNos=malha[local+1][local2+1]
        if b == "$EndNodes":
            local2 = malha[local].index(b)
            FimNos=local
        if b == "$Elements":
            local2 = malha[local].index(b) # Seg. elem. que está dentro do 1
            InicioElementos=local+1
            NumTotalElementos=malha[local+1][local2+1]
        if b == "$EndElements":
            local2 = malha[local].index(b) # Segundo elemento que está dentro 1
            FimElementos=local

#-----achar o numero de elementos-----
for i in range(InicioElementos,FimElementos):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])== str(2) and str(malha[i][1])==
str(1) and str(malha[i][2])== str(2):
        NumeroElementos=malha[i][3]
#-----p/ as coordenadas dos nos-----
dirichlet=[]
coord_nos_contorno=[]
for i in range(InicioNos+1,FimNos):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(1):
        ji=i
for i in range(InicioNos+1,FimNos):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(2) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(1):
        N=int(malha[i][3])+1
        j=i
for i in range(InicioNos+1,j):
    if len(malha[i])==1:
        dirichlet.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==3:
        coord_nos_contorno.append((malha[i]))
for i in range(ji,j+1):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(2): #Dirichlet 1
        s1=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(3): #Dirichlet 2
        s2=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(4): #Ddirichlet 3

```

```

    s3=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(5): #Dirichlet 4
        s4=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(6): #Dirichlet 5
        s5=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(7): #Dirichlet 6
        s6=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(8): #dirichlet 7
        s7=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(9): #dirichlet 8
        s8=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(10): #dirichlet 9
        s9=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(11): #dirichlet 10
        s10=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(12): #dirichlet 11
        s11=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(1) and
str(malha[i][1])==str(13): #dirichlet 12
        s12=i
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(2) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(1): #dirichlet 4
        s13=i
dirichlet_1=[]
dirichlet_2=[]
dirichlet_3=[]
dirichlet_4=[]
dirichlet_5=[]
dirichlet_6=[]
dirichlet_7=[]
dirichlet_8=[]
dirichlet_9=[]
dirichlet_10=[]
dirichlet_11=[]
dirichlet_12=[]
dirichlet_13=[]
for i in range(ji,s13):
    if len(malha[i])==1 and i<s1: #
        dirichlet_1.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s1 and i<s2:
        dirichlet_2.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s2 and i<s3:
        dirichlet_3.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s3 and i<s4:
        dirichlet_4.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s4 and i<s5:
        dirichlet_5.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s5 and i<s6:
        dirichlet_6.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s6 and i<s7:
        dirichlet_7.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s7 and i<s8:
        dirichlet_8.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s8 and i<s9:
        dirichlet_9.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s9 and i<s10:
        dirichlet_10.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s10 and i<s11:
        dirichlet_11.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s11 and i<s12:

```

```

        dirichlet_12.append(malha[i][0])
    if len(malha[i])==1 and i>s12 and i<s13:
        dirichlet_13.append(malha[i][0])

#Linha 2 e 4 tem preferencia.
#Assim, incluir nós de arestas para esses casos.
#Linha 2 , preferencial
dirichlet_1.insert(0,13)
dirichlet_1.insert(0,1)
#Linha 4, preferencial
dirichlet_3.insert(0,3)
dirichlet_3.insert(0,2)
#linha 6, preferencial
dirichlet_5.insert(0,5)
dirichlet_5.insert(0,4)
#linha 8, preferencial
dirichlet_7.insert(0,7)
dirichlet_7.insert(0,6)
#linha 10, preferencial
dirichlet_9.insert(0,9)
dirichlet_9.insert(0,8)
#linha 12, preferencial
dirichlet_11.insert(0,11)
dirichlet_11.insert(0,10)
#LINHA 13 PREF
dirichlet_13.insert(0,12)
#dirichlet_13.insert(0,10)
#Subtrair 1 de cada elemento do Python para que a lista seja
#do tipo 1,2,3,4 e nao do tipo 0,1,2,3,4...
dir_geral=[]
au1=[]
au2=[]
au3=[]
au4=[]
au5=[]
au6=[]
au7=[]
au8=[]
au9=[]
au10=[]
au11=[]
au12=[]
au13=[]
for i in dirichlet:
    dir_geral.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_1:
    au1.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_2:
    au2.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_3:
    au3.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_4:
    au4.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_5:
    au5.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_6:
    au6.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_7:
    au7.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_8:
    au8.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_9:
    au9.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_10:
    au10.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_11:

```

```

    au1.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_12:
    au2.append(int(i)-1)
for i in dirichlet_13:
    au3.append(int(i)-1)
dirichlet=dir_geral
dirichlet_1=au1
dirichlet_2=au2
dirichlet_3=au3
dirichlet_4=au4
dirichlet_5=au5
dirichlet_6=au6
dirichlet_7=au7
dirichlet_8=au8
dirichlet_9=au9
dirichlet_10=au10
dirichlet_11=au11
dirichlet_12=au12
dirichlet_13=au13

#Os nós aqui estão começam em 1,é necessário que comecem em zero, logo
#deve-se subtrair um de cada elemento
#-----Bloco para achar o número de nós-----
#Primeiro, pegar os casos de 0 a 4
x=[]
y=[]
#Pega nos de contorno de aresta
for i in range(InicioNos+1,ji):
    if len(malha[i])==3:
        x.append(malha[i][0])
        y.append(malha[i][1])
#pega nós internos
for i in range(ji+1,j):
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][2])==str(0):
        #print "malha[i][1]"
        #print malha[i]
        #print malha[i][1]
        x.append(malha[i][0])
        y.append(malha[i][1])
#pega nos do interior
for i in range(j, FimNos):
    if len(malha[i])==5:
        x.append(malha[i][0])
        y.append(malha[i][1])
#-----BLOCO PARA PEGAR O VETOR IEN-----
Lista1_ien=[]
Lista2_ien=[]
Lista3_ien=[]
nos_ien=[]
for i in range(InicioElementos,FimElementos):
    TotalElem=malha[InicioElementos][1]
    if len(malha[i])==4 and str(malha[i][0])==str(2) and
str(malha[i][1])==str(1) and str(malha[i][2])==str(2):
        l=i+1
for i in range(l,FimElementos):
    Lista1_ien.append(malha[i][1]) #pega os penultimos elementos de cada lista
    Lista2_ien.append(malha[i][2]) #Pega os últimos elementos de cada lista
    Lista3_ien.append(malha[i][3])
    nos_ien.append(malha[i][0])
#Transforma as duas listas anteriores em um vetor IEN
ien=np.zeros((int(NumeroElementos),3),dtype="int")
for i in range(0,int(NumeroElementos)):
    ien[i,0]=int(Lista1_ien[i])-1
    ien[i,1]=int(Lista2_ien[i]) -1
    ien[i,2]=int(Lista3_ien[i]) -1
#-----BLOCO DE IMPRESSAO DOS DADOS-----
#Elem1D= int(TotalElem) -int(NumeroElementos) - int( NumerodeCC)
print "Numero de Nos= ",NumeroDeNos

```

```

print "Numero de elementos 2D= ", NumeroElementos
#print "Numero de elementos 1D = ", Elem1D
#print "Numero de Pontos=", NumerodeCC
#print('ien')
print "lembrar que o IEN está subtraído de 1, pois o python começa em 0, o gms h
em 1"
#-----INICIO DO MEF-----
#-----INICIO DO BLOCO DE CARACTERISTICAS DO PROBLEMA-----
# Dados
l=1 #Espessura da placa
k=1.6 #W/m.C condutividade termica
#Q2=0.0 # geracao de calor
dt=1e-1 # passo de tempo
maxtime = 30000 #maximo de iteracoes
epsilon = 1e-5 #erro maximo
a=1.0 # difusividade termica do material
#IEN
Lx=1.0 #Comprimento da peca em X
Ly= 1.0 #Comprimento da peca em Y
num_nos=int(NumeroDeNos) # numero total de nos
ne=int(NumeroElementos)
bi=[];bj=[];bk=[];ci=[];cj=[];ck=[]
# Matriz de massa
Melem=np.ones((3,3))
Melem[0,0]=2
Melem[1,1]=2
Melem[2,2]=2

K=np.zeros((num_nos,num_nos))
M=np.zeros((num_nos,num_nos))
Mglobal=np.zeros((num_nos,num_nos))
for elem in range (0,ne):
    bi.append(float(y[ien[elem,1]])-float(y[ien[elem,2]]))
    bj.append(float(y[ien[elem,2]])-float(y[ien[elem,0]]))
    bk.append(float(y[ien[elem,0]])-float(y[ien[elem,1]]))
    ci.append(float(x[ien[elem,2]])-float(x[ien[elem,1]]))
    cj.append(float(x[ien[elem,0]])-float(x[ien[elem,2]]))
    ck.append(float(x[ien[elem,1]])-float(x[ien[elem,0]]))
A=np.array([[1,x[ien[elem,0]],y[ien[elem,0]]],[1,x[ien[elem,1]],y[ien[elem,1]]],
[1,x[ien[elem,2]],y[ien[elem,2]]]],dtype='float')
Ke=0.25*np.array([(bi[elem])**2+(ci[elem])**2,bi[elem]*bj[elem]+ci[elem]*cj[el
em],bi[elem]*bk[elem]+ci[elem]*ck[elem]],[bi[elem]*bj[elem]+ci[elem]*cj[elem],(
bj[elem])**2+(cj[elem])**2,bj[elem]*bk[elem]+cj[elem]*ck[elem]],[bi[elem]*bk[el
em]+ci[elem]*ck[elem],bj[elem]*bk[elem]+cj[elem]*ck[elem],[bk[elem])**2+(ck[ele
m])**2]],dtype='float')
Area=np.linalg.det(A)
Area=2*Area
Kelem=k*Ke/Area
for ilocal in range (0,3):
    i=ien[elem,ilocal]
    for jlocal in range (0,3):
        j=ien[elem,jlocal]
        K[i,j]=K[i,j]+Kelem[ilocal,jlocal]
        M[i,j]=M[i,j]+Melem[ilocal,jlocal]
Mglobal = (np.copy(M)/dt) + (a*np.copy(K)) #MONTAGEM DA MATRIZ GOBAL
#Q = np.ones((num_nos,1))
#Q = Q*Q2
TSD05=38.39 # Temperatura na superficie da esquerda
TSD904=30.53 #Temperatura na Superficie da direita
TIE03=24.31
TIE02=24.25 #Temperatura na superficie inferior
TIE01=23.18

#Vetor auxiliar l
aux1 = np.zeros((num_nos,1))
for i in range(0,int(len(dirichlet_1))):
    aux1[int(dirichlet_1[i]),0]=TIE01
for i in range(0,int(len(dirichlet_2))):

```

```

    aux1[int(dirichlet_2[i]),0] = TIE02
for i in range(0,int(len(dirichlet_3))):
    aux1[int(dirichlet_3[i]),0]=TIE03
for i in range(0,int(len(dirichlet_4))):
    aux1[int(dirichlet_4[i]),0] = TIE03
for i in range(0,int(len(dirichlet_5))):
    aux1[int(dirichlet_5[i]),0] = TIE03
for i in range(0,int(len(dirichlet_6))):
    aux1[int(dirichlet_6[i]),0] = TSD05
for i in range(0,int(len(dirichlet_7))):
    aux1[int(dirichlet_7[i]),0] = TSD05
for i in range(0,int(len(dirichlet_8))):
    aux1[int(dirichlet_8[i]),0] = TSD05
for i in range(0,int(len(dirichlet_9))):
    aux1[int(dirichlet_9[i]),0] = TSD05
for i in range(0,int(len(dirichlet_10))):
    aux1[int(dirichlet_10[i]),0] = TSD904
for i in range(0,int(len(dirichlet_11))):
    aux1[int(dirichlet_11[i]),0] = TIE01
for i in range(0,int(len(dirichlet_12))):
    aux1[int(dirichlet_12[i]),0] = TIE01
for i in range(0,int(len(dirichlet_13))):
    aux1[int(dirichlet_13[i]),0] = TIE01
#Problema sem condição de contorno de Neumann
newmann=np.zeros((num_nos,1))
#-----BLOCO DA IMPOSIÇÃO DAS CCs/GAUSSo-----
#Zerar a Matriz Global
bc_dirichlet = np.zeros((1,num_nos))
aux2 = np.ones((num_nos,1))
for i in dirichlet: #LHS
    bc_dirichlet += Mglobal[:,int(i)]*aux1[int(i)] #Soma das colunas da matriz
    Mglobal[:,int(i)] = 0 #Zerei a linha
    Mglobal[int(i),:] = 0 #Zerei a coluna
    Mglobal[int(i),int(i)] = 1 # Coloquei 1 no diagonal principal
    bc_dirichlet[0][i]=aux1[i] #Linha que eu inclui
    aux2[int(i)] = 0
bc_dirichlet = bc_dirichlet.T
T = np.zeros((num_nos,1)) #Vetor T
for i in range (0,num_nos):
    T[i]=23.18
t=0.0
dt=1e-1
it=0
RHS = np.zeros((num_nos,1)) #vetor com zeros
erro = np.zeros((num_nos,1))
for t in range(0,maxtime):
    while abs(float(37.29109557-T[580][0]))>10e-6 :
        #vtk = VTKGustavo.InOut(x,y,ien,int(NumeroDeNos),int(NumeroElementos),T)
        #vtk.saveVTK('\home\dalvan\Barragem_transiente_time', '# Main_vtk2',it)
        RHS = np.dot((M/dt),T) #+ np.dot(M,Q)
        RHS = RHS + newmann - bc_dirichlet
        RHS = np.multiply(RHS,aux2)
        RHS = RHS + aux1
        T = np.linalg.solve(Mglobal,RHS)
        t+=dt
        it+=1

```