



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Faculdade de Engenharia

Leandro Marques

Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em Artéria Coronária

Rio de Janeiro

2018

Leandro Marques

Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em Artéria Coronária



Monografia apresentada como
requisito parcial para obtenção do
título de Bacharel em Engenharia
Mecânica da Universidade do Estado
do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Ph.D. Gustavo R. Anjos

Co-orientador: Prof. Ph.D José Pontes

Rio de Janeiro

2018

CATALOGAÇÃO NA FONTE

O48

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC/B

Marques, Leandro

Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em
Artéria Coronária / Leandro Marques – 2018.
xx f.

Orientadores: Gustavo R. Anjos; José Pontes.

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade do Estado do
Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

Texto a ser informado pela biblioteca.

CDU 532 (a ser informado pela biblioteca)

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta
dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Leandro Marques

**Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em Artéria
Coronária**

Monografia apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovado em: xx de MES POR EXTENSO de 2018

Banca Examinadora:

Prof. Ph.D. Gustavo Rabello dos Anjos (Orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. Ph.D. José da Rocha Miranda Pontes (Co-orientador)
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. D.Sc. Rachel Lucena
Faculdade de Engenharia - UERJ

Prof. D.Sc. Fábio Pereira dos Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2018

RESUMO

Marques, Leandro *Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em Artéria Coronária*. xxf. Projeto Final (Bacharelado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2018.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma estrutura computacional para simular o escoamento em uma artéria coronária em coordenadas cartesianas. O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi usado para resolver as equações de governo do escoamento sanguíneo na artéria coronária com aterosclerose e stent farmacológico implantado. O sangue foi modelado como um fluido monofásico, incompressível e newtoniano. A equação de Navier-Stokes foi apresentada segundo a formulação corrente-vorticidade com o transporte de espécie química. O esquema Taylor-Galerkin foi usado a fim de reduzir as oscilações espúrias que podem ser observadas quando o termo convectivo é predominante.

Palavras-chave: Formulação Corrente-Vorticidade; Método dos Elementos Finitos; Esquema Taylor-Galerkin; Stent Farmacológico; Aterosclerose.

ABSTRACT

Marques, Leandro *Finite Element Numerical Simulation of Flow in Coronary Artery*. xxf. Undergraduate thesis (Bachelor of Mechanical Engineering) - Engineering Departament, State University of Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, 2018.

The present work aims at developing a computational framework to simulate coronary artery flows in cartesian coordinates. The Finite Element Method (FEM) was used to solve the governing equations of the blood flow in coronary artery with atherosclerosis and drug-eluting stent placed. The blood was modeled as single-phase, incompressible and newtonian fluid. The Navier-Stokes equation was shown according to the stream-vorticity formulation with chemical species transport equation. The Taylor-Galerkin scheme were used to decrease spurious oscillations as seen when the convective term is predominant.

Keywords: Stream-Vorticity Formulation; Finite Element Method; Taylor-Galerkin Scheme; Drug-Eluting Stent; Atherosclerosis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Comparativo dos procedimentos PTCA: (a) balão inflável e (b) stent.	13
Figura 2	Diversos modelos de stent farmacológico [20].....	15
Figura 3	Comparativo das oscilações espúrias dos esquemas [29]: (a) Galerkin, (b) SUPG e (c) semi-Lagrangeano.....	17
Figura 4	Variação da vorticidade em um passo de tempo	35
Figura 5	Elemento triangular linear	52
Figura 6	Elemento triangular quadrático	52
Figura 7	Elemento triangular cúbico	53
Figura 8	Diagrama de Classes Simplificado.....	56
Figura 9	Arestas vizinhas de um nó	64
Figura 10	Algoritmo de solução da formulação corrente-vorticidade com transporte de espécie química	65
Figura 11	Escoamento de Couette	71
Figura 12	Evolução do perfil de velocidade no tempo para $Re = 100$ e a comparação da solução numérica com a solução analítica.	72
Figura 13	Escoamento de Poiseuille.....	73
Figura 14	Evolução do perfil de velocidade no tempo para $Re = 100$ e a comparação da solução numérica com a solução analítica.	74
Figura 15	Escoamento de Poiseuille em Meio Domínio	75
Figura 16	Evolução do perfil de velocidade no tempo para $Re = 100$ e a comparação da solução numérica com a solução analítica.	76
Figura 17	Escoamento em uma Cavidade com tampa móvel	77
Figura 18	Perfil de u na linha central da cavidade ($x = 0.5$) com diferentes Reynolds: (a) 10 (b) 100 (c) 400 (d) 1000.	78
Figura 19	Perfil de v na linha central da cavidade ($y = 0.5$) com diferentes Reynolds: (a) 10 (b) 100 (c) 400 (d) 1000.	79
Figura 20	Os contornos da função de corrente para os Reynolds: (a) 10 (b) 100 (c) 400 (d) 1000.	80
Figura 21	Transporte de um escalar num Escoamento Puramente Convectivo	81

Figura 22	Comparação do perfil de c para os esquemas Galerkin e Taylor-Galerkin em diferentes posições do eixo de rotação: (a) ponto inicial, (b) 1/4 da rotação, (c) 1/2 da rotação e (d) 3/4 da rotação.....	82
Figura 23	Oscilações espúrias para o esquema Galerkin em diferentes posições do eixo de rotação: (a) ponto inicial, (b) 1/4 da rotação, (c) 1/2 da rotação e (d) 3/4 da rotação.	83
Figura 24	Oscilações espúrias para o esquema Taylor-Galerkin em diferentes posições do eixo de rotação: (a) ponto inicial, (b) 1/4 da rotação, (c) 1/2 da rotação e (d) 3/4 da rotação.	84
Figura 25	Geometria não dimensional para escoamento sanguíneo em artéria coronária. O raio é $R = 1$ e o comprimento do canal é $L = 10R$. (a) Canal Curvado (b) Canal Curvado com Stent (c) Canal Real e (d) Canal Real com Stent.	85
Figura 26	Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Curvado.	87
Figura 27	Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Curvado.	88
Figura 28	Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Curvado com Stent Farmacológico.	89
Figura 29	Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Curvado com Stent Farmacológico.....	90
Figura 30	Canal Curvado com Stent Farmacológico cujo $Sc = 1$	91
Figura 31	Canal Curvado com Stent Farmacológico cujo $Sc = 10$	91
Figura 32	Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Real.	92
Figura 33	Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Real... ..	93
Figura 34	Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Real com Stent Farmacológico.	94
Figura 35	Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Real com Stent Farmacológico.	95
Figura 36	Canal Real com Stent Farmacológico cujo $Sc = 1$	96
Figura 37	Canal Real com Stent Farmacológico cujo $Sc = 10$	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Tempo de importação para diversas malhas triangulares não estruturadas ...	57
Tabela 2	Tempo de montagem das matrizes globais para diversas malhas triangulares não estruturadas	59
Tabela 3	Tempo processamento para as condições de contorno para diversas malhas triangulares não estruturadas	62

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	10
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
1.1	Introdução	12
1.2	Stent Farmacológico	12
1.3	Método dos Elementos Finitos - Equação Convecção-Difusão	15
2	EQUAÇÕES DE GOVERNO	19
2.1	Introdução	19
2.2	Conservação de Massa	19
2.3	Conservação da Quantidade de Movimento	21
2.4	Conservação de Espécie Química	25
2.5	Adimensionalização	27
2.6	Formulação Corrente-Vorticidade	30
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	34
3.1	Introdução	34
3.2	Discretização no Tempo	34
3.3	Formulação Forte.....	38
3.4	Formulação Fraca	39
3.5	Discretização no Espaço.....	44
3.6	Elemento da Malha.....	51
4	CÓDIGO NUMÉRICO	56
4.1	Introdução	56
4.2	Importação da Malha	57
4.3	Montagem das Matrizes Globais	58
4.4	Aplicação das Condições de Contorno	59
4.5	Algoritmo de Solução	65
5	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NUMÉRICO	70
5.1	Introdução	70

5.2	Escoamento de Couette	70
5.3	Escoamento de Poiseuille	73
5.4	Escoamento de Poiseuille em Meio Domínio	75
5.5	Escoamento em uma Cavidade com Tampa Móvel	77
5.6	Escoamento Puramente Convectivo	81
6	RESULTADOS	85
6.1	Introdução	85
6.2	Canal Curvado	87
6.3	Canal Curvado com Stent Farmacológico	89
6.4	Canal Real.....	92
6.5	Canal Real com Stent Farmacológico	94
	CONCLUSÃO	97
	REFERÊNCIA.....	99
	APÊNDICE - PUBLICAÇÕES.....	103

INTRODUÇÃO

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), mais pessoas morrem anualmente devido às doenças cardiovasculares (DCV) do que qualquer outra causa no mundo a cada ano [1]. Estima-se que 17,7 milhões de pessoas morreram por DCV em 2015, representando 31% de todas as mortes no mundo. Aproximadamente 40% das mortes por DCV ocorreram devido às doenças na artéria coronária (DAC). A principal causa da DAC é a aterosclerose que consiste no acúmulo de placas de gordura no interior da parede da artéria ocasionando uma diminuição do diâmetro do lúmen. A aterosclerose pode ser prevenida com uma mudança de hábitos nocivos tais como: o uso de tabaco, o uso de álcool, falta de atividade física e dietas não saudáveis. Para uma abordagem corretiva, porém, dois tratamentos podem ser realizados: o *bypass coronário* (também conhecido como ponte de safena) e a *angioplastia coronária transluminal percutânea* (PTCA). O PTCA é um procedimento minimamente invasivo onde um tubo aramado, chamado *stents*, é colocado. Os principais objetivos deste trabalho são o desenvolvimento de um código em Elementos Finitos para a formulação corrente-vorticidade com o transporte de espécie química e conhecer a dinâmica do escoamento sanguíneo numa artéria coronária com aterosclerose e com *stents farmacológico* implantado.

As equações que governam a dinâmica do escoamento sanguíneo numa artéria coronária foram desenvolvidas segundo a hipótese do meio contínuo. Dessa forma, os princípios de conservação de massa, de quantidade de movimento linear e de espécie química foram utilizados. O sangue foi considerado como um fluido incompressível, newtoniano e monofásico, como também o coeficiente difusivo foi aproximado como constante. A equação de Navier-Stokes é apresentada segundo a formulação corrente-vorticidade com a equação de transporte de espécie química sem geração interna.

As equações de Navier-Stokes e de transporte de espécie química foram discretizadas sobre uma malha triangular não estruturada através do Método dos Elementos Finitos. Devido o desacoplamento entre o campo de velocidade e de pressão possibilitado pela formulação corrente-vorticidade, o elemento *triangular linear* foi utilizado. As equações foram discretizadas no tempo utilizando a expansão da série de Taylor mantendo os termos de segunda ordem com o intuito de reduzir as oscilações espúrias que são características das equações do tipo convecção-difusão. Em seguida, a formulação de Galerkin foi utilizada para

discretizarmos as equações no espaço. Dessa forma, o esquema *Taylor-Galerkin* foi utilizado como proposto por Donea [2] e Zienkiewicz [3].

O desenvolvimento computacional foi feito em linguagem Python utilizando o paradigma de orientação a objetos e no Capítulo 5 é apresentado os principais *scripts* do processo de simulação além do algoritmo de solução. A validação do código número foi realizada comparando a solução numérica com a solução analítica em três escoamentos: o *Escoamento de Couette*, o *Escoamento de Poiseuille* e o *Escoamento de Poiseuille em meio domínio*. Também foi feito a comparação da solução do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante (*lid-driven cavity flow*) com àquelas apresentadas por Ghia [4] e Marchi [5]. Em seguida, é apresentado a comparação dos esquemas Galerkin e Taylor-Galerkin quando as oscilações espúrias estão presente em um escoamento puramente convectivo.

A hidrodinâmica do escoamento sanguíneo e o transporte de espécie química na artéria coronária foi simulada em 4 diferentes tipos de geometrias como sugerido por Wang [6], porém com algumas modificações para as coordenadas cartesianas. Esses diferentes tipos de geometrias consistem: (1) numa artéria coronária com aterosclerose com 40% de obstrução do lúmen; (2) numa artéria coronária com aterosclerose e com stents farmacológico implantado; (3) numa artéria coronária real com aterosclerose com 40% de obstrução do lúmen; (4) numa artéria coronária real com aterosclerose e com stents farmacológico implantado. A visualização da simulação numérica foi realizada utilizando o software livre *Paraview* proposto por Henderson [7].

Este trabalho foi organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: Introdução
- Capítulo 2: Revisão Bibliográfica
- Capítulo 3: Equações de Governo
- Capítulo 4: Método dos Elementos Finitos
- Capítulo 5: Código Numérico
- Capítulo 6: Validação do Código Numérico
- Capítulo 7: Resultados
- Capítulo 8: Conclusão

1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

1.1 Introdução

Neste capítulo, a revisão bibliográfica é apresentada e discutida, abordando o problema e a metodologia utilizada neste trabalho, tais como os Stents Farmacológicos e o Método os Elementos Finitos aplicado às equações do tipo convecção-difusão.

1.2 Stent Farmacológico

Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS) [1], as doenças cardiovasculares são as principais causas de óbitos no mundo. Cerca de 40% dessas mortes são ocasionadas por doenças na artéria coronária (DAC).

Em 1964, Dotter [8] introduz uma nova técnica para o tratamento da artéria femoral obstruída devido a aterosclerose. Esta técnica é conhecida como *angioplastia transluminal percutânea* e consiste num procedimento simples e minimamente invasivo, possibilitando a execução por qualquer médico familiarizado com a cateterização vascular. Tal procedimento se apresentou aplicável a outras artérias, inclusive a artéria coronária.

Em 1979, Gruntzig [9] realiza a técnica transluminal percutânea na artéria coronária utilizando um cateter com balão inflável com o intuito de dilatar o local com esterase. O procedimento foi realizado em 50 pacientes durante 18 meses e apresentou-se resultados satisfatórios principalmente com pacientes com apenas uma única artéria com esterase. Tal procedimento fica conhecido como *Angioplastia Coronária Transluminal Percutânea* (PTCA).

Embora o PTCA utilizando um balão inflável tenha apresentado resultados satisfatórios, com o passar o tempo a artéria apresentava reestenose. Em 1987, Sigwart [10] apresenta o resultado da implantação de uma prótese constituída de uma malha de aço inoxidável auto-expansível nas artérias femoral e coronárias de 25 pacientes que apresentavam casos de reestenose. Embora a reestenose continuar presente, a prótese se mostrou uma maneira interessante para a resolução da reestenose. Esta prótese recebeu o nome de *stent*.

Em 1994, Serruys [11] apresenta uma comparação entre os procedimentos PTCA utilizando um balão inflável e a implantação do *stent*. Foram analisados 520 pacientes, onde 262 pacientes com *stents* implantados e 258 pacientes somente com o procedimento do balão

inflável. Os resultados clínicos e angiográficos se apresentaram melhores para os pacientes que tiveram a implantação do stent àqueles que fizeram o procedimento apenas utilizando o balão inflável. Dessa forma, o procedimento PTCA com a implantação do stent foi confirmado como uma solução mais eficaz que o PTCA utilizando apenas o balão inflável. Porém, um problema persistia: a reestenose. Ao decorrer da década de 20, os pesquisadores buscavam resolver este problema.

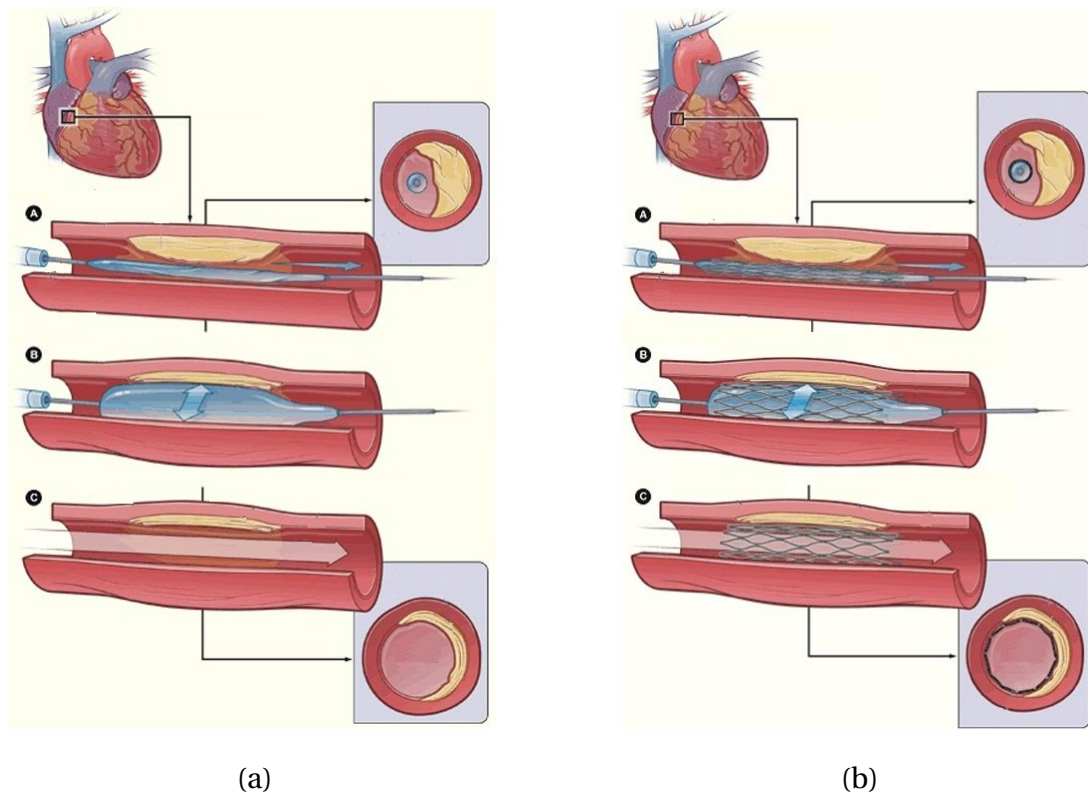


Figura 1: Comparativo dos procedimentos PTCA: (a) balão inflável e (b) stent.

Em 2001, Hwang [12] apresenta uma simulação da implantação de um stent revestido com uma droga em uma artéria coronária. A simulação apresentou a íntima relação entre a distribuição da droga e o *número de Peclet* além da importância em desenvolver geometrias para os stents que potencializem a difusão da substância química. Tal procedimento se mostrou uma opção promissora para o tratamento da aterosclerose e da reestenose. Este novo tipo de stent ficaria conhecido como *stent farmacológico*.

Em 2014, Bozsak [13] propõe um modelo computacional de transporte das drogas *paclitaxel* e *sirolimus* na parede da artéria. Tais drogas são frequentemente usadas em stents farmacológicos. O modelo leva em conta a estrutura em multicamadas da parede da artéria e essas camadas foram modeladas como meios porosos. Desta forma, a lei de *Darcy* foi utilizada

para simular o escoamento dentro das camadas da artéria. A simulação apresentou que a dinâmica do transporte na parede da artéria para as drogas analisadas possui diferentes valores. Assim a escolha do tipo de droga utilizada devido ao transporte na parede da artéria torna-se um parâmetro crucial na criação do stent farmacológico.

Recentemente, Lucena [14] apresenta a simulação do transporte da droga *sirolimus* na parede de uma artéria modelada como um meio poroso e anisotrópico. Foi considerado a dissolução no revestimento polimérico do stent além do transporte na parede da artéria em um domínio axissimétrico. As equações de governo foram aproximadas segundo o Método dos Elementos Finitos. O trabalho apresentou que o tempo de evolução do processo de transporte pode ser eficientemente controlado pelo coeficiente de difusão do polímero. É estimado que cerca de 47% da droga é difundida no lúmen e é perdida na corrente sanguínea. A distribuição espacial da droga, porém, é grandemente influenciada pelo escoamento sanguíneo e as propriedades da parede da artéria. Assim, tais resultados são suscetíveis às condições de saúde do paciente.

No mesmo ano, Wang [6] apresenta a simulação do escoamento sanguíneo em uma artéria coronária com aterosclerose e stent farmacológico implantado. O sangue é aproximado como um fluido newtoniano e monofásico e as equações de governo segundo as variáveis primitivas foram aproximadas segundo o método dos Elementos Finitos. Foram apresentadas diversas geometrias axissimétricas inclusive uma artéria coronária real. Tais geometrias foram aproveitadas para este atual trabalho, porém modificadas para uma abordagem bidimensional. As simulações apresentaram que o modelo simplificado da artéria com aterosclerose proposto produzia resultados semelhantes de velocidade, pressão e concentração quando comparados com a artéria real.

Ao longo da década passada e atual, diversos stents farmacológico foram desenvolvidos tais como: *Ravel* [15], *Taxus I e Taxus II* [16] [17], *C-Sirius* [18], *Smart* [19] e outros mais recentes como apresentado na Figura 2. Atualmente, uma nova geração de stents tem sido desenvolvida em que toda a estrutura é absorvida. Tal geração é conhecida como *stent bioabsorvível*, porém não é assunto deste trabalho o uso desta tecnologia.

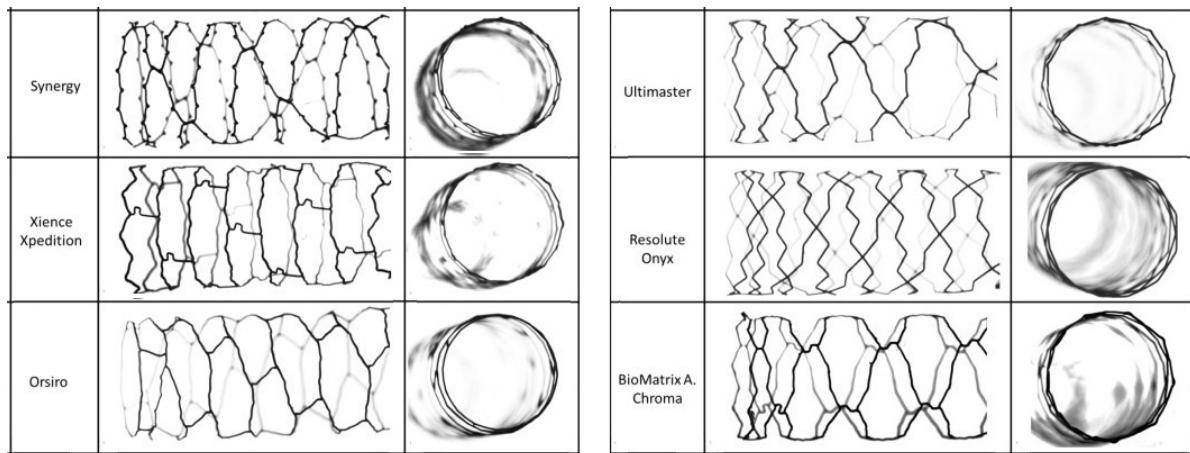


Figura 2: Diversos modelos de stent farmacológico [20].

1.3 Método dos Elementos Finitos - Equação Convecção-Difusão

A base matemática para o Método dos Elementos Finitos tem início em 1909 com Ritz em que um problema contínuo é substituído por um problema discreto com número finito de graus de liberdade onde as variáveis do problema eram aproximadas pelo produto entre as constantes a serem determinadas e as funções bases escolhidas de modo a garantir a precisão do resultado. Tal procedimento fica conhecido como *formulação variacional*. Anos mais tarde, Galerkin utiliza o Método do Resíduo Ponderado na determinação das constantes da formulação variacional onde as mesmas funções bases foram utilizadas nas funções peso. Este procedimento fica conhecido como *Formulação de Galerkin* e é largamente utilizado até hoje.

Durante a década de 50, Courant [21] aplica a formulação variacional em um domínio discretizado por elementos triangulares. Em 1965, Zienkiewicz [32] apresenta que o Método do Resíduo Ponderado possui uma boa aproximação da solução e o Método dos Elementos Finitos foi formalizado para resolver diversos problemas. A abordagem matemática proposta é frequentemente utilizada nos dias atuais.

O Método dos Elementos Finitos se tornou uma ferramenta bastante eficaz na solução de diversos problemas. Seu uso foi largamente utilizado em problemas da mecânica dos sólidos. Na mecânica dos fluidos, porém, seu uso só se tornou possível mais adiante devido às oscilações espúrias que surgiam quando o termo convectivo era superior ao termo difusivo. Tais oscilações estão presentes não apenas no Método dos Elementos Finitos mas foram

observadas também no Método das Diferenças Finitas por Spalding [22].

Em 1976, Christie [23] modifica as funções peso para funções assimétricas ou quadráticas para contornar as oscilações espúrias em problemas unidimensionais do tipo difusão-convecção. Tais modificações produziam um efeito *upwind* na solução. Este efeito já havia se mostrado eficaz no Método das Diferenças Finitas. Este procedimento ficou conhecido como *Formulação Petrov-Galerkin*. No ano seguinte, Heinrich [24] generalizou o esquema para um problema bidimensional. As matrizes globais, porém, passaram a ser assimétricas diferentemente daquelas apresentadas no esquema Galerkin.

Em 1982, Brooks [25] propõe uma nova formulação que consiste em modificar as funções peso de modo que o operador de difusão atue apenas na direção do escoamento. Este procedimento surge com o intuito de eliminar o excesso de difusão perpendicular ao escoamento que o esquema Petrov-Galerkin apresentava em alguns casos. A formulação não requer o uso de funções peso de alta ordem e se apresentou eficiente na eliminação da difusão perpendicular. A formulação recebeu o nome *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG).

No mesmo ano, Pironneau [26] apresenta o Método das Curvas Características aplicado ao Método dos Elementos Finitos na resolução das equações convecção-difusão transiente e Navier-Stokes. Dessa forma os autores foram capazes de derivar esquemas conservativos do tipo *upwind* com precisão de primeira e segunda ordem que não explodia quando o termo convectivo era superior ao termo difusivo. Como as matrizes são simétricas, esse esquema se apresentou vantajoso na resolução de sistemas lineares em comparação com outros esquemas *upwind*. A implementação numérica, porém, requer uma integração numérica na montagem dos vetores do lado direito da equação. Este esquema dá início a diversos trabalhos e fica conhecido mais a frente como *Galerkin Característico*.

Em 1984, Donea [2] apresenta uma alternativa para a resolução de problemas convecção-difusão multidimensionais e transientes. Tal alternativa é conhecida como esquema *Taylor-Galerkin*. O esquema consiste em utilizar os termos de alta ordem da expansão de Taylor para atuar na redução das oscilações espúrias. Diferente dos esquemas *upwind*, o esquema Taylor-Galerkin não há a necessidade de usar funções peso modificadas. O esquema é comparado com as formulações de Galerkin e Petrov-Galerkin e apresentou alta precisão e com baixa difusão numérica. Embora os procedimentos de discretização dos esquemas Taylor-Galerkin

e Galerkin Característico sejam distintos, o sistema de equações é idêntico para a equação convecção-difusão onde a variável é um escalar como mencionado por Lohner [27].

Diversos pesquisadores têm analisado a estabilidade e convergência desses esquemas e até mesmo a implementação de esquemas mais eficientes tem surgido como a simulação numérica apresentada por Anjos em 2006 [28], em que o esquema *semi-Lagrangeano* é implementado na modelagem de escoamentos acoplados ao transporte de espécie química numa abordagem em Elementos Finitos. Este esquema era utilizado largamente na meteorologia e consiste em calcular a derivada substancial ao longo da trajetória característica. A discretização no tempo é feita por diferenças regressivas de primeira ordem enquanto a discretização no espaço é realizada segundo o esquema de Galerkin. Os resultados mostraram que o esquema semi-Lagrangeano é estável, não apresentando oscilações espúrias e difusão numérica excessiva mesmo para passos de tempos longos e para elevados números de Reynolds e Schmidt.

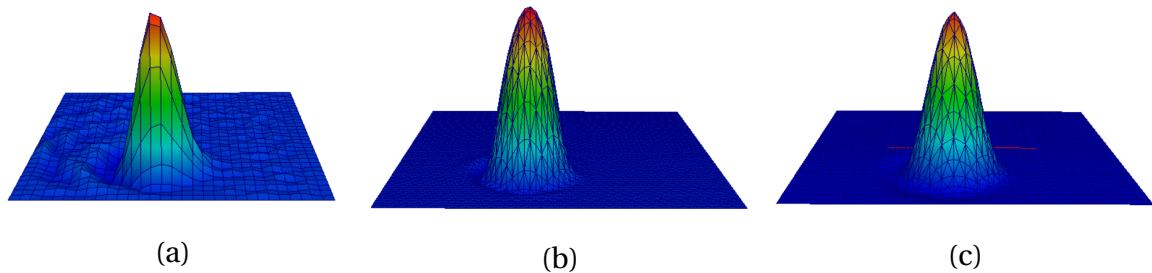


Figura 3: Comparativo das oscilações espúrias dos esquemas [29]: (a) Galerkin, (b) SUPG e (c) semi-Lagrangeano.

A escolha do esquema a ser usado está relacionado às suas vantagens e desvantagens quando comparados aos outros esquemas. Em comparação aos esquemas Petrov-Galerkin e SUPG, os esquemas Taylor-Galerkin, Galerkin Característico e semi-Lagrangeano possuem a vantagem de gerar matrizes simétricas facilitando a implementação computacional. Enquanto isso, embora a eficácia do esquema semi-Lagrangeano seja bem conhecida, o mesmo necessita de um algoritmo eficiente de busca dos nós vizinhos para realizar a interpolação. Porém nos esquemas Taylor-Galerkin e Galerkin Característico essa necessidade não existe, assim a implementação computacional se torna mais simples. Além disso, o sistema de equações lineares gerados pelo esquema Taylor-Galerkin é semelhante àquele gerado pelo esquema Galerkin Característico quando as variáveis são escalares. Dessa forma, a escolha entre esses dois esquemas é de cunho pessoal já que produzem resultados semelhantes

embora o processo de discretização seja distinto.

Todos os esquemas apresentados possuem resultados bastante satisfatórios e são bem conhecidos na literatura. Esses esquemas, portanto, possibilitaram a resolução dos problemas convectivos utilizando uma abordagem em Elementos Finitos. Para as simulações apresentadas neste trabalho, o esquema Taylor-Galerkin foi escolhido.

2 EQUAÇÕES DE GOVERNO

2.1 Introdução

Neste trabalho, o fluido é considerado como um meio contínuo. Isso significa que dado um elemento de fluido infinitesimal, o mesmo é suficientemente grande para que não haja a presença de espaços vazios em seu meio. Dessa forma, um escoamento pode ser modelado segundo os princípios de conservação universal tais como:

- Conservação da Massa
- Conservação da Quantidade de Movimento Linear
- Conservação de Espécie Química

Estes são os princípios que governam o escoamento proposto neste trabalho. Na primeira seção, apresentaremos o princípio da conservação da massa e a *equação da continuidade* para um fluido incompressível. Na segunda seção, a *equação de Navier-Stokes* para um fluido incompressível é apresentada segundo o princípio de conservação da quantidade de movimento linear para um elemento de fluido. Já na terceira seção, apresentaremos a *equação de Transporte de Espécie Química*. Em seguida, as equações de governo são adimensionalizadas na quarta seção e a equação de Navier-Stokes é apresentada segundo a *formulação corrente-vorticidade* na quinta seção.

2.2 Conservação de Massa

Conforme apresentado por Pontes [30], o princípio de conservação da massa sem geração estabelece que:

$$\left[\begin{array}{c} \text{A taxa de acumu-} \\ \text{lação de massa} \\ \text{dentro do volume} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \text{O fluxo líquido} \\ \text{de massa que cruza} \\ \text{a fronteira} \end{array} \right]$$

Matematicamente, a taxa de acumulação de massa dentro do volume pode ser representada como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm \quad (2.1)$$

onde a massa infinitesimal dm é definida como $dm = \rho dV$. Substituindo na Eq. 2.1 e considerando que o volume de controle não varia com o tempo, temos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.2)$$

O fluxo líquido de massa que cruza a fronteira do volume pode ser representado matematicamente como:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.3)$$

Dessa forma, segundo o princípio de conservação da massa:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.4)$$

Aplicando o *teorema de Gauss* na integral de área:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (2.5)$$

Isto é:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (2.6)$$

Considerando o fato de $dV \neq 0$, a Eq. 2.6 pode ser expressa como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.7)$$

Onde ρ é a massa específica, $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade cujas componentes são $\mathbf{v} = [u, v]$, ∇ é

um operador diferencial cujas componentes são $\nabla = [\partial/\partial x, \partial/\partial y]$, x e y são as componentes espaciais e t é a componente temporal. A Eq. 2.7 é conhecida como *Equação da Continuidade*. Desenvolvendo a equação, temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.8)$$

Considerando a hipótese de incompressibilidade do fluido, a massa específica não depende do tempo e da posição. Dessa forma, as derivadas $\partial \rho / \partial t$ e $\nabla \rho$ são iguais a zero. Assim, a conservação de massa é reduzida a:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.9)$$

Isto é:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.10)$$

Esta é a equação da continuidade para um fluido incompressível.

2.3 Conservação da Quantidade de Movimento

O mesmo conceito da conservação de massa é aplicado para a conservação da quantidade de movimento linear. Dessa forma, o princípio de conservação da quantidade de movimento linear estabelece que:

$$\left[\begin{array}{c} \text{A taxa de acumulação} \\ \text{da quantidade de} \\ \text{movimento linear} \\ \text{dentro do volume} \\ \text{de controle} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \text{O fluxo líquido} \\ \text{da quantidade} \\ \text{de movimento} \\ \text{linear que} \\ \text{cruza a fronteira} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{A resultante das} \\ \text{forças aplicadas} \\ \text{à superfície de} \\ \text{controle e as} \\ \text{forças de volume} \end{array} \right]$$

Matematicamente, a taxa de acumulação da quantidade de movimento linear dentro do volume de controle pode ser representada como:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV \quad (2.11)$$

O fluxo líquido da quantidade de movimento linear que cruza a fronteira do volume pode ser representado matematicamente como:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.12)$$

A resultante das forças é dividida nas forças aplicadas à superfície de controle e nas forças de volume. A resultante das forças aplicadas à superfície de controle pode ser representada por:

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.13)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões. A resultante das forças de volume é representada por:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.14)$$

onde $\mathbf{g}$ é o vetor da aceleração da gravidade. Dessa forma, segundo o princípio de conservação da quantidade de movimento linear:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.15)$$

Aplicando o *teorema de Gauss* nas integrais de área:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.16)$$

Isto é:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \right] dV = 0 \quad (2.17)$$

Considerando o fato de $dV \neq 0$, a Eq. 2.18 pode ser expressa como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} = 0 \quad (2.18)$$

Isto é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.19)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação, temos:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] \quad (2.20)$$

Vimos que o último termo da equação acima é nulo pois trata-se da equação da continuidade 2.7. Logo, a equação de conservação de momento pode ser reescrita como:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.21)$$

O tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser decomposto na soma de outros dois tensores:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.22)$$

Onde, p é o campo de pressão, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade e $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor desviatório. Substituindo

na Eq. 2.21 temos:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot [-p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g} \quad (2.23)$$

Isto é:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.24)$$

O tensor desviatório $\boldsymbol{\tau}$ depende da taxa do tensor deformação e podemos defini-lo relacionando as propriedades físicas do meio. Considerando um fluido homogêneo, isotrópico e o tensor desviatório como sendo uma função contínua do gradiente de velocidade, temos:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2.25)$$

Onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido, λ é conhecido como o segundo coeficiente de viscosidade e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Substituindo na Eq. 2.24, temos:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (2.26)$$

Isto é:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (2.27)$$

Considerando que viscosidade dinâmica μ não depende da posição, temos:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu [\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^T] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (2.28)$$

Isto é:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu [\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (2.29)$$

Segundo a Eq. 2.10, temos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2.30)$$

Onde ν é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido. A Eq. 2.30 é conhecida como *Equação de Navier-Stokes* e é válida para um fluido homogêneo, isotrópico, incompressível e com viscosidade que não varie em função do espaço.

2.4 Conservação de Espécie Química

O princípio de conservação de espécie química estabelece que:

$$\left[\begin{array}{c} \text{A taxa de acumulação} \\ \text{da quantidade de} \\ \text{espécie química} \\ \text{dentro do volume} \\ \text{de controle} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \text{O fluxo líquido} \\ \text{da quantidade} \\ \text{de espécie} \\ \text{química que} \\ \text{cruza a fronteira} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{A resultante da} \\ \text{taxa de geração} \\ \text{de espécie quí-} \\ \text{mica no volume} \end{array} \right]$$

Matematicamente, a taxa de acumulação da quantidade de espécie química dentro do volume de controle pode ser representada como:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV \quad (2.31)$$

O fluxo líquido da quantidade de espécie química que cruza a fronteira do volume pode ser decomposto na soma de dois fluxos:

$$\oint_S c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \oint_S D \nabla c \cdot \mathbf{n} dA \quad (2.32)$$

Onde D é o coeficiente de difusão de espécie química. A resultante da taxa de geração de espécie química no volume pode ser representada por:

$$\int_V \dot{R} dV \quad (2.33)$$

Dessa forma, segundo o princípio de conservação de espécie química:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \oint_S c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_S D \nabla c \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \dot{R} dV \quad (2.34)$$

Aplicando o *teorema de Gauss* nas integrais de área:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (c \mathbf{v}) dV + \int_V \nabla \cdot (D \nabla c) dV + \int_V \dot{R} dV \quad (2.35)$$

Isto é:

$$\int_V \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}) - \nabla \cdot (D \nabla c) - \dot{R} \right] dV = 0 \quad (2.36)$$

Considerando o fato de $dV \neq 0$, a Eq. 2.37 pode ser expressa como:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}) - \nabla \cdot (D \nabla c) - \dot{R} = 0 \quad (2.37)$$

Isto é:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}) = \nabla \cdot (D \nabla c) + \dot{R} \quad (2.38)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da equação, temos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c + c \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (D \nabla c) + \dot{R} \quad (2.39)$$

Vimos que o último termo do lado esquerdo é nulo devido a hipótese de incompressibilidade do fluido 2.10, logo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D \nabla c) + \dot{R} \quad (2.40)$$

Considerando que o coeficiente de difusão é constante e sem geração de espécie química, a equação de conservação de espécie química pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D \nabla^2 c \quad (2.41)$$

A Eq. 2.41 é conhecida como *Equação de Transporte de Espécie Química* para um fluido incompressível, com coeficiente de difusão constante e sem geração de espécie química.

2.5 Adimensionalização

Nesta seção a forma adimensional das equações da continuidade, da Navier-Stokes e do transporte de espécie química é apresentada. A adimensionalização ajuda a entender quais os termos da equação influencia mais durante uma determinada simulação além de possibilitar experimentos com modelos em escala reduzida. Os seguintes parâmetros foram usados na adimensionalização:

$$\begin{aligned} p &= \rho_0 U^2 p^* & c &= (c_s - c_0) c^* + c_0 & v &= v_0 v^* & D &= D_0 D^* & x &= L x^* \\ \mathbf{v} &= U \mathbf{v}^* & \mathbf{g} &= g_0 \mathbf{g}^* & \rho &= \rho_0 \rho^* & \nabla &= \frac{1}{L} \nabla^* & t &= \frac{L}{U} t^* \end{aligned}$$

Onde o asterisco identifica as variáveis adimensionais. Substituindo os parâmetros acima na

Eq. 2.10, temos:

$$\frac{U}{L} \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (2.42)$$

Multiplicando ambos os lados por U/L :

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (2.43)$$

Um procedimento semelhante é realizado na Eq. 2.30, isto é:

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu_0 U}{L^2} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + g_0 \mathbf{g}^* \quad (2.44)$$

Multiplicando ambos os lados por L/U^2 :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu_0}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \quad (2.45)$$

Como os valores adimensionais de ρ^* e ν^* são iguais a unidade, a Eq. 2.45 se transforma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\nu_0}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \quad (2.46)$$

Para a Eq. 2.41 um procedimento semelhante é realizado:

$$(c_s - c_0) \frac{U}{L} \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + (c_s - c_0) \frac{U}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = (c_s - c_0) \frac{D_0}{L^2} \nabla^{*2} c^* \quad (2.47)$$

Multiplicando ambos os lados por $L/U(c_s - c_0)$, temos:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{D_0}{UL} D^* \nabla^{*2} c^* \quad (2.48)$$

Como o valor adimensional de D^* é igual a unidade, a Eq. 2.48 se transforma:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{D_0}{UL} \nabla^{*2} c^* \quad (2.49)$$

Importantes grupos adimensionais são encontrados nas Eqs. 2.43, 2.46 e 2.49. A descrição destes grupos são apresentados abaixo:

- **Número de Reynolds (Re):** Relação entre as forças de inércia e as forças viscosas que agem sobre uma partícula de fluido em movimento. É representado por:

$$Re = \frac{UL}{\nu_0} \quad (2.50)$$

onde, ν_0 , U e L são os valores da viscosidade cinemática do fluido, velocidade de referência e comprimento característico do problema respectivamente. O número de Reynolds é frequentemente utilizado para definir o escoamento, onde $Re < Re_{critico}$ é definido como laminar e $Re > Re_{critico}$ como turbulento. Segundo Fox [31], o $Re_{critico}$ para escoamentos em tubos é $Re_{critico} \approx 2300$.

- **Número de Froude (Fr):** Relação entre as forças de inércia e as forças gravitacionais. É representado por:

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g_0 L}} \quad (2.51)$$

onde, g_0 é a aceleração da gravidade referencial.

- **Número de Péclet de massa (Pe_m):** Relação entre a dimensão da camada característica do problema e a espessura da camada limite de concentração de espécie química. Também pode ser interpretado como a relação entre a concentração transferida por

convecção e por difusão. É representado por:

$$Pe_m = \frac{D_0}{UL} \quad (2.52)$$

onde, D_0 é o coeficiente de difusão da espécie química. O número Pe_m é frequentemente apresentado pelo produto de outros dois grupos tais como o *número de Reynolds* e o *número de Schmidt*.

- **Número de Schmidt (Sc):** Relação entre a espessura da camada limite hidrodinâmica e a difusão de espécie química. É representado por:

$$Sc = \frac{\nu_0}{D_0} \quad (2.53)$$

Substituindo estes grupos adimensionais nas Eqs. 2.43, 2.46 e 2.49, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (2.56)$$

As Eqs. 2.54, 2.55 e 2.56 são a forma adimensional das equações da continuidade, Navier-Stokes e transporte de espécie química para um fluido newtoniano e incompressível.

2.6 Formulação Corrente-Vorticidade

A equação de Navier-Stokes possui um forte acoplamento entre o campo de pressão e o campo das velocidades. Este acoplamento dificulta a implementação desta equação computacionalmente. O desacoplamento da pressão e da velocidade é possível ao utilizar

a *formulação corrente-vorticidade*. Para isso, substituiremos na equação 2.55 a seguinte identidade vetorial:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} \quad (2.57)$$

Logo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (2.58)$$

Operando o rotacional em ambos os lados na equação acima:

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}] = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \times \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g} \quad (2.59)$$

Isto é:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] + \nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}] = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g} \quad (2.60)$$

Os termos que contêm o operador gradiente se anulam, já que o rotacional do gradiente de um escalar é zero. O último termo também se anula pois as derivadas de uma constante, como no caso de $\mathbf{g}$, são iguais a zero. Dessa forma, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}] = \frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] \quad (2.61)$$

O vetor $\nabla \times \mathbf{v}$ é conhecido como *vorticidade* (w). Assim a equação pode ser representada como:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{v} \times w] = \frac{1}{Re} \nabla^2 w \quad (2.62)$$

O segundo termo do lado esquerdo da Eq. 2.62 pode ser substituído pela seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (2.63)$$

Sendo assim a Eq. 2.62 se transforma:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{w} \quad (2.64)$$

Para escoamentos bidimensionais, como no caso deste trabalho, a vorticidade é perpendicular ao vetor velocidade. Sendo assim, o produto $\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v}$ se anulará como apresentado por Pontes [30]. Portanto:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{w} \quad (2.65)$$

A Eq. 2.65 é conhecida como *equação da vorticidade* para escoamentos bidimensionais de um fluido newtoniano e incompressível. Para um escoamento permanente e bidimensional de um fluido incompressível, a velocidade pode ser calculada a partir da vazão volumétrica. Desta forma, a velocidade é substituída por um escalar. Tal escalar é conhecido como *função de corrente* (ψ). A relação entre as componentes da velocidade e a função de corrente é apresentado expandindo a equação da continuidade (Eq. 2.10):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.66)$$

A seguinte relação entre a função de corrente e as componentes da velocidade pode ser definida de modo que a Eq. 2.66 seja satisfeita:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.67)$$

A relação entre a função de corrente e a vorticidade é apresentada expandindo a operação $\nabla \times \mathbf{v}$ para o caso bidimensional:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.68)$$

Substituindo a Eq. 2.67 na Eq. 2.68, temos:

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.69)$$

Isto é:

$$w = -\nabla^2 \psi \quad (2.70)$$

Dessa forma, as equações que governam o problema proposto em sua forma adimensional são apresentadas abaixo:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = \frac{1}{Re} \nabla^2 w \quad (2.71)$$

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (2.72)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (2.74)$$

Onde $\mathbf{D}$ é um operador diferencial cujas componentes são $[\partial/\partial y, -\partial/\partial x]$.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Introdução

Descreveremos neste capítulo o Método dos Elementos Finitos (MEF). Enquanto o Método das Diferenças Finitas (MDF) representa uma aproximação direta para as equações diferenciais, a proposta do procedimento dos elementos finitos é uma aproximação aplicada para os termos da formulação variacional como mencionado por Zienkiewicz [32].

Primeiramente, discretizaremos as equações de governo no tempo utilizando a aproximação da série de Taylor mantendo os termos de segunda ordem da expansão a fim de reduzir as oscilações espúrias presentes nas equações do tipo convecção-difusão como no caso das equações de vorticidade e concentração. Em seguida, apresentaremos a formulação forte das mesmas. Feito isso, a formulação fraca das equações de governo é apresentada e as mesmas são discretizadas no espaço utilizando a formulação de Galerkin com um elemento triangular linear. Portanto, as equações de governo na forma matricial segundo o esquema *Taylor-Galerkin* é apresentado. Para mais detalhes sobre o esquema, consultar os trabalhos de Donea [2], Zienkiewicz [3] e Lewis [33].

3.2 Discretização no Tempo

Nesta seção discretizaremos as equações de governo no tempo, através da expansão em série de Taylor para a variável em questão a fim de aproximar a derivada temporal. Com o intuito de simplificação, apresentaremos a discretização da equação da vorticidade. Um procedimento semelhante poderá ser feito para a equação de transporte de espécie química (Eq. 2.74). Sendo assim, expandindo os termos da equação da vorticidade (Eq. 2.71), temos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.1)$$

isto é:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

Multiplicando ambos os lado por $\partial/\partial t$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[-u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.3)$$

Desta forma, considerando a expansão de Taylor:

$$w^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k w^n}{\partial t^k} \frac{\Delta t^k}{k!} \quad (3.4)$$

Desenvolvendo a série, temos:

$$w^{n+1} = w^n + \frac{\partial w^n}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 w^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 w^n}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots \quad (3.5)$$

Caso os termos de ordem superior a dois forem omitidos, a equação fica da forma:

$$w^{n+1} = w^n + \frac{\partial w^n}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 w^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3) \quad (3.6)$$

onde $O(\Delta t^3)$ é o erro devido o truncamento da série. Graficamente, esta aproximação pode ser representada como:

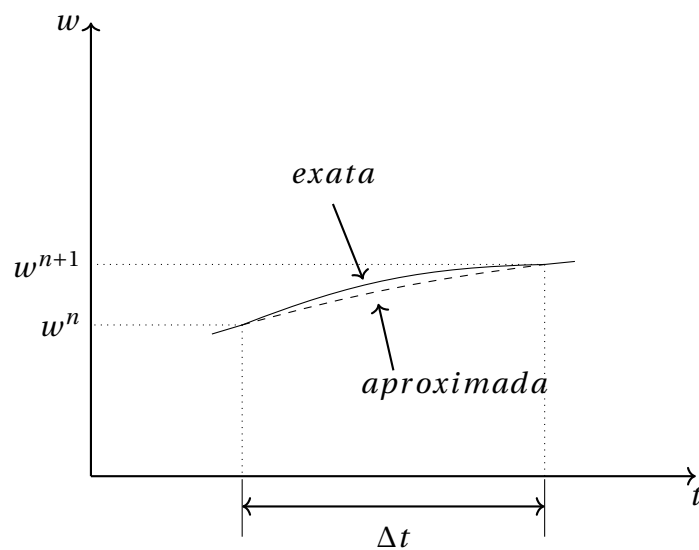


Figura 4: Variação da vorticidade em um passo de tempo

Omitindo o erro do truncamento, a derivada temporal pode ser aproximada a:

$$w^{n+1} = w^n + \frac{\partial w^n}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 w^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} \quad (3.7)$$

onde w^{n+1} é a vorticidade que será calculada e w^n é a vorticidade que foi calculada no passo de tempo anterior. Substituindo a equação da vorticidade (Eq. 3.2) e a equação da vorticidade multiplicada pela derivada temporal (Eq. 3.3) na aproximação feita acima, temos:

$$\begin{aligned} w^{n+1} = w^n + \Delta t \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Assumindo que u e v são constantes, temos:

$$\begin{aligned} w^{n+1} = w^n + \Delta t \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Invertendo as ordens de derivação do último termo, ficamos:

$$\begin{aligned} w^{n+1} = w^n + \Delta t \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w^n}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial w^n}{\partial t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial w^n}{\partial t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial w^n}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo os termo $\partial w / \partial t$ pela equação de vorticidade (Eq. 3.2), temos:

$$\begin{aligned}
 w^{n+1} = w^n + \Delta t & \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \\
 & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \right. \\
 & \quad \left. - v \frac{\partial}{\partial y} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Truncando os termos de ordem superior a dois, ficamos:

$$\begin{aligned}
 w^{n+1} = w^n + \Delta t & \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \\
 & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} \right] - v \frac{\partial}{\partial y} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} \right] \right] + O(\Delta t^3)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Omitindo novamente o erro de truncamento, possuímos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 w^{n+1} = w^n + \Delta t & \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \right] \\
 & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} \right] - v \frac{\partial}{\partial y} \left[-u \frac{\partial w^n}{\partial x} - v \frac{\partial w^n}{\partial y} \right] \right]
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Isto é:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right] + u \frac{\partial w^n}{\partial x} + v \frac{\partial w^n}{\partial y} & = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w^n}{\partial y^2} \\
 & + \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial w^n}{\partial x} + v \frac{\partial w^n}{\partial y} \right] + \frac{\Delta t}{2} v \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial w^n}{\partial x} + v \frac{\partial w^n}{\partial y} \right]
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Os dois últimos termos da equação acima são conhecidos como difusão artificial ou difusão numérica e são eles que atuam para a redução das oscilações espúrias que aparecem para Reynolds moderados ou elevados. Outros esquemas são conhecidos na literatura para elimi-

nar essas oscilações espúrias tais como *Petrov-Galerkin* para equações em 1D e *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG) para equações em 2D ambos em problemas permanentes. Nesses esquemas, as funções bases são modificadas para obter um efeito *upwind*. Para problemas transientes, além do *Taylor-Galerkin* temos: *Semi-Lagrangiano* e *Galerkin Característico*. Os esquemas *Taylor-Galerkin* e *Galerkin Característico* possuem o mesmo resultado quando a variável é escalar como apresentado por Lohner [27].

Na forma vetorial, as equações de governo discretizadas no tempo possuem a forma:

$$\dot{w} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = \frac{1}{Re} \nabla^2 w + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \quad (3.15)$$

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (3.16)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (3.17)$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \quad (3.18)$$

Onde $\dot{w}$ e $\dot{c}$ são $[w^{n+1} - w^n]/\Delta t$ e $[c^{n+1} - c^n]/\Delta t$ respectivamente, $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade cujas componentes são $\mathbf{v} = [u, v]$ e $\mathbf{D}$ é um operador matemático com componentes $\mathbf{D} = [\partial/\partial y, -\partial/\partial x]$.

3.3 Formulação Forte

As equações de governo na forma diferencial com as condições de contorno são conhecida como **Formulação Forte**. Desta forma, a formulação forte para o problema proposto é:

$$\dot{w} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = \frac{1}{Re} \nabla^2 w + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \quad (3.19)$$

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (3.20)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (3.21)$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \quad (3.22)$$

Estas equações são válidas no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 w &= w_\Gamma & \text{em } \Gamma_1 \\
 \psi &= \psi_\Gamma & \text{em } \Gamma_2 \\
 \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\Gamma & \text{em } \Gamma_3 \\
 c &= c_\Gamma & \text{em } \Gamma_4
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

3.4 Formulação Fraca

O resultado da ponderação da equação de governo e integrada sobre o domínio é conhecida como **formulação fraca** como mencionado por Anjos [34]. A seguir apresentaremos a formulação fraca para o problema de escoamento de um fluido monofásico, newtoniano e incompressível utilizando a formulação corrente-vorticidade com equação de transporte de espécie química. Para mais detalhes, consultar o trabalho de Brenner [35]. Como o objetivo é encontrar uma solução aproximada, é aceitável supor que seja produzido um **Resíduo R** nas equações de governo, isto é:

$$\dot{w} + \mathbf{v} \cdot \nabla w - \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla w] = R_1 \tag{3.24}$$

$$\nabla^2 \psi + w = R_2 \tag{3.25}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{D}\psi = R_3 \tag{3.26}$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] = R_4 \tag{3.27}$$

Buscaremos forçar o resíduo ser equivalente a zero num sentido médio como mencionado por Finlayson [36], logo:

$$\int_{\Omega} R_1 \cdot \delta d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega} R_2 \cdot \phi d\Omega = 0 \quad (3.29)$$

$$\int_{\Omega} R_3 \cdot \xi d\Omega = 0 \quad (3.30)$$

$$\int_{\Omega} R_4 \cdot \eta d\Omega = 0 \quad (3.31)$$

onde δ , ϕ , ξ e η são funções peso. A função peso é um conjunto de funções arbitrárias dentro de um espaço de funções que será discutido à frente. Possuímos, então, as seguintes integrais:

$$\int_{\Omega} \left\{ \dot{w} + \mathbf{v} \cdot \nabla w - \frac{1}{Re} \nabla^2 w - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \right\} \cdot \delta d\Omega = 0 \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega} \{ \nabla^2 \psi + w \} \cdot \phi d\Omega = 0 \quad (3.33)$$

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{v} - \mathbf{D}\psi \} \cdot \xi d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \right\} \cdot \eta d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

Desenvolvendo a integral, temos:

$$\int_{\Omega} \dot{w} \delta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla w \delta d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 w \delta - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \delta d\Omega = 0 \quad (3.36)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega + \int_{\Omega} w \phi d\Omega = 0 \quad (3.37)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega = 0 \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta d\Omega = 0 \quad (3.39)$$

No termo difusivo das equações (3.36, 3.37 e 3.39), aplicaremos o teorema de Green com o intuito de diminuir a ordem da derivada e separar o termo avaliado no contorno. Assim o termo difusivo se transformará em:

$$-\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 w \delta d\Omega = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \delta d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma} \delta \nabla w \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.40)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.41)$$

$$-\frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega = \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Gamma} \eta \nabla c \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.42)$$

Onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal orientado para fora do contorno Γ . O último termo das equações acima é conhecido como condição natural. Conforme apresentado anteriormente, para o problema proposto neste trabalho, possuímos apenas condições de contorno de Dirichlet (conhecida como condição essencial). Desta forma, assumiremos por hipótese que $\delta = 0$, $\phi = 0$ e $\eta = 0$ nas equações (3.40, 3.41 e 3.42) para todo contorno Γ . Portanto, a integral em Γ é nula. Assim, o termo difusivo das equações (3.36, 3.37 e 3.39) será:

$$-\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 w \delta d\Omega = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \delta d\Omega \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega \quad (3.44)$$

$$-\frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega = \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (3.45)$$

Para o termo de difusividade numérica das equações (3.36 e 3.39), aplicaremos um procedimento semelhante ao anterior. Dessa forma, o termo de difusividade numérica será:

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \delta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.46)$$

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (3.47)$$

Da mesma forma, podemos anular o termo de condição natural segundo a hipótese adotada anteriormente. Portanto, o termo de difusividade numérica das equações (3.36 e 3.39) será:

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \delta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega \quad (3.48)$$

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (3.49)$$

Portanto, substituindo os novos termos difusivos nas equações de governo:

$$\int_{\Omega} \dot{w} \delta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla w \delta d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \delta d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega = 0 \quad (3.50)$$

$$-\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} w \phi d\Omega = 0 \quad (3.51)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega = 0 \quad (3.52)$$

$$\int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega = 0 \quad (3.53)$$

Se assumirmos que:

$$\begin{aligned} m_1(\dot{w}, \delta) &= \int_{\Omega} \dot{w} \delta d\Omega & m_3(\mathbf{v}, \xi) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega \\ g_1(\mathbf{v}, \delta) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla w \delta d\Omega & g_3(\psi, \xi) &= \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega \\ k_1(w, \delta) &= \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \delta d\Omega & m_4(\dot{c}, \eta) &= \int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega \\ k_{n1}(w, \delta) &= \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla w] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega & g_4(\mathbf{v}, \eta) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega \\ k_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega & k_4(c, \eta) &= \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega \\ m_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega} w \phi d\Omega & k_{n4}(c, \delta) &= \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega \end{aligned} \quad (3.54)$$

Então as equações podem ser apresentadas em sua respectiva forma fraca como:

$$m_1(\dot{w}, \delta) + g_1(\mathbf{v}, \delta) + \frac{1}{Re} k_1(w, \delta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n1}(w, \delta) = 0 \quad (3.55)$$

$$-k_2(\psi, \phi) + m_2(\psi, \phi) = 0 \quad (3.56)$$

$$m_3(\mathbf{v}, \xi) - g_3(\psi, \xi) = 0 \quad (3.57)$$

$$m_4(\dot{c}, \eta) + g_4(\mathbf{v}, \eta) + \frac{1}{ReSc} k_4(c, \eta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n4}(c, \eta) = 0 \quad (3.58)$$

Dados os conjuntos de funções bases:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{W} &= \{w \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} w^2 d\Omega < \infty; w = w_{\Gamma}\} \\
 \mathbb{P} &= \{\psi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega < \infty; \psi = \psi_{\Gamma}\} \\
 \mathbb{V} &= \{v \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty; v = v_{\Gamma}\} \\
 \mathbb{C} &= \{c \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} c^2 d\Omega < \infty; c = c_{\Gamma}\}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

E Dados os espaços de funções pesos:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{D} &= \{\delta \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \delta^2 d\Omega < \infty; \delta_{\Gamma} = 0\} \\
 \mathbb{F} &= \{\phi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \phi^2 d\Omega < \infty; \phi_{\Gamma} = 0\} \\
 \mathbb{X} &= \{\xi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \xi^2 d\Omega < \infty; \xi_{\Gamma} = 0\} \\
 \mathbb{N} &= \{\eta \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \eta^2 d\Omega < \infty; \eta_{\Gamma} = 0\}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

A formulação fraca consiste em encontrarmos as soluções de $w \in \mathbb{W}$, $\psi \in \mathbb{P}$, $v \in \mathbb{V}$ e $c \in \mathbb{C}$ tal que:

$$m_1(\dot{w}, \delta) + g_1(\mathbf{v}, \delta) + \frac{1}{Re} k_1(w, \delta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n1}(w, \delta) = 0 \tag{3.61}$$

$$-k_2(\psi, \phi) + m_2(\psi, \phi) = 0 \tag{3.62}$$

$$m_3(\mathbf{v}, \xi) - g_3(\psi, \xi) = 0 \tag{3.63}$$

$$m_4(\dot{c}, \eta) + g_4(\mathbf{v}, \eta) + \frac{1}{ReSc} k_4(c, \eta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n4}(c, \eta) = 0 \tag{3.64}$$

para todo $\delta \in \mathbb{D}$, $\phi \in \mathbb{F}$, $\xi \in \mathbb{X}$ e $\eta \in \mathbb{N}$.

3.5 Discretização no Espaço

As funções peso δ , ϕ , ξ e η são conjuntos de funções arbitrárias e possuem uma infinidade de escolhas. Neste trabalho para discretizarmos o domínio, utilizaremos a formulação de **Galerkin** que consiste em utilizar as mesmas funções de forma para as funções peso e a

função interpoladora da variável em questão (w, ψ, v, c). Assim, as Eqs. 3.50 a 3.53 podem ser apresentadas na forma expandida tais como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{w} \delta d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial w}{\partial x} \delta d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial w}{\partial y} \delta d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right\} d\Omega \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial \delta}{\partial x} \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial \delta}{\partial y} \left[u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$- \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} w \phi d\Omega = 0 \quad (3.66)$$

$$\int_{\Omega} u \xi d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \xi d\Omega = 0 \quad (3.67)$$

$$\int_{\Omega} v \xi d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi d\Omega = 0 \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial c}{\partial x} \eta d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial c}{\partial y} \eta d\Omega + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\} d\Omega \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right] d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Discretizaremos, agora, o domínio em ne elementos e np nós, onde ne representa o número total de elementos e np o número total de nós da malha computacional. Desta forma, temos:

$$w(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^{np} w_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (3.70)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^{np} \psi_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (3.71)$$

$$u(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^{np} u_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (3.72)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^{np} v_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (3.73)$$

$$c(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{i=1}^{np} c_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (3.74)$$

onde $w_i = [w_1, \dots, w_{np}]$, $\psi_i = [\psi_1, \dots, \psi_{np}]$, $u_i = [u_1, \dots, u_{np}]$, $v_i = [v_1, \dots, v_{np}]$, $c_i = [c_1, \dots, c_{np}]$ são as incógnitas a serem encontradas. Como essas incógnitas dependem apenas do tempo, poderão sair das integrais sobre o domínio Ω e $N_i = [N_1, \dots, N_{np}]$ são as funções de aproximação conhecidas como funções base ou funções de interpolação. Essas funções podem ser escolhidas de modo arbitrário e devem respeitar as condições de contorno. Elas variam conforme a escolha do tipo de elemento usado na discretização. Conforme foi mencionado, neste trabalho usaremos o mesmo tipo de elemento para cada equação de governo, assim possuiremos as mesmas funções bases para todas as equações.

Na formulação de Galerkin, as funções peso assumem os valores das funções base, isto é:

$$\delta(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{j=1}^{np} \delta_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (3.75)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{j=1}^{np} \phi_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (3.76)$$

$$\xi(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{j=1}^{np} \xi_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (3.77)$$

$$\eta(\mathbf{x}, t) \simeq \sum_{j=1}^{np} \eta_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (3.78)$$

Desta forma, as equações de governo na forma variacional discretizada no espaço será:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \dot{w}_i N_i \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega + u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega \\
& + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \right\} \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial w_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial y} \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} w_i N_i \sum_{j=1}^{np} \phi_j N_j d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} u_i N_i \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega = 0 \tag{3.81}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} v_i N_i \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega = 0 \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i N_i \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega + u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega \\
& + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial y} \right\} d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial x} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial y} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Podemos retirar as componentes da velocidade u e v da integral no termo convectivo das equações 3.79 e 3.83 já que as mesmas não serão tratadas como incógnitas, isto é, para a equação da vorticidade usaremos os valores das componentes u e v do passo de tempo anterior enquanto para a equação do transporte de espécie química, as componentes da velocidade são calculadas primeiramente. Dessa forma, essas equações se transformam em equações lineares.

Colocando os símbolos de somatória para fora das integrais, temos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \delta_j \left[\sum_{i=1}^{np} \dot{w}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} w_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \right. \\
& + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \phi_j \left[\sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[- \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + w_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right] \right] = 0 \tag{3.85}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \xi_j \left[\sum_{i=1}^{np} u_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] \right] = 0 \tag{3.86}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \xi_j \left[\sum_{i=1}^{np} v_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] \right] = 0 \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \eta_j \left[\sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} c_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Sabendo que $\sum_{j=1}^{np} \delta_j \neq 0$, $\sum_{j=1}^{np} \phi_j \neq 0$, $\sum_{j=1}^{np} \xi_j \neq 0$ e $\sum_{j=1}^{np} \eta_j \neq 0$ então as equações de governo se tornam:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{w}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} w_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ \left. + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[- \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + w_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right] = 0 \quad (3.90)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} u_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (3.91)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} v_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} c_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\
& + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.93}$$

isto é:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{w}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} w_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\
& + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \left[u \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \left[u \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[- \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + w_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right] = 0 \tag{3.95}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} u_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] = 0 \tag{3.96}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} v_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] = 0 \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} c_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\
& + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \left[u \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \left[u \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.98}$$

3.6 Elemento da Malha

A malha computacional pode ser estruturada ou não e a escolha do elemento que constitui esta malha é de vital importância para uma boa precisão da solução. Alguns parâmetros podem influenciar na escolha de um determinado grupo de elementos como por exemplo no caso onde existe uma condição de restrição como é encontrada na equação Navier-Stokes devido o forte acoplamento entre a velocidade e a pressão. Essa restrição é conhecida como *Babuska-Brezzi* [37] [38]. Quando possuímos essa restrição, precisamos ter diferentes números de nós para cada variável no mesmo elemento a fim de possuímos estabilidade na solução. Sendo assim, precisamos utilizar um *elemento quadrático ou cúbico*. Mas a formulação corrente-vorticidade da equação Navier-Stokes não possui a restrição *Babuska-Brezzi* já que não há o acoplamento entre a velocidade e a pressão. Desta forma, o uso de um *elemento linear* não produz instabilidade, podendo ser utilizado sem problemas como no caso deste trabalho.

Abaixo apresentaremos a classificação dos elementos quanto à geometria e à ordem do polinômio interpolador conforme apresentado por Anjos [34]:

- Geometria
 - problemas unidimensionais - Reta
 - problemas bidimensionais - Triangulares e Retangulares
 - problemas tridimensionais - Tetraedrais, hexaedrais e prismáticos
- Ordem do polinômio interpolador
 - grau um - Linear
 - grau dois - Quadrática
 - grau três - Cúbica

Os elementos triangulares são os mais comuns no MEF porque possibilita uma boa discretização de superfícies irregulares devido a sua simplicidade geométrica. Neste trabalho, utilizamos um elemento triangular com o polinômio interpolador de ordem um, isto é, linear.

Abaixo são apresentados alguns elementos triangulares com diferentes ordens do polinômio interpolador:

Elemento triangular linear: Devido sua simplicidade, é o elemento mais utilizado em MEF quando não possuímos restrições. As matrizes elementares analíticas deste elemento são facilmente encontradas na literatura. Como trata-se de um elemento linear, a ordem do polinômio interpolador é de grau um. Desta forma, suas funções de interpolação são planas.

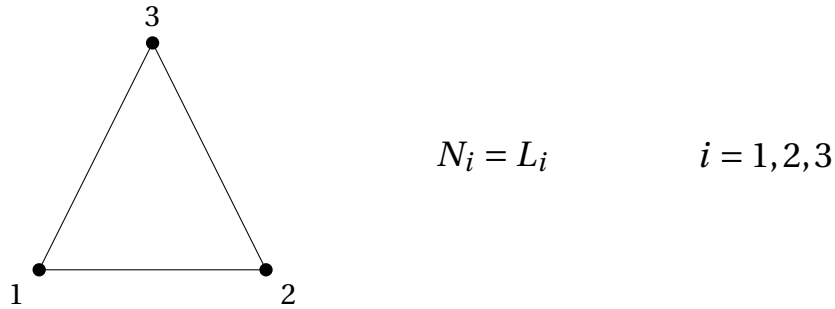


Figura 5: Elemento triangular linear

Elemento triangular quadrático: Geralmente este elemento é usado quando possuímos restrições que impedem o uso do elemento linear ou quando estamos buscando uma melhor aproximação do resultado. As matrizes elementares deste elemento são calculadas pela quadratura gaussiana cujos parâmetros podem ser encontrados na literatura. Como trata-se de um elemento quadrático, a ordem do polinômio interpolador é de grau dois. Desta forma, suas funções de interpolação são parabólicas.

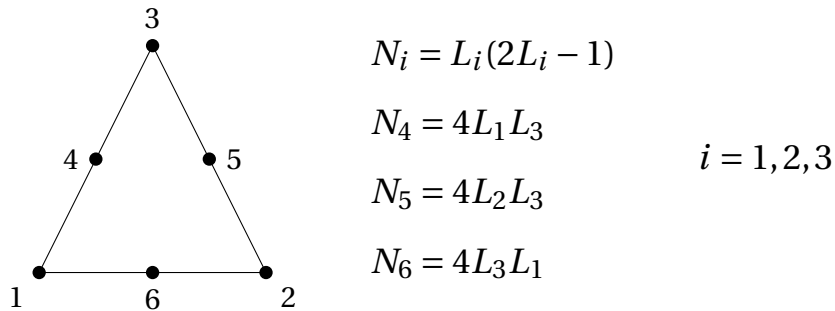


Figura 6: Elemento triangular quadrático

Elemento triangular cúbico: Assim como o elemento quadrático, este elemento é usado quando possuímos restrições que impedem o uso do elemento linear ou quando estamos buscando uma melhor aproximação do resultado. Na literatura, este elemento é conhecido como *elemento MINI*. Suas matrizes elementares também são calculadas pela quadratura gaussiana. Como trata-se de um elemento cúbico, a ordem do polinômio interpolador é

de grau três. Desta forma, suas funções de interpolação possui uma bolha no centro do elemento.

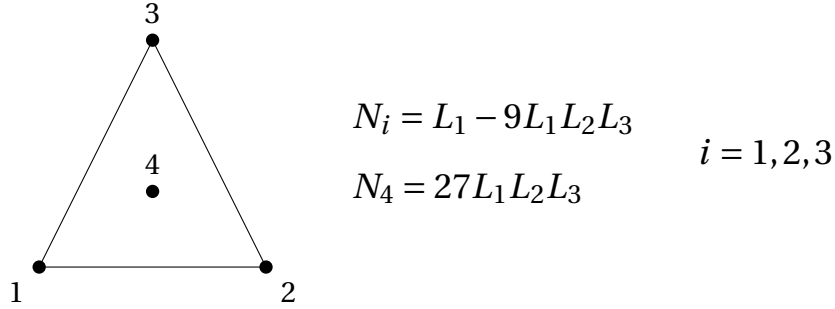


Figura 7: Elemento triangular cúbico

As Eqs (3.94 a 3.98) podem ser representadas matricialmente por:

$$M\dot{w} + u \cdot G_x w + v \cdot G_y w + \frac{1}{Re} [K_{xx} + K_{yy}] w + \frac{\Delta t}{2} u [uK_{xx} + vK_{yx}] w + \frac{\Delta t}{2} v [uK_{xy} + vK_{yy}] w = 0 \quad (3.99)$$

$$- [K_{xx} + K_{yy}] \psi + Mw = 0 \quad (3.100)$$

$$Mu - G_y \psi = 0 \quad (3.101)$$

$$Mv + G_x \psi = 0 \quad (3.102)$$

$$M\dot{c} + u \cdot G_x c + v \cdot G_y c + \frac{1}{ReSc} [K_{xx} + K_{yy}] c + \frac{\Delta t}{2} u [uK_{xx} + vK_{xy}] c + \frac{\Delta t}{2} v [uK_{yx} + vK_{yy}] c = 0 \quad (3.103)$$

onde as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{G}_x$, $\mathbf{G}_y$, $\mathbf{K}_{xx}$, $\mathbf{K}_{xy}$, $\mathbf{K}_{yx}$, $\mathbf{K}_{yy}$, possuem dimensões $\mathbf{np} \times \mathbf{np}$ (isto é, número

de nós por número de nós) e são definidas como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}m^e \quad (3.104)$$

$$\mathbf{G}_x = \mathbf{A}g_x^e \quad (3.105)$$

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{A}g_y^e \quad (3.106)$$

$$\mathbf{K}_{xx} = \mathbf{A}k_{xx}^e \quad (3.107)$$

$$\mathbf{K}_{xy} = \mathbf{A}k_{xy}^e \quad (3.108)$$

$$\mathbf{K}_{yx} = \mathbf{A}k_{yx}^e \quad (3.109)$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{A}k_{yy}^e \quad (3.110)$$

onde $\mathbf{A}$ é um operador de montagem das matrizes elementares nas matrizes globais, respeitando a correspondência entre os índices globais e locais e m^e , g_x^e , g_y^e , k_{xx}^e , k_{xy}^e , k_{yx}^e , k_{yy}^e são as matrizes elementares cuja dimensão para o *elemento triangular linear* é 3x3 e são definidas por:

$$\begin{aligned} m^e &= \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega \\ g_x^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e d\Omega \\ g_y^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e d\Omega \\ k_{xx}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega \\ k_{xy}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega \\ k_{yx}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega \\ k_{yy}^e &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega \end{aligned} \quad (3.111)$$

Sendo assim, as equações de governo em sua forma adimensional discretizadas segundo o

Método dos Elementos Finitos que usamos neste trabalho foram:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\Delta t} w^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} w^n - u \cdot G_x w^n - v \cdot G_y w^n - \frac{1}{Re} [K_{xx} + K_{yy}] w^n \\ - \frac{\Delta t}{2} u [u K_{xx} + v K_{yx}] w^n - \frac{\Delta t}{2} v [u K_{xy} + v K_{yy}] w^n \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$[K_{xx} + K_{yy}] \psi = M w \quad (3.113)$$

$$M u = G_y \psi \quad (3.114)$$

$$M v = -G_x \psi \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{\Delta t} c^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} c^n - u \cdot G_x c^n - v \cdot G_y c^n - \frac{1}{Re Sc} [K_{xx} + K_{yy}] c^n \\ - \frac{\Delta t}{2} u [u K_{xx} + v K_{yx}] c^n - \frac{\Delta t}{2} v [u K_{xy} + v K_{yy}] c^n \end{aligned} \quad (3.116)$$

4 CÓDIGO NUMÉRICO

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos as principais características do código numérico desenvolvido em linguagem Python 2.7 [39] utilizando o paradigma de orientação a objetos com o intuito da reutilização do código em outras simulações no futuro e o *Diagrama de Classes* (UML) simplificado é apresentado na Figura 8. Inicialmente, é apresentado o *script* que realiza a importação da malha computacional para a simulação. Em seguida, a montagem das matrizes globais é feita respeitando a correspondência entre os índices globais e locais. Mais a frente, apresentamos a aplicação das condições de contorno tanto de *Dirichlet* quanto de *Neumann*. E finalmente, é apresentado também, o algoritmo de solução da formulação corrente-vorticidade com a equação de transferência de espécie química.

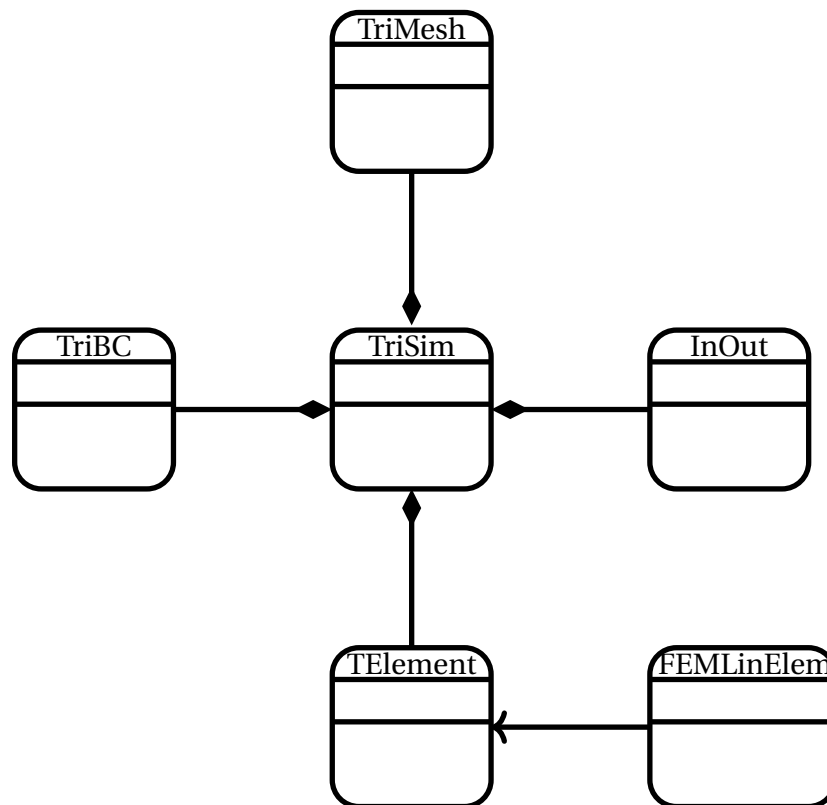


Figura 8: Diagrama de Classes Simplificado

4.2 Importação da Malha

O domínio consiste em uma malha não estruturada gerado pelo software livre *GMSH* [40] e foi importada à simulação pela classe *TriMesh* criada pelo próprio autor deste trabalho. Inicialmente transformamos o arquivo *.msh* em uma lista *Python* pelo script abaixo:

```
-----
malha = []                                | inicialização da lista Python
with open("arquivo.msh") as mesh:
    for line in mesh:                     | loop sobre as linhas do arquivo
        row = line.split()
        malha.append(row[:])             | adicionando a linha
                                         | do arquivo na lista Python
-----
```

Em seguida, esta classe retorna informações importantes para a simulação tais como: o número de nós do domínio (**np**), o número de elementos do domínio (**ne**), os vetores de coordenadas (**x** e **y**), a matriz de conectividade (**IEN**) e os nós contidos no contorno do domínio. A Tabela 1 apresenta o tempo de processamento para a importação da malha em diversas malhas triangulares lineares não estruturadas.

Nós (und.)	Elementos (und.)	Tempo de Processamento (s)
10482	20142	0.6
40819	80005	2.6
249677	495289	16.6
993091	2010501	70.4

Tabela 1: Tempo de importação para diversas malhas triangulares não estruturadas

4.3 Montagem das Matrizes Globais

Após a importação do arquivo *.msh* foi realizado a montagem das matrizes globais. As mesmas foram inicializadas como matrizes esparsas pela biblioteca *Scipy* [41] e o seguinte *script* foi usado para a montagem:

```
-----
for e in range(0, ne):                | loop sobre os elementos
    linear_element(e)                 | montagem das matrizes elementares
                                     | utilizando a quadratura gaussiana

for i in range(0,3):
    ii = IEN[e][i]

for j in range(0,3):
    jj = IEN[e][j]

    Kxx[ii,jj] += kxx_element[i][j]  |
    Kxy[ii,jj] += kxy_element[i][j]  |
    Kyx[ii,jj] += kyx_element[i][j]  |
    Kyy[ii,jj] += kyy_element[i][j]  | montagem das matrizes globais
                                     | correspondendo os índices globais
                                     | e locais
    Gx[ii,jj] += gx_element[i][j]    |
    Gy[ii,jj] += gy_element[i][j]    |
                                     |
    M[ii,jj] += mass_element[i][j]   |
-----
```

A montagem das matrizes elementares é feita pelo módulo *linear_element* cujo parâmetro requerido é o número do elemento. Esse módulo faz parte da classe *TElement* onde utiliza a quadratura gaussiana para o cálculo dos valores das matrizes elementares. Para o elemento triangular linear, é possível a utilização das matrizes elementares analíticas. Para mais detalhe consultar Lewis [33].

Em seguida, a matriz do lado esquerdo conhecida como *left hand side (LHS)* é criada para as equações da função de corrente, velocidade e concentração respectivamente:

```
-----
LHS_psi = sps.lil_matrix.copy(K)
LHS_vx = sps.lil_matrix.copy(M)
LHS_vy = sps.lil_matrix.copy(M)
LHS_c = sps.lil_matrix.copy(M)/dt
-----
```

A matriz *LHS* para a equação da vorticidade é criada durante o loop do algoritmo de solução a fim de garantir que a mesma será sempre inicializada utilizando as matrizes globais originais. É necessário usarmos a função *copy* porque queremos copiar os valores das matrizes globais e não referencia-los, para mais detalhe consultar o *Scipy Community* [42]. A Tabela 2 apresenta o tempo de processamento para a montagem das matrizes globais em diversas malhas triangulares lineares não estruturadas.

Nós (und.)	Elementos (und.)	Tempo de Processamento (s)
10482	20142	72.9
40819	80005	254.3
249677	495289	1664.9
993091	2010501	69059.9

Tabela 2: Tempo de montagem das matrizes globais para diversas malhas triangulares não estruturadas

4.4 Aplicação das Condições de Contorno

Após a montagem das matrizes globais, as condições de contorno são aplicadas. Conforme foi falado anteriormente, durante a importação da malha é possível identificarmos os nós que se encontram no contorno do domínio. A condição onde os nós possuem seus valores pré definidos pelo problema em análise é conhecida como *Condição de Dirichlet*. Sendo assim, esses nós não devem ser alterados conforme a simulação acontece. Dessa maneira, o produto entre a coluna da matriz global cujo índice é um nó com condição de

contorno Dirichlet e o seu valor pré definido como condição de contorno é subtraído ao vetor do lado direito da equação de governo. Em seguida, zeramos as linhas e colunas da matriz global que corresponde ao índice de condição de Dirichlet e colocamos o valor de 1 na diagonal principal.

Para exemplificar, consideraremos uma matriz com dimensões $(np \times np)$ e o nó 2 como um nó localizado no contorno do domínio onde a condição proposta é de Dirichlet. Desta forma, o seguinte algoritmo é feito conforme apresentado por Anjos [34]:

1. Localiza-se o nó de condição de contorno na matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

↑ Identificar a coluna cujo índice é
condição de contorno de Dirichlet

2. Subtrai-se o produto entre a coluna onde está situado o nó da matriz e o seu valor pré definido com o vetor do lado direito da equação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

↑ Subtrair o produto desta coluna com o
valor de c_2 no lado direito da equação

isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} * c_2}_{bc_dirichlet}$$

3. **Preenchem-se com zeros a coluna e a linha da matriz correspondente ao nó de condição de contorno:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} * c_2$$

4. **Coloca-se 1 na diagonal principal da matriz cujo índice é o nó de condição de contorno:**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} * c_2$$

5. **Localiza-se o próximo nó e executa-se o passo novamente.**

A implementação deste algoritmo foi realizado pelo seguinte *script*:

```

-----
for mm in ibc:                                | loop sobre os nós do contorno
    bc_dirichlet -= LHS[:,mm]*bc_1[mm]        | passo 2
    LHS[:,mm] = 0.0                            | passo 3 - zerar colunas
    LHS[mm,:] = 0.0                            | passo 3 - zerar linhas
    LHS[mm,mm] = 1.0                          | passo 4 - 1 na diagonal principal
    bc_dirichlet[mm] = bc_1[mm]                | imputando o valor da condição
                                              | de Dirichlet no índice
                                              | correspondente
-----

```

Onde *ibc* é uma lista que contém todos os nós do contorno cuja condição é de Dirichlet e *bc_1* é um vetor auxiliar com dimensão *np* onde o valor da condição de Dirichlet é imputada em cada índice correspondente. O símbolo -= garante que a contribuição de cada nó cuja condição seja de Dirichlet seja computada. Este procedimento deverá ser realizado para cada um das *LHS*. A Tabela 3 apresenta o tempo de processamento para a aplicação das condições de contorno de *Dirichlet* em diversas malhas triangulares lineares não estruturadas.

Nós (und.)	Elementos (und.)	Tempo de Processamento (s)
10482	20142	6.8
40819	80005	37.5
249677	495289	467.7
993091	2010501	3720.6

Tabela 3: Tempo processamento para as condições de contorno para diversas malhas triangulares não estruturadas

Outro tipo de condição de contorno muito comum é aquela onde existe um fluxo nos contornos do domínio. Essa condição de contorno é conhecida como *Condição de Neumann* e na formulação variacional é chamada de *Condição Natural*. Diferente da condição de Dirichlet, esse tipo de condição de contorno não afeta a matriz global do lado esquerdo quando o fluxo é constante. Devemos apenas somar a sua contribuição no vetor do lado direito da equação, isto é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}}_{bc_dirichlet} * c_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} ne_1 \\ ne_2 \\ ne_3 \\ \vdots \\ ne_n \end{bmatrix}}_{bc_neumann}$$

Como foi falado no capítulo anterior, possuímos apenas condição de Dirichlet neste trabalho. A seguir, porém, apresentaremos a implementação desse tipo de condição. A fim de exemplificar, consideraremos o termo de contorno da equação 3.42, isto é:

$$\frac{1}{ReSc} \int_{\Gamma} \eta \nabla c \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.1)$$

Onde ∇c é o fluxo que será considerado constante. Após a discretização pela formulação de Galerkin, possuímos a seguinte expressão:

$$\frac{1}{ReSc} \int_{\Gamma} N_j \nabla c \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.2)$$

isto é:

$$\frac{1}{ReSc} \left[\frac{length \nabla c}{2} \right] \quad (4.3)$$

Onde *length* é o comprimento da aresta do elemento. Considerando um domínio bidimensional onde *i* é um nó no contorno deste domínio e *i* − 1 e *i* + 1 são seus vizinhos neste contorno, as arestas do nó *i* podem ser representadas por:

Onde a aresta à esquerda do nó *i* é constituída pelos nós *i* − 1 e *i*, enquanto a aresta à direita é constituída pelos nós *i* e *i* + 1. Desta maneira podemos observar que o nó *i* recebe contribuição das aresta a sua esquerda e a sua direita. O *script* abaixo é usado para a implementação da condição de contorno de Neumann quando requerida:

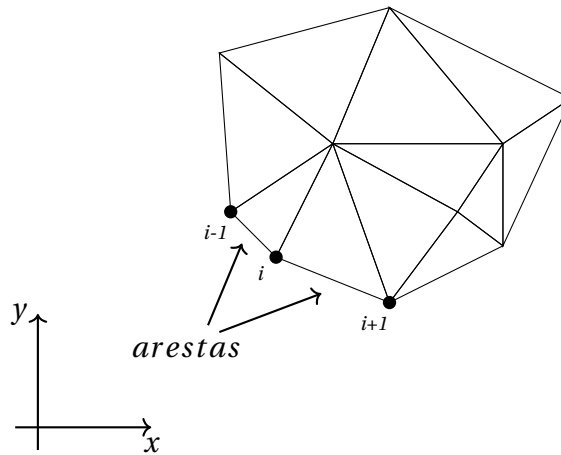


Figura 9: Arestas vizinhas de um nó

```

for i in range(0, len(neumann_edges)): | loop sobre as arestas neumann

    p1 = neumann_edges[i][1]           | os nós que constituem
    p2 = neumann_edges[i][2]           | uma aresta

    x = x[p1] - x[p2]                  | calculo do comprimento
    y = y[p1] - y[p2]                  | de uma aresta
    length = numpy.sqrt(x**2 + y**2)    |

    bc_neumann[p1] += (length*nabla_c) / 2. | imputando o valor da condição
    bc_neumann[p2] += (length*nabla_c) / 2. | de Neumann no índice
                                         | correspondente.

```

Onde *neumann_edges* é uma lista que contém os nós presentes em uma aresta cuja condição é de Neumann, *p1* e *p2* são os nós presentes na aresta, *x* e *y* são as coordenadas de cada nó, *length* é o comprimento da aresta, *nabla_c* é o fluxo adimensional modelado no problema físico e *numpy* é uma biblioteca numérica do *Python* no qual estamos usando a função da raiz quadrada (*numpy.sqrt*). O símbolo += garante que a contribuição das aresta à esquerda e à direita seja computada.

4.5 Algoritmo de Solução

Uma das grandes dificuldades da implementação da formulação corrente-vorticidade se encontra no algoritmo de solução e a implementação das condições de contorno da vorticidade. Resumidamente, o algoritmo de solução é:

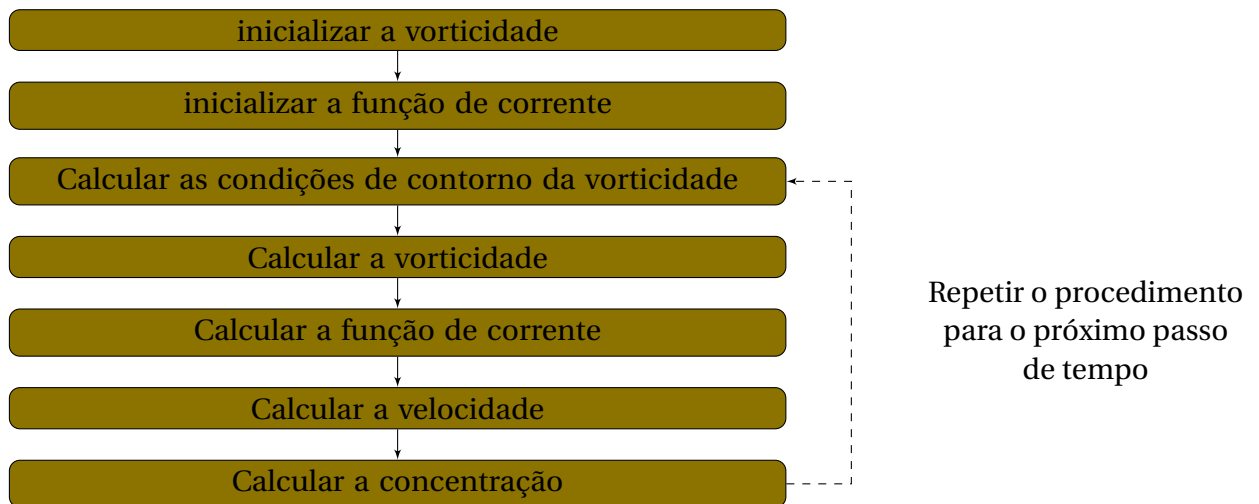


Figura 10: Algoritmo de solução da formulação corrente-vorticidade com transporte de espécie química

Com o intuito de facilitar a implementação do mesmo em outra pesquisa, descreveremos cada passo do algoritmo detalhadamente. As equações estão em sua forma matricial:

1. Inicializar a vorticidade com a equação:

$$Mw = G_x v - G_y u$$

2. Inicializar a função de corrente com a equação:

$$\left[K_{xx} + K_{yy} \right] \psi = Mw$$

É necessário aplicar as condições de contorno de ψ na matriz a esquerda da equação zerando suas linhas e colunas e a contribuição das colunas dos índices de contorno no vetor a direita da equação, conforme explicado na seção anterior.

3. Calcular as condições de contorno da vorticidade utilizando a equação:

$$Mw = G_x v - G_y u$$

Após resolvermos esta equação, possuímos os valores de w para todos os nós do domínio, mas usaremos apenas os nós do contorno para zerar as linhas e as colunas da matriz da equação da vorticidade e sua contribuição no lado direito. Deve-se garantir que a matriz LHS seja inicializada em sua forma original em cada passo de tempo. Para isso, é feito a cada passo de tempo:

```
-----
LHS_w = sps.lil_matrix.copy(M)/dt
-----
```

O script para zerar as linhas e as colunas é semelhante à aplicação da condição de Dirichlet que foi explicado na seção anterior, exceto à utilização do vetor auxiliar bc_1 que foi substituído pelo w calculado na equação $Mw = G_x v - G_y u$

```
-----
for mm in ibc:                                | loop sobre os nós do contorno de w
    bc_dirichlet = LHS[:,mm]*w[mm]           | o vetor bc_1 é substituído por w
    LHS[:,mm] = 0.0
    LHS[mm,:] = 0.0
    LHS[mm,mm] = 1.0
    bc_dirichlet[mm] = w[mm]                 | o vetor bc_1 é substituído por w
-----
```

4. Calcular a vorticidade pela equação:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\Delta t} w^{n+1} = & \frac{M}{\Delta t} w^n - u \cdot G_x w^n - v \cdot G_y w^n - \frac{1}{Re} \left[K_{xx} + K_{yy} \right] w^n \\ & - u \frac{\Delta t}{2} \left[u K_{xx} + v K_{yx} \right] w^n - v \frac{\Delta t}{2} \left[u K_{xy} + v K_{yy} \right] w^n \end{aligned}$$

Onde w^n é a vorticidade calculada no passo de tempo anterior e w^{n+1} é a vorticidade que será calculada no passo de tempo em análise. É necessário aplicar as condições

de contorno de w na matriz a esquerda da equação zerando suas linhas e colunas e a contribuição das colunas dos índices de contorno no vetor a direita da equação, como foi explicado no passo 3.

5. Calcular a função de corrente pela equação:

$$\left[K_{xx} + K_{yy} \right] \psi = Mw$$

É necessário aplicar as condições de contorno de ψ na matriz a esquerda da equação zerando suas linhas e colunas e a contribuição das colunas dos índices de contorno no vetor a direita da equação, conforme explicado na seção anterior.

6. Calcular a velocidade pela equação:

$$Mu = G_y \psi$$

$$Mv = -G_x \psi$$

É necessário aplicar as condições de contorno de u e v em suas respectivas matrizes a esquerda de cada equação zerando suas linhas e colunas e a contribuição das colunas dos índices de contorno no vetor a direita de cada equação, conforme explicado na seção anterior.

7. Calcular a concentração pela equação:

$$\begin{aligned} \frac{M}{\Delta t} c^{n+1} = & \frac{M}{\Delta t} c^n - u \cdot G_x c^n - v \cdot G_y c^n - \frac{1}{ReSc} \left[K_{xx} + K_{yy} \right] c^n \\ & - u \frac{\Delta t}{2} \left[u K_{xx} + v K_{yx} \right] c^n - v \frac{\Delta t}{2} \left[u K_{xy} + v K_{yy} \right] c^n \end{aligned}$$

Onde c^n é a concentração calculada no passo de tempo anterior e c^{n+1} é a concentração que será calculada no passo de tempo em análise. É necessário aplicar as condições de contorno de c na matriz a esquerda da equação zerando suas linhas e colunas e a contribuição das colunas dos índices de contorno no vetor a direita da equação, conforme explicado na seção anterior.

8. Retornar ao passo 3 e repetir o procedimento para outro passo de tempo.

Os passos 1 e 2 ficam fora do *loop* do tempo, enquanto os passos de 3 a 7 encontram-se dentro do *loop*. O procedimento para zerar as linhas e as colunas das matrizes globais pode ser feito antes do *loop*, exceto para o caso da vorticidade em que a cada passo de tempo devemos zerar as linhas e as colunas das matrizes globais e atribuir a contribuição dessas colunas no vetor a direita da equação.

A seguir será apresentado o *script* usado na solução da equação da vorticidade. A mesma ideia foi realizada para cada equação de governo, alterando apenas o vetor do lado direito e as contribuições das condições de contorno. Foi utilizado um método iterativo de solução para sistemas lineares conhecido como *Gradientes Conjugados*.

```
-----
RHS = sps.lil_matrix.dot(np.copy(M)/dt,w)\
      - np.multiply(vx,sps.lil_matrix.dot(Gx,w))\
      - np.multiply(vy,sps.lil_matrix.dot(Gy,w))\
      - (1.0/Re)*sps.lil_matrix((Kxx+Kyy),w)\
      - (dt/2.0)*np.multiply(u,(np.multiply(u,sps.lil_matrix.dot(Kxx,w))\
                                   + np.multiply(v,sps.lil_matrix.dot(Kyx,w))))\
      - (dt/2.0)*np.multiply(v,(np.multiply(u,sps.lil_matrix.dot(Kxy,w))\
                                   + np.multiply(v,sps.lil_matrix.dot(Kyy,w))))

RHS = RHS + (1/Re)*bc_neumann
RHS = np.multiply(RHS,bc_2)
RHS = RHS + bc_dirichlet

w = scipy.sparse.linalg.cg(LHS,RHS,w, maxiter=1.0e+05, tol=1.0e-05)
w = w[0].reshape((len(w[0]),1))
-----
```

Onde *RHS* é o vetor do lado direito da equação e significa *right hand side* e *bc_2* é um vetor auxiliar no qual garante que somente os nós sem condição de Dirichlet sejam resolvidos. Ele consiste em um vetor com dimensões *np* onde possui o valor de 1 nos índices cujos nós não possuem condição de Dirichlet e o valor 0 nos índices restantes, isto é, os nós que possuem condição de Dirichlet. Vale ressaltar que o vetor *bc_2* é diferente para cada equação já que os

contornos cuja condição é de Dirichlet variam de equação para equação, ou seja, o vetor bc_2 da equação da vorticidade é diferente da equação de concentração. O primeiro bloco do *script* acima consiste no lado direito da equação (3.112). O segundo bloco refere-se a contribuição das condições de Neumann (para esta simulação é nula) e de Dirichlet, além da aplicação do vetor auxiliar bc_2 . O terceiro bloco consiste na solução da equação pelo método iterativo dos *Gradientes Conjugados*.

5 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NUMÉRICO

5.1 Introdução

Apresentaremos neste capítulo os resultados de quatro casos obtidos com a simulação numérica da equação Navier-Stokes utilizando a formulação corrente-vorticidade com a equação de transporte de espécie química onde possuímos escoamentos bidimensionais incompressíveis e monofásicos para todos os casos. A primeira seção trata-se do *Escoamento de Couette* e a solução numérica é comparada com a solução analítica. Já a segunda a seção trata-se do *Escoamento de Poiseuille* e a solução numérica também é comparada com a solução analítica. A terceira seção refere-se ao escoamento de *Poiseuille* em meio domínio onde a condição de livre escorregamento é aplicada sobre o eixo de simetria. A quarta seção refere-se ao escoamento em uma cavidade com tampa deslizante (*lid-driven cavity flow*) e a solução é comparada com os resultados apresentados por Ghia [4] e Marchi [5]. Já na quinta seção é apresentado a comparação dos esquemas Galerkin e Taylor-Galerkin do transporte de um escalar submetido a um escoamento puramente convectivo.

Todas as simulações numéricas foram realizadas nos computadores do *Laboratório de Ensaio Numéricos (LEN)* do *Grupo de Estudos e Simulações Ambientais em Reservatórios (GESAR)* com a seguinte configuração:

- AMD FX-8350 4GHz com 8 núcleos, 32Gb de Memória RAM, 1000Gb de HD. Sistema operacional LINUX Ubuntu 16.04 LTS, utilizando a linguagem Python 2.7

5.2 Escoamento de Couette

Um escoamento monofásico, permanente e plenamente desenvolvido de um fluido newtoniano e incompressível entre placas horizontais paralelas onde a placa inferior se desloca com velocidade U_{bottom} enquanto a placa superior se desloca com velocidade U_{top} é conhecido como *Escoamento de Couette*. A Figura 11 apresenta esquematicamente este escoamento e o perfil do campo de velocidade esperado.

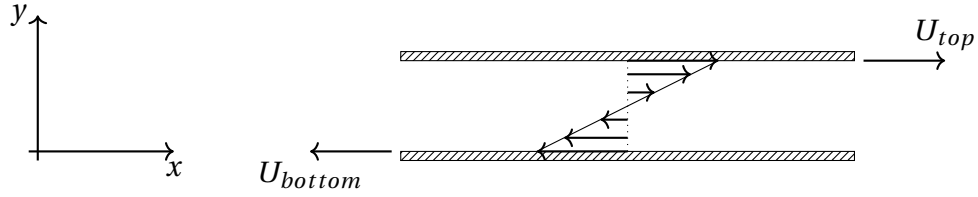


Figura 11: Escoamento de Couette

O perfil de velocidade que este escoamento adquire é dado pela equação abaixo:

$$u = [U_{top} - U_{bottom}] \frac{y}{L} + U_{bottom} \quad (5.1)$$

Onde U_{top} é a velocidade que a placa superior se desloca e seu valor é $U_{top} = 1$, U_{bottom} é a velocidade que a placa inferior se desloca e seu valor é $U_{bottom} = -1$, L é a largura não dimensional entre as placas e seu valor é $L = 1$ e y é a distância entre as placas e varia entre $y = [0, 1]$. O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear com 3835 nós e 7299 elementos.

As condições de contorno utilizadas foram:

- *condição de entrada:* nenhum valor é especificado. As derivadas das componentes tangencial e normal da velocidade e da função de corrente possuem o valor nulo, isto é, $\partial u / \partial n = 0$, $\partial v / \partial n = 0$ e $\partial \psi / \partial n = 0$ respectivamente.
- *condição de movimentação da parede:* esta condição é utilizada na placa superior e inferior, onde todas as componentes da velocidade e da função de corrente são especificadas. Para a parede superior, $u = U_{top}$, $v = 0$ e $\psi = 0$, onde $U_{top} = 1$. Para a parede inferior, $u = U_{bottom}$, $v = 0$ e $\psi = 0$, onde $U_{bottom} = -1$.
- *condição de saída:* assim como na entrada, nenhum valor é especificado. As derivadas das componentes tangencial e normal da velocidade e da função de corrente possuem o valor nulo, isto é, $\partial u / \partial n = 0$, $\partial v / \partial n = 0$ e $\partial \psi / \partial n = 0$ respectivamente.

A Figura 12 apresenta a evolução do perfil de velocidade no tempo quando o $Re = 100$, além do comparativo entre a solução numérica e a solução analítica no estado permanente do problema proposto. Podemos concluir que o código numérico produziu um resultado bem satisfatório.

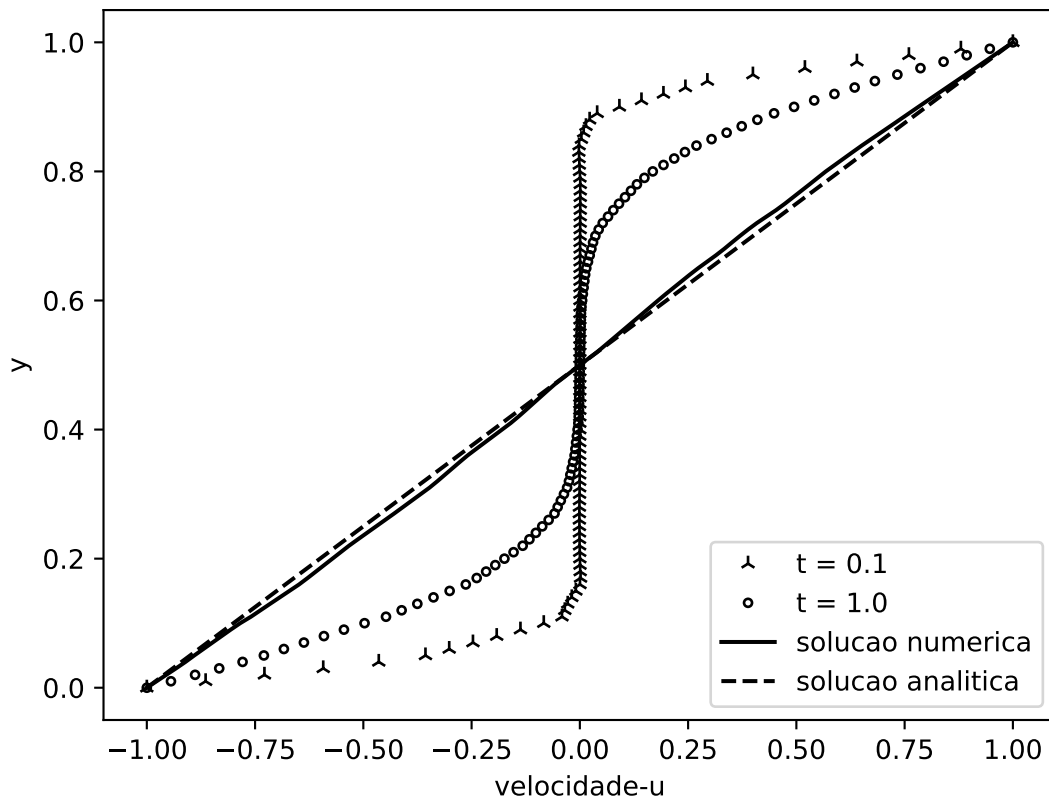


Figura 12: Evolução do perfil de velocidade no tempo para $Re = 100$ e a comparação da solução numérica com a solução analítica.

5.3 Escoamento de Poiseuille

Um escoamento monofásico, permanente e plenamente desenvolvido de um fluido newtoniano e incompressível entre placas horizontais paralelas e imóveis é mantido em virtude de um gradiente de pressão $\partial p / \partial x$ imposto conforme mencionado por Pontes [30]. Este escoamento é conhecido como *Escoamento de Poiseuille*. A Figura 13 apresenta esquematicamente este escoamento e o perfil do campo de velocidade esperado.

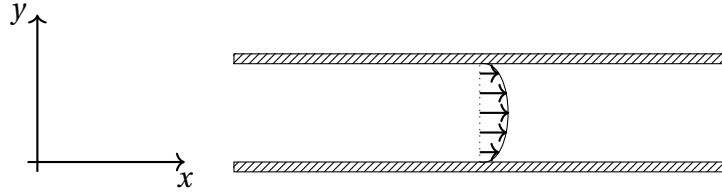


Figura 13: Escoamento de Poiseuille

O perfil de velocidade que este escoamento adquire é dado pela equação abaixo:

$$u = \frac{4u_{max}}{L^2} y[L - y] \quad (5.2)$$

Onde u_{max} é a velocidade máxima e seu valor é $u_{max} = 1.5$, L é a largura não dimensional entre as placas e seu valor é $L = 1$ e y é a distância entre as placas e varia entre $y = [0, 1]$. O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear com 3835 nós e 7299 elementos.

As condições de contorno utilizadas foram:

- *condição de entrada*: a componente normal da velocidade $v = 0$ enquanto a componente tangencial da velocidade é $u = 1$. A função de corrente também é especificada e seu valor é definido segundo a equação da continuidade para um fluido incompressível. Dessa forma, seu valor será $\psi = y$.
- *condição de não escorregamento*: esta condição é utilizada nas placas, onde todas as componentes da velocidade são especificadas com os valores $u = 0$ and $v = 0$. A função de corrente também é especificado com os valores $\psi = 1$ na parede superior e $\psi = 0$ na parede inferior.

- *condição de saída*: O valor da função de corrente é especificado $\psi = y$. As derivadas das componentes tangencial e normal da velocidade possuem o valor nulo, isto é, $\partial u / \partial n = 0$ e $\partial v / \partial n = 0$ respectivamente.

A Figura 14 apresenta a evolução do perfil de velocidade no tempo quando o $Re = 100$, além do comparativo entre a solução numérica e a solução analítica no estado permanente do problema proposto. Podemos concluir que o código numérico produziu um resultado bem satisfatório.

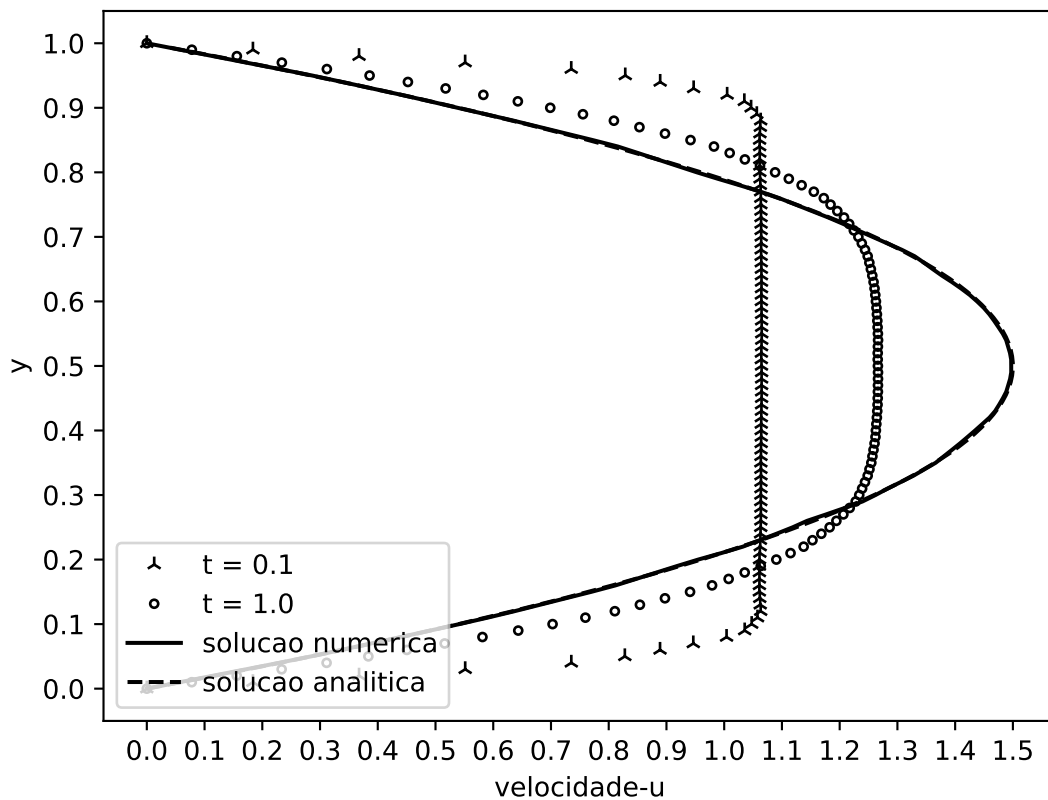


Figura 14: Evolução do perfil de velocidade no tempo para $Re = 100$ e a comparação da solução numérica com a solução analítica.

5.4 Escoamento de Poiseuille em Meio Domínio

Nesta seção é apresentado a simulação do escoamento de *Poiseuille* na metade do domínio. Dessa forma, a condição de contorno de superfície livre de escorregamento é necessária no eixo de simetria. A Figura 15 apresenta esquematicamente este escoamento com o eixo de simetria especificado e o perfil do campo de velocidade esperado.

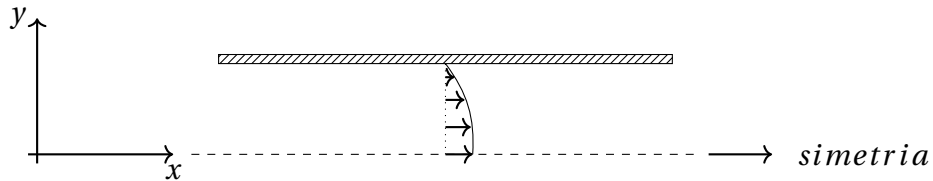


Figura 15: Escoamento de Poiseuille em Meio Domínio

O perfil de velocidade que este escoamento adquire é dado pela equação abaixo:

$$u = u_{max} \left[1 - \frac{y^2}{L^2} \right] \quad (5.3)$$

Onde u_{max} é a velocidade máxima e seu valor é $u_{max} = 1.5$, L é a largura não dimensional entre a placa e o eixo de simetria, seu valor é $L = 1$ e y é a distância entre a placas e o eixo de simetria, a mesma varia entre $y = [0, 1]$. O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear com 3835 nós e 7299 elementos.

As condições de contorno utilizadas foram:

- *condição de entrada:* a componente normal da velocidade $v = 0$ enquanto a componente tangencial da velocidade é $u = 1$. A função de corrente também é especificada e seu valor é definido segundo a equação da continuidade para um fluido incompressível. Dessa forma, seu valor será $\psi = y$.
- *condição de não escorregamento:* esta condição é utilizada na placa superior, onde todas as componentes da velocidade são especificadas com os valores $u = 0$ and $v = 0$. A função de corrente também é especificado com o valor $\psi = 1$.
- *condição de saída:* O valor da função de corrente é especificado $\psi = y$. As derivadas das componentes tangencial e normal da velocidade possuem o valor nulo, isto é, $\partial u / \partial n = 0$ e $\partial v / \partial n = 0$ respectivamente.

- *condição de livre escorregamento*: esta condição é utilizada no eixo de simetria. A componente normal da velocidade e a função de corrente possuem seus valores especificados, tais como $v = 0$ e $\psi = 0$ respectivamente. A derivada da componente tangencial da velocidade possui o valor nulo $\partial u / \partial n = 0$.

A Figura 16 apresenta a evolução do perfil de velocidade no tempo quando o $Re = 100$, além do comparativo entre a solução numérica e a solução analítica no estado permanente do problema proposto. É possível observar um pequeno desvio entre a solução numérica e a solução analítica próximo ao eixo de simetria.

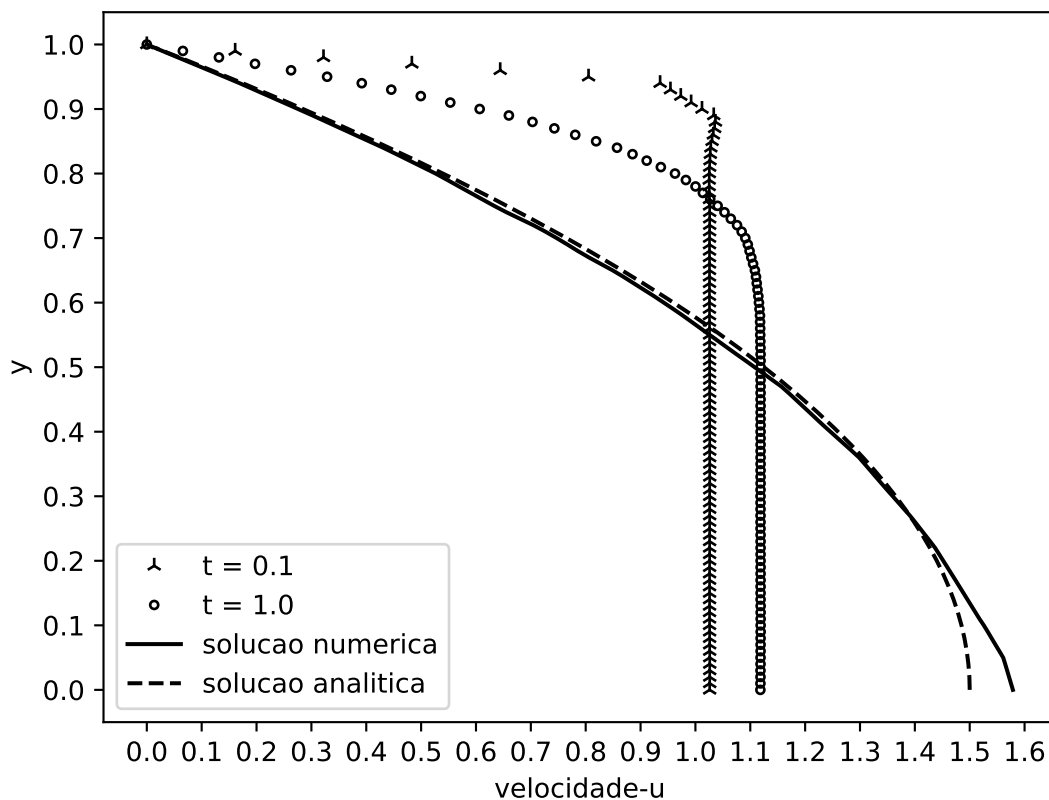


Figura 16: Evolução do perfil de velocidade no tempo para $Re = 100$ e a comparação da solução numérica com a solução analítica.

5.5 Escoamento em uma Cavidade com Tampa Móvel

Um escoamento numa cavidade onde as paredes laterais e inferior permanecem imóveis e a tampa se desloca com velocidade constante tal como $U_{top} = 1$ é conhecido como *Escoamento em uma Cavidade de Tampa Móvel* (*lid-driven cavity flow*). A Figura 17 apresenta esquematicamente este escoamento e o perfil do campo de velocidade esperado.

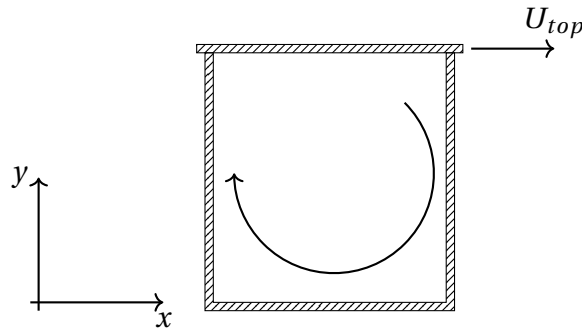


Figura 17: Escoamento em uma Cavidade com tampa móvel

Foram simulados os escoamentos com os seguintes número de Reynolds (Re): 10, 100, 400 e 1000. Os resultados obtidos foram comparados com Ghia [4] e Marchi [5]. O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear com 1563 nós e 2988 elementos.

As condições de contorno utilizadas foram:

- *condição de não escorregamento*: esta condição é utilizada nas placas laterais e inferior, onde todas as componentes da velocidade são especificadas com os valores $u = 0$ e $v = 0$. A função de corrente também é especificado com o valor de $\psi = 0$.
- *condição de movimentação da parede*: esta condição é utilizada na placa superior, onde todas as componentes da velocidade são especificadas com os valores $u = 1$ e $v = 0$. A função de corrente também é especificado com o valor de $\psi = 0$.

As Figura 18 e Figura 19 apresentam o perfil de u e de v , respectivamente, em regime permanente para vários números de Reynolds. Os resultados obtidos são comparados com os resultados de Ghia [4] e Marchi [5]. Na Figura 20, é apresentado os contornos da função de corrente para os Reynolds analisados. Podemos concluir que o código numérico produziu um resultado satisfatório.

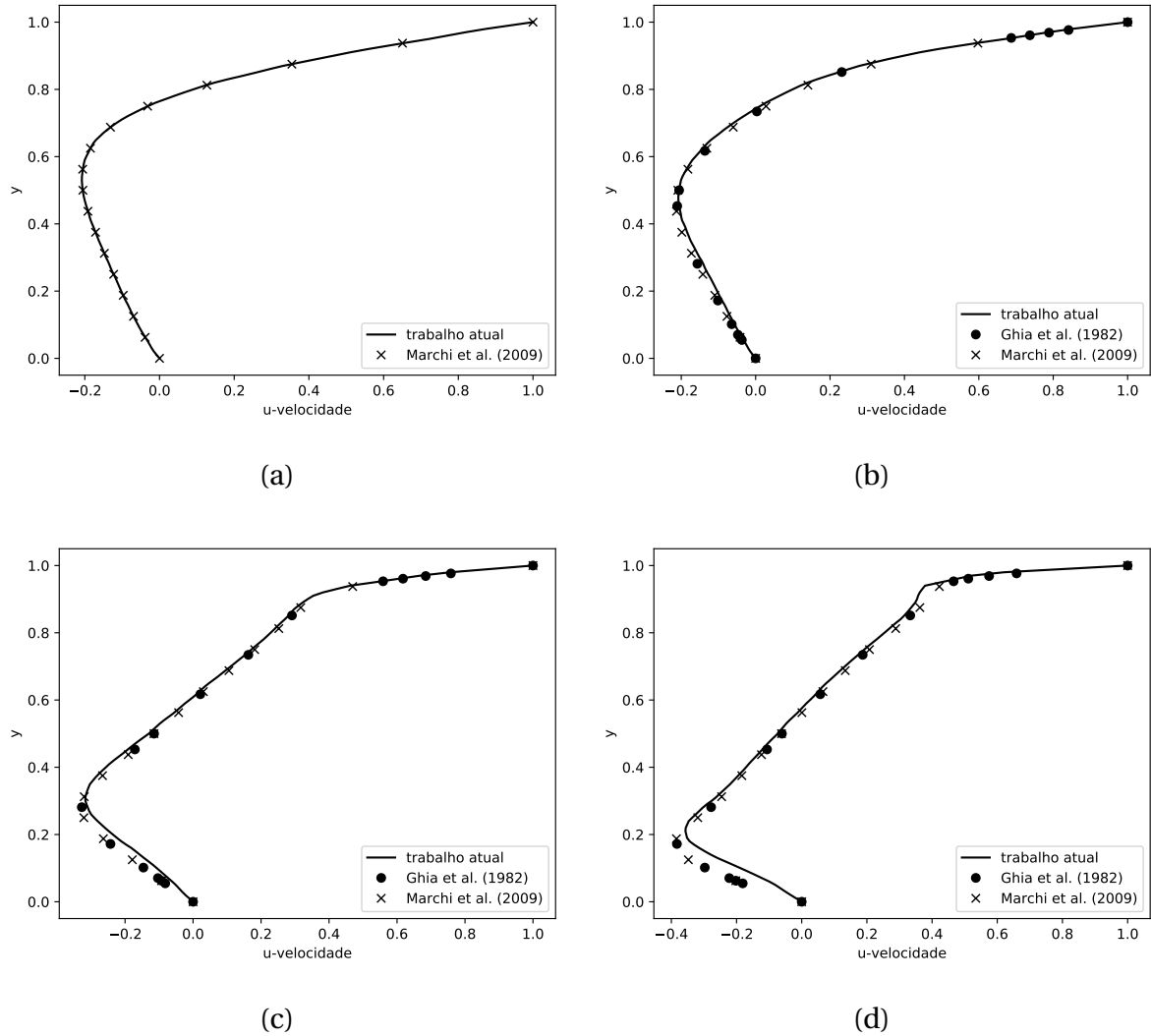
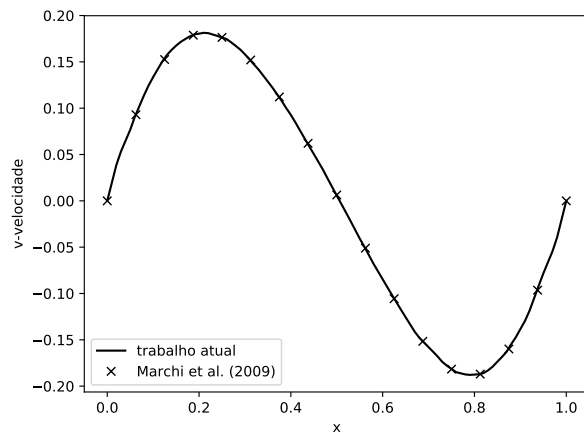
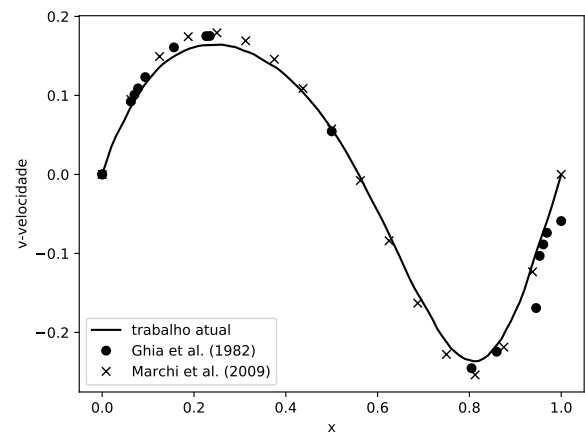


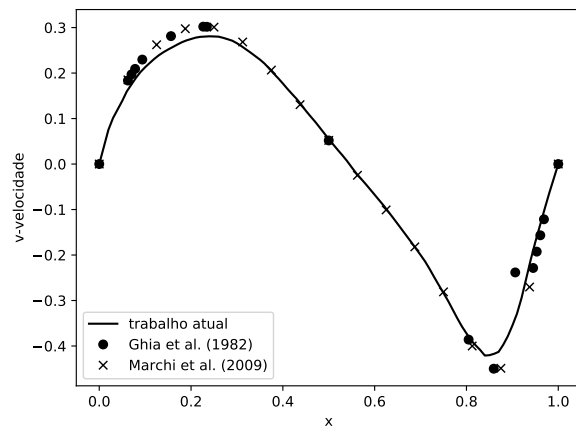
Figura 18: Perfil de u na linha central da cavidade ($x = 0.5$) com diferentes Reynolds: (a) 10 (b) 100 (c) 400 (d) 1000.



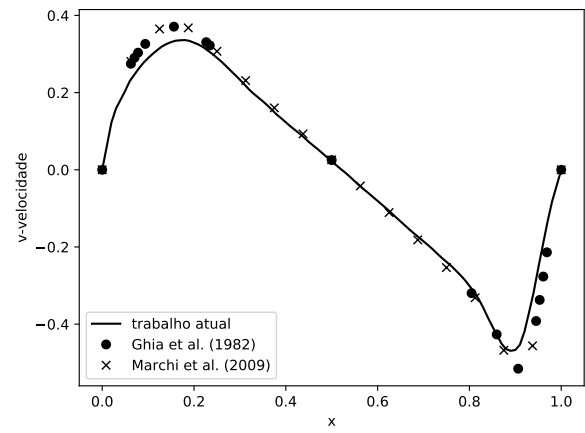
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 19: Perfil de v na linha central da cavidade ($y = 0.5$) com diferentes Reynolds: (a) 10 (b) 100 (c) 400 (d) 1000.

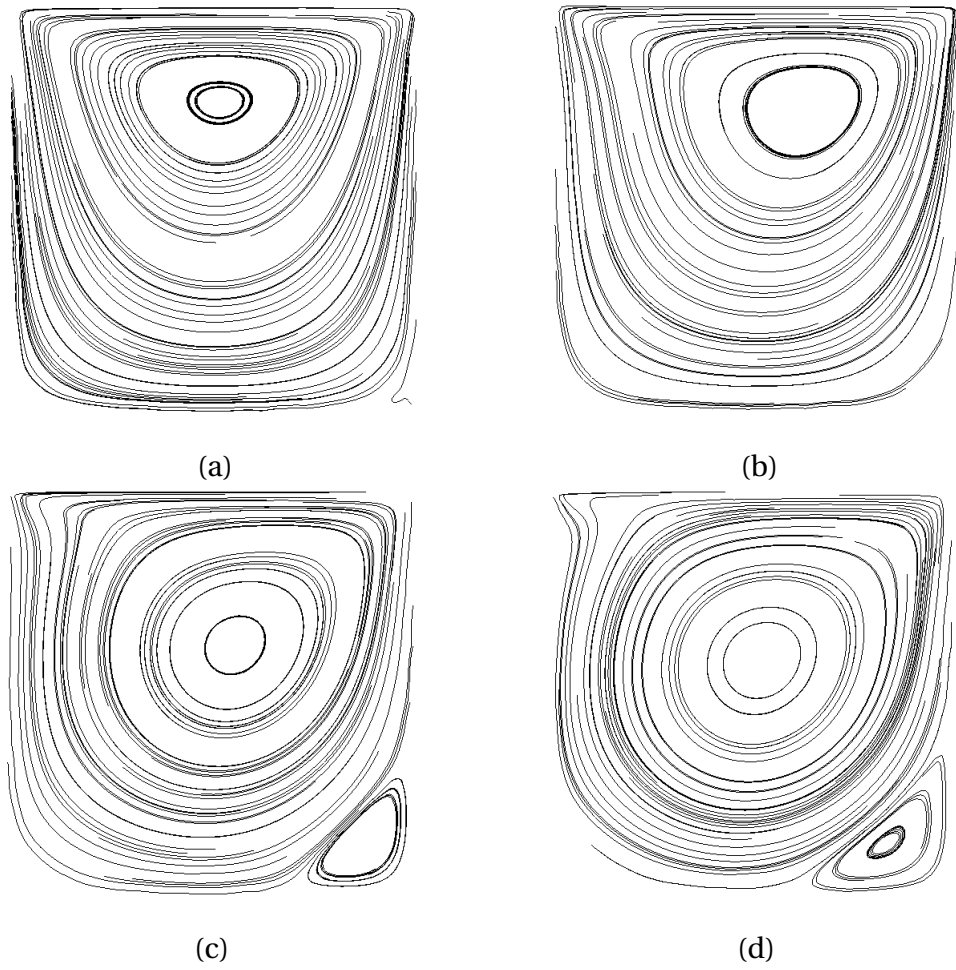


Figura 20: Os contornos da função de corrente para os Reynolds: (a) 10 (b) 100 (c) 400 (d) 1000.

5.6 Escoamento Puramente Convectivo

O transporte de um escalar segundo uma função parabólica e submetido a um escoamento monofásico de um fluido newtoniano e incompressível com elevado número de *Reynold* ($Re = \infty$) é conhecido como um *Escoamento Puramente Convectivo*. Neste tipo de escoamento, espera-se que não ocorra difusão do escalar. Para os métodos de aproximação como *MEF* e *MDF*, é possível observar a presença de oscilações espúrias. Como mencionado anteriormente, diversos esquemas podem ser utilizados para reduzir essas oscilações. Apresentaremos nesta seção a utilização do esquema de *Taylor-Galerkin* na redução das oscilações espúrias em comparação ao esquema *Galerkin*. A Figura 21 apresenta esquematicamente o problema e a dinâmica do transporte do escalar.

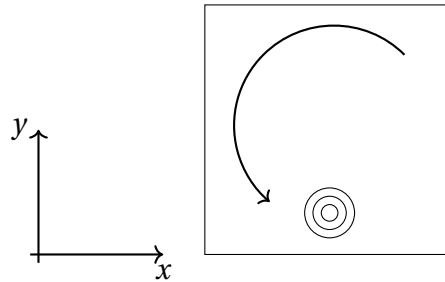


Figura 21: Transporte de um escalar num Escoamento Puramente Convectivo

O domínio foi discretizado utilizando uma malha triangular linear com 1231 nós e 2340 elementos. A equação que governa o escoamento puramente convectivo de um escalar qualquer c é definida como:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = 0 \quad (5.4)$$

Onde $\mathbf{v} = (u, v)$ é o vetor velocidade e suas componentes são definidas como: $u = -y$ e $v = x$. Portanto, espera-se que dado um campo escalar inicial, o mesmo seja deslocado pelo campo de velocidade sem que ocorra difusão, isto é, seu perfil não deve ser alterado enquanto o escoamento acontece. Qualquer alteração no perfil do campo escalar é considerado como erro numérico.

As condições de contorno e inicial utilizadas foram:

- *condição de contorno*: o campo escalar c é especificado com o valor $c = 0$ no contorno da geometria.
- *condição inicial*: o campo escalar é definido segundo a função parabólica $c = 1 - x^2 - y^2$.

A Figura 22 apresenta a comparação do perfil do campo escalar c para os esquemas Galerkin e Taylor-Galerkin em diferentes posições no eixo de rotação conforme o escoamento ocorre. É possível observar que em ambos os esquemas é apresentado oscilações espúrias. No esquema Taylor-Galerkin, porém, tais oscilações são amortecidas diferentemente do esquema Galerkin onde podemos observar que as oscilações espúrias aumentam e o perfil do campo escalar torna-se completamente distorcido.

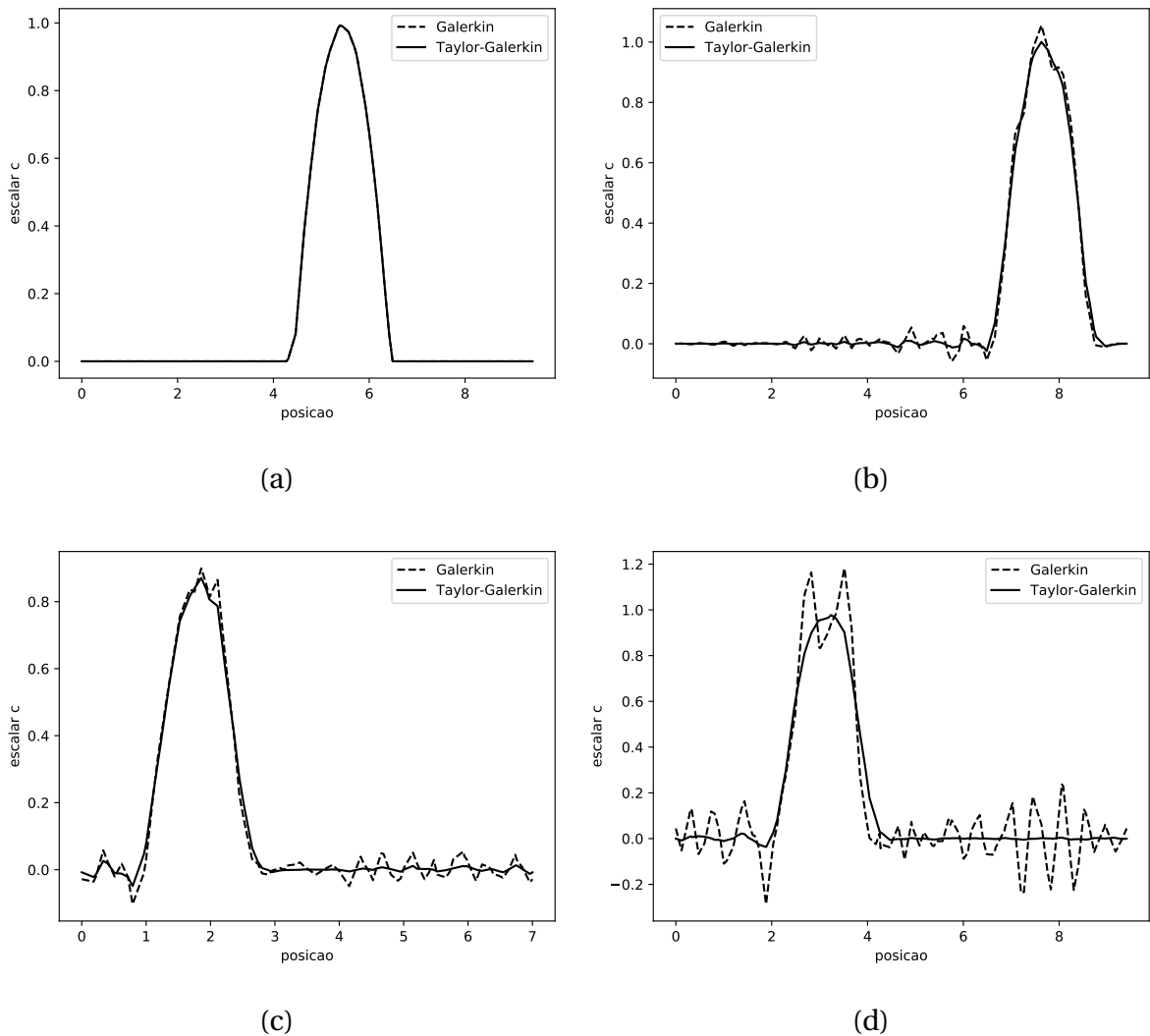


Figura 22: Comparação do perfil de c para os esquemas Galerkin e Taylor-Galerkin em diferentes posições do eixo de rotação: (a) ponto inicial, (b) 1/4 da rotação, (c) 1/2 da rotação e (d) 3/4 da rotação.

As Figura 23 e Figura 24 apresentam a disposição espacial das oscilações espúrias para os esquemas Galerkin e Taylor-Galerkin respectivamente. Como mencionado anteriormente, as oscilações apresentadas no esquema Galerkin distorcem completamente o campo escalar c enquanto no esquema Taylor-Galerkin as mesmas são amortecidas como esperado. Portanto, para os problemas onde as oscilações espúrias estão presentes, o esquema Taylor-Galerkin é superior ao esquema Galerkin.

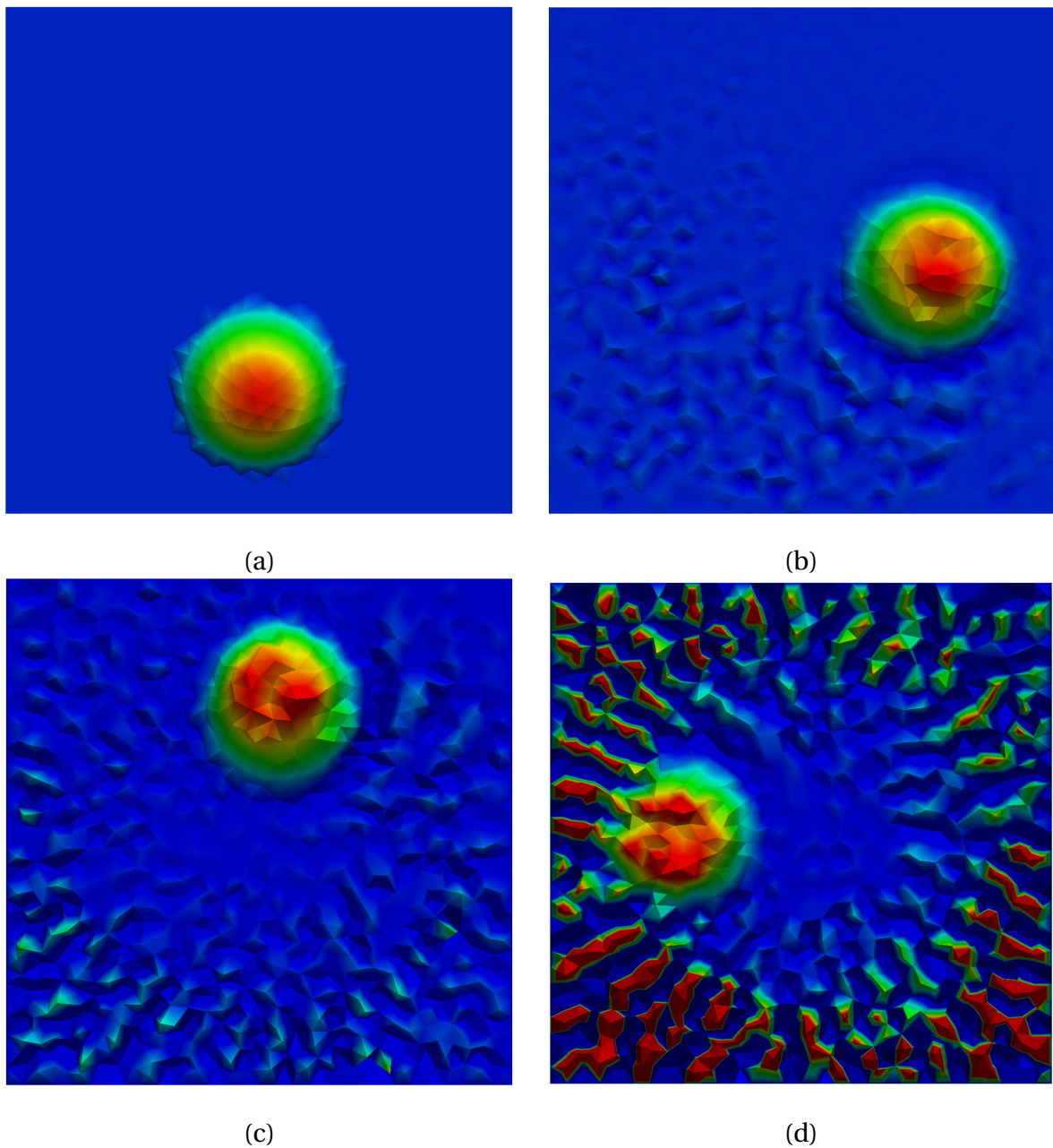


Figura 23: Oscilações espúrias para o esquema Galerkin em diferentes posições do eixo de rotação: (a) ponto inicial, (b) $1/4$ da rotação, (c) $1/2$ da rotação e (d) $3/4$ da rotação.

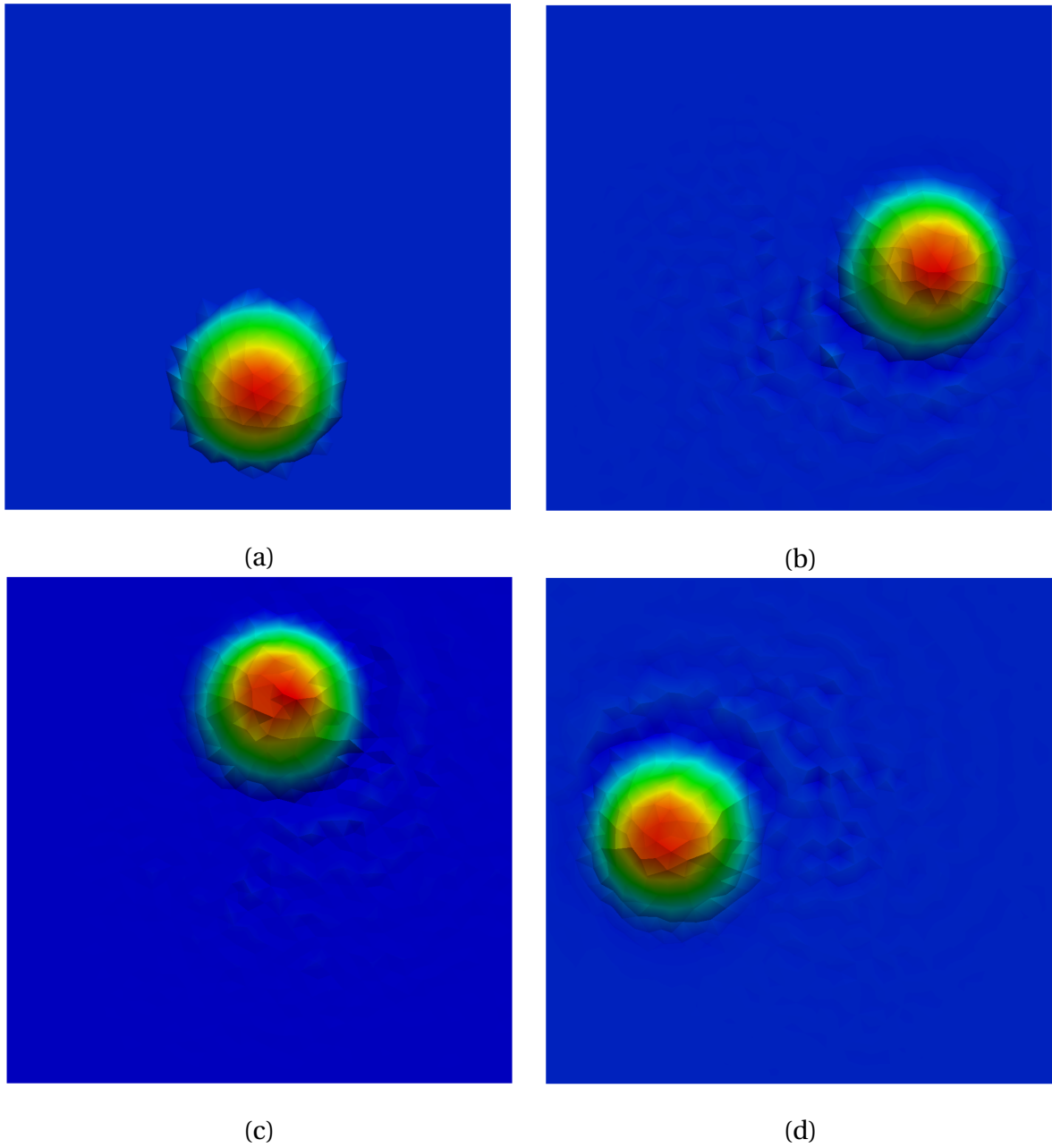


Figura 24: Oscilações espúrias para o esquema Taylor-Galerkin em diferentes posições do eixo de rotação: (a) ponto inicial, (b) 1/4 da rotação, (c) 1/2 da rotação e (d) 3/4 da rotação.

6 RESULTADOS

6.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado os resultados da simulação numérica para o escoamento sanguíneo em uma artéria coronária. O raio do lúmen da artéria coronariana é $R = 0.0015m$, a viscosidade é $\mu = 0.0035Pa.s$ e a massa específica é $\rho = 1060kg/m^3$ como sugerido por Bozsak [13]. De acordo com Kessler [43], a velocidade do sangue na artéria coronária é $u = 12cm/s$. Dessa forma, o número de Reynolds utilizado será $Re = 54.5$.

A equação Navier-Stokes é utilizada segundo a formulação corrente-vorticidade com o acoplamento da equação de transporte de espécie química para quatro geometrias propostas por Wang [6], porém modificadas para coordenadas cartesianas como apresentado na Figura 25. Na primeira seção, a artéria coronária com aterosclerose é modelada como um escoamento em um canal curvado. Na segunda seção, é apresentado a simulação para a artéria coronária com aterosclerose e com stent farmacológico colocado para diversos *Schmidt* tais como $Sc = 1$ e 10. Na terceira seção, é apresentado a simulação de uma artéria coronária real com aterosclerose e na quarta seção, a artéria coronária real com aterosclerose e com stent farmacológico é simulado com diversos números de *Schmidt* como no caso da segunda seção. Devido a simetria, apenas a metade do domínio foi simulado. A visualização da simulação foi feita pelo software livre *Paraview* proposto por Henderson [7].

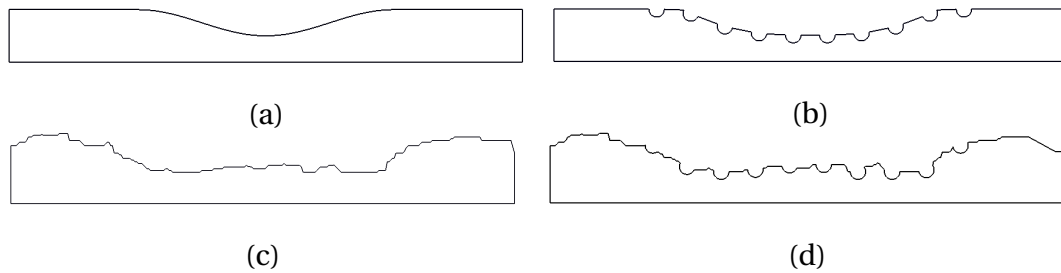


Figura 25: Geometria não dimensional para escoamento sanguíneo em artéria coronária. O raio é $R = 1$ e o comprimento do canal é $L = 10R$. (a) Canal Curvado (b) Canal Curvado com Stent (c) Canal Real e (d) Canal Real com Stent.

As condições de contorno utilizadas nessas simulações foram:

- *condição de entrada*: a componente normal da velocidade é $v = 0$ enquanto a componente tangencial da velocidade é $u = 1$. A função de corrente também é especificada e seu valor é definido segundo a equação da continuidade para um fluido incompressível. Dessa forma, seu valor será $\psi = y$. A derivada da concentração possui o valor nulo $\partial c / \partial n = 0$.
- *condição de não escorregamento*: esta condição é utilizada na parede superior, onde todas as componentes da velocidade são especificadas com os valores $u = 0$ and $v = 0$. A função de corrente também é especificado com o valor de $\psi = 1$. A derivada da concentração possui o valor nulo $\partial c / \partial n = 0$.
- *condição de saída*: O valor da função de corrente é especificado $\psi = y$. As derivadas das componentes tangencial e normal da velocidade e da concentração possuem o valor nulo, isto é, $\partial u / \partial n = 0$, $\partial v / \partial n = 0$ e $\partial c / \partial n = 0$ respectivamente.
- *condição de livre escorregamento*: esta condição é utilizada no eixo de simetria. A componente normal da velocidade e a função de corrente possuem seus valores especificados, tais como $v = 0$ e $\psi = 0$ respectivamente. A derivada da componente tangencial da velocidade e a derivada da concentração possuem também o valor nulo $\partial u / \partial n = 0$ e $\partial c / \partial n = 0$ respectivamente.
- *condição de espécie química*: esta condição é utilizada no stent farmacológico, onde todas as componentes da velocidade são especificadas com os valores $u = 0$ and $v = 0$. A função de corrente e a concentração também são especificados com os valores de $\psi = 1$ e $c = 1$ respectivamente.

Conforme foi informado nas seções anteriores, a condição de contorno do campo de vorticidade é calculado no algoritmo de solução como apresentado na Figura 10.

6.2 Canal Curvado

Para o caso onde a artéria coronária possui aterosclerose, o problema é modelado como um escoamento entre placas retas e paralelas e curvadas. A geometria utilizada promove uma redução suave da distância entre as paredes superior e inferior do canal. Foi considerado 40% de obstrução do canal devido a aterosclerose e o domínio foi discretizado com 10261 nós e 23049 elementos triangulares lineares.

A Figura 26 apresenta o perfil de velocidade transiente ao longo da coordenada y no meio do canal ($x = 5R$). Como podemos observar, o valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.3$ quando a artéria possui aterosclerose, isto é, há um aumento de 53% da velocidade máxima quando comparado com a artéria sem aterosclerose como apresentado na Figura 16.

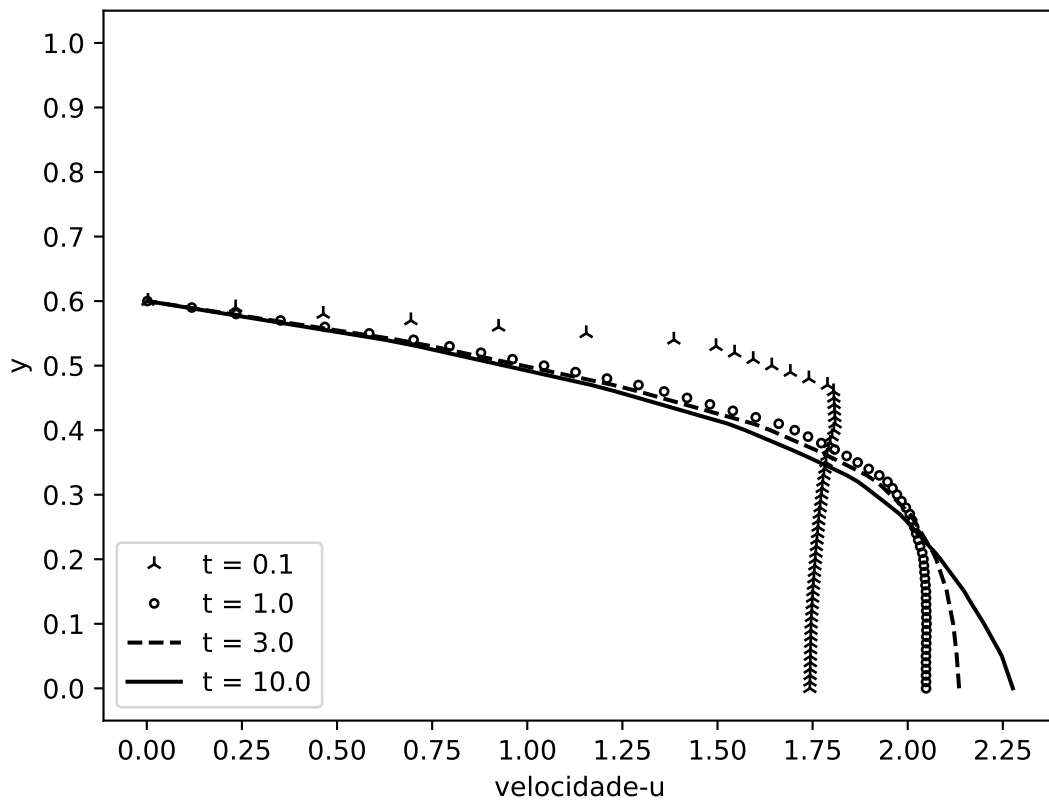


Figura 26: Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Curvado.

A Figura 27 apresenta a evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para a metade do domínio já que os resultados são simétricos na direção y . O campo de velocidade é representado com os valores adimensionais onde a cor vermelha se refere ao valor $u = 2.3$ e a cor azul $u = 0$. Transformando em valores dimensionais temos $u = 27.6\text{cm/s}$ e $u = 0\text{cm/s}$ respectivamente.

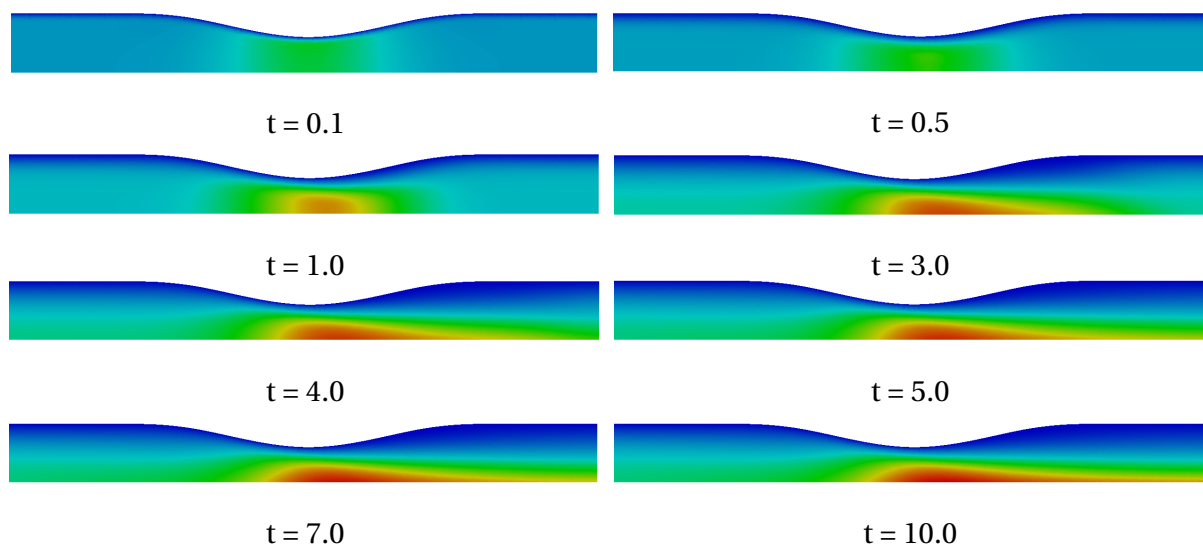


Figura 27: Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Curvado.

6.3 Canal Curvado com Stent Farmacológico

Para este caso, o stent farmacológico é colocado na parte superior do canal curvado. O mesmo é modelado por 10 semi círculos uniformemente espaçados. Assim como no caso anterior, foi considerado uma obstrução de 40% do canal devido a aterosclerose e o domínio foi discretizado com 15875 nós e 35408 elementos triangulares lineares.

A Figura 28 apresenta o perfil de velocidade transiente ao longo da coordenada y no meio do canal ($x = 5R$). Como podemos observar, o valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 3.6$ quando o stent é implantado, isto é, possuímos um aumento de 56% quando comparado com a artéria apenas com aterosclerose como no caso anterior.

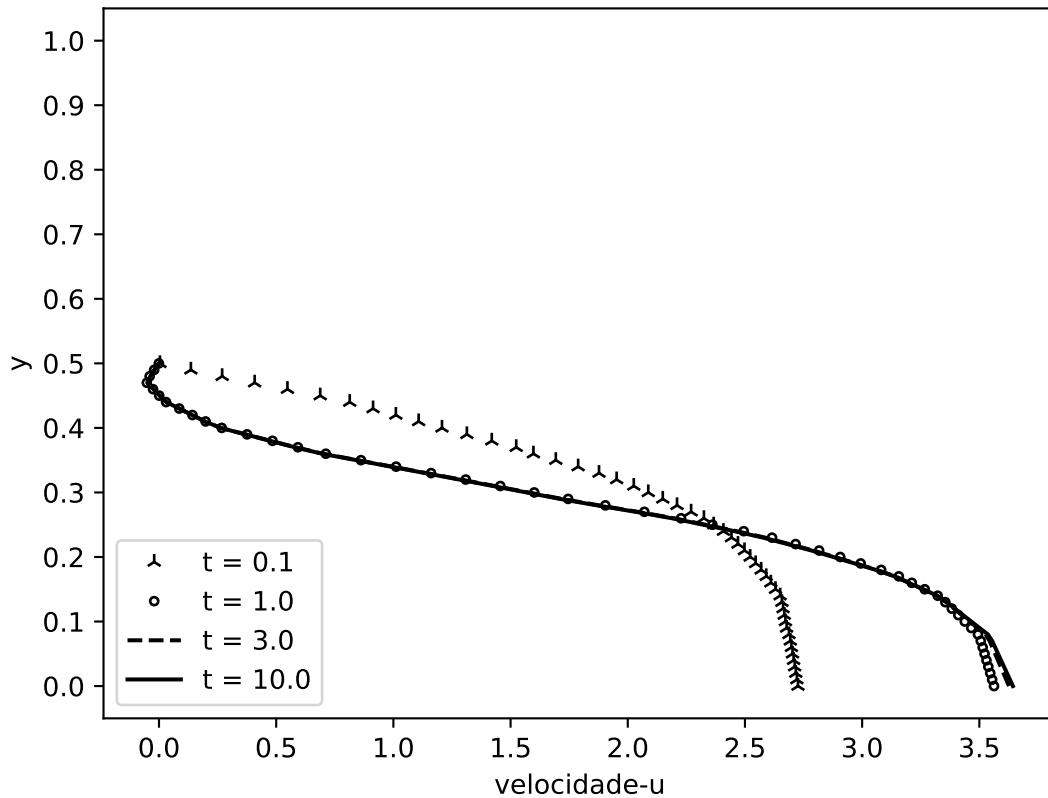


Figura 28: Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Curvado com Stent Farmacológico.

A Figura 29 apresenta a evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para a metade do domínio já que os resultados são simétricos na direção y . O campo de velocidade é representado com os valores adimensionais onde a cor vermelha se refere ao valor $u = 3.6$ e a cor azul $u = 0$. Transformando em valores dimensionais temos $u = 43.2\text{cm/s}$ e $u = 0\text{cm/s}$ respectivamente.

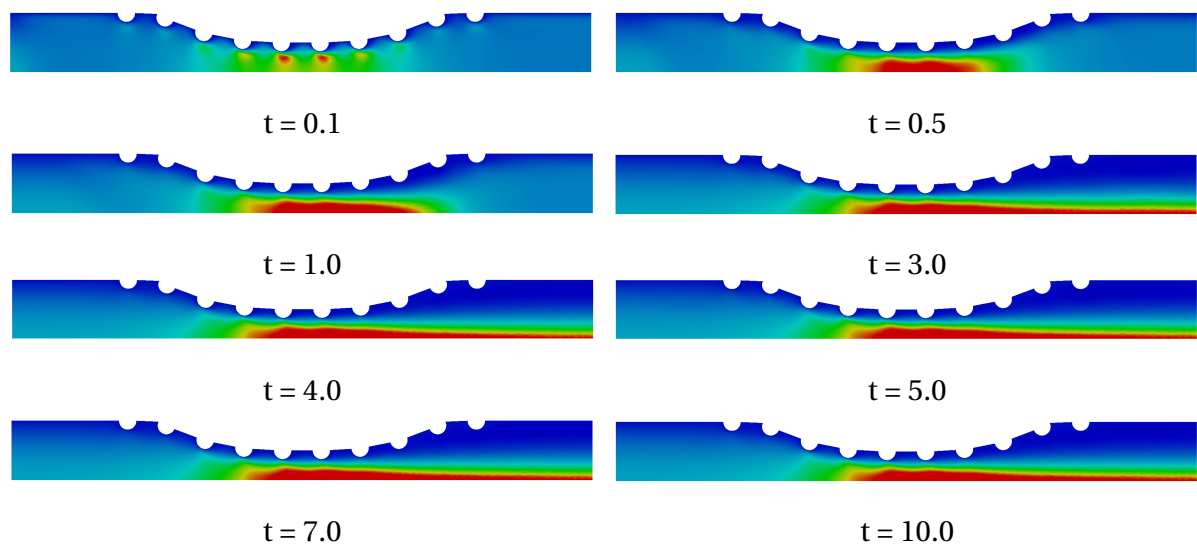


Figura 29: Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Curvado com Stent Farmacológico.

Conforme mencionado por Lucena [14], é estimado que 47% do fármaco é difundido na corrente sanguínea. A Figura 30 e a Figura 31 apresentam a evolução no tempo e no espaço do campo da concentração para a metade do domínio devido a simetria para diversos números de *Schmidt* tais como: 1 e 10 respectivamente. A concentração é representado com os valores adimensionais onde a cor vermelha representa 100% e a cor azul representa 0% dessa concentração que é difundida na corrente sanguínea. É possível observar que o número de Schmidt influencia diretamente no transporte do fármaco na corrente sanguínea. Para elevados valores do número de *Schmidt*, o transporte de espécie química torna-se puramente convectivo.

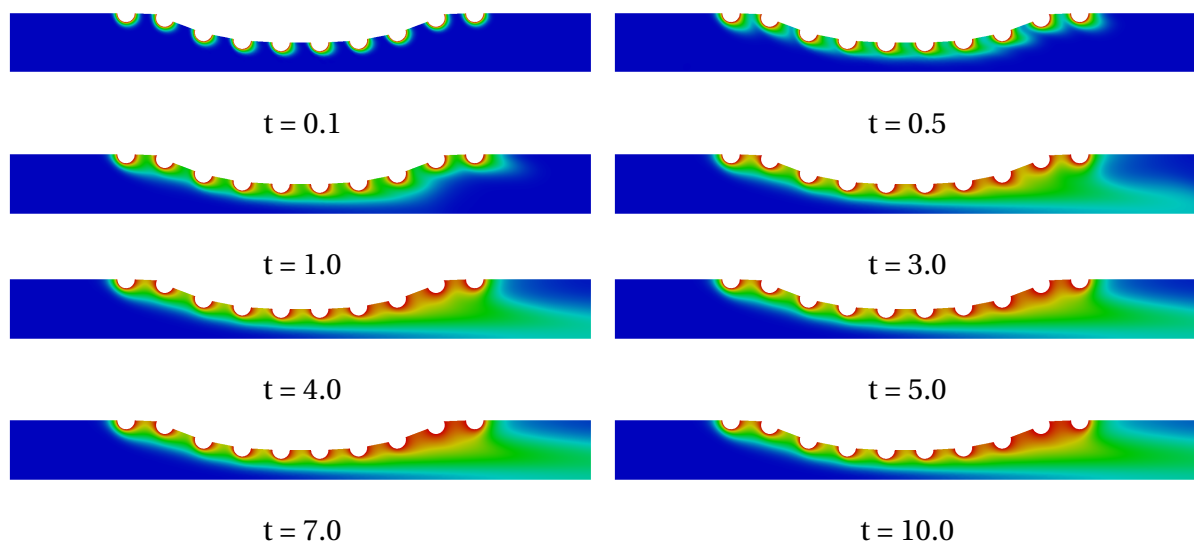


Figura 30: Canal Curvado com Stent Farmacológico cujo $Sc = 1$.

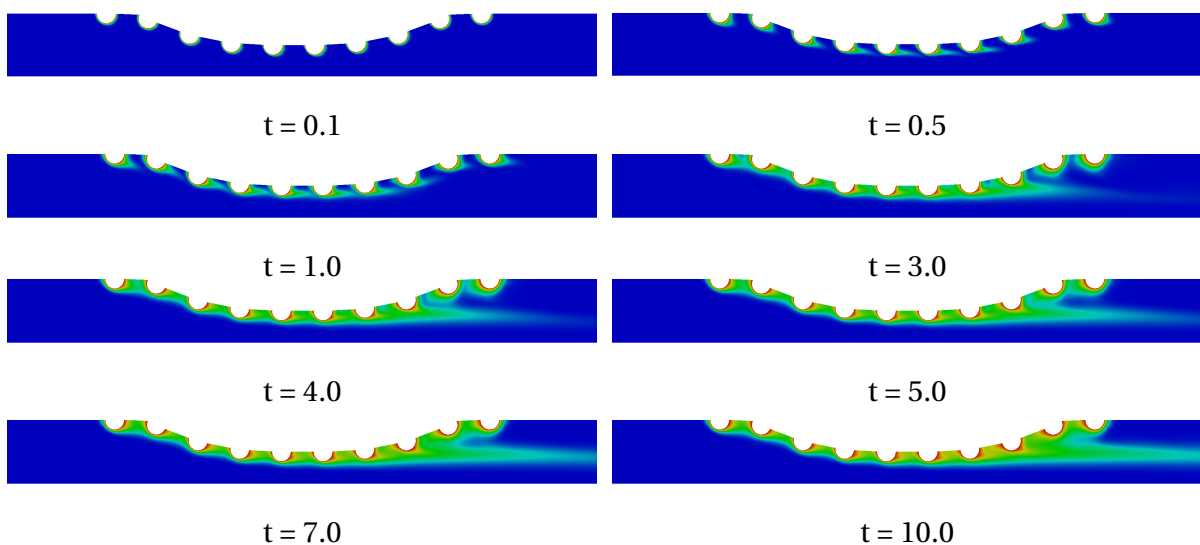


Figura 31: Canal Curvado com Stent Farmacológico cujo $Sc = 10$.

6.4 Canal Real

Para este caso, a simulação numérica é realizada para uma artéria coronária real com aterosclerose cuja geometria é feita utilizando um processamento de imagem como sugerido por Wang [6]. Essa geometria é particular para cada paciente devido as condições de saúde do mesmo. Assim como nos casos anteriores, foi considerado uma obstrução de 40% do canal devido a aterosclerose e o domínio foi discretizado com 7632 nós e 14665 elementos triangulares lineares.

A Figura 32 apresenta o perfil de velocidade transiente ao longo da coordenada y no meio do canal ($x = 5R$). O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.25$. Dessa forma, a geometria Curvada representa uma boa aproximação como observado na Figura 26.

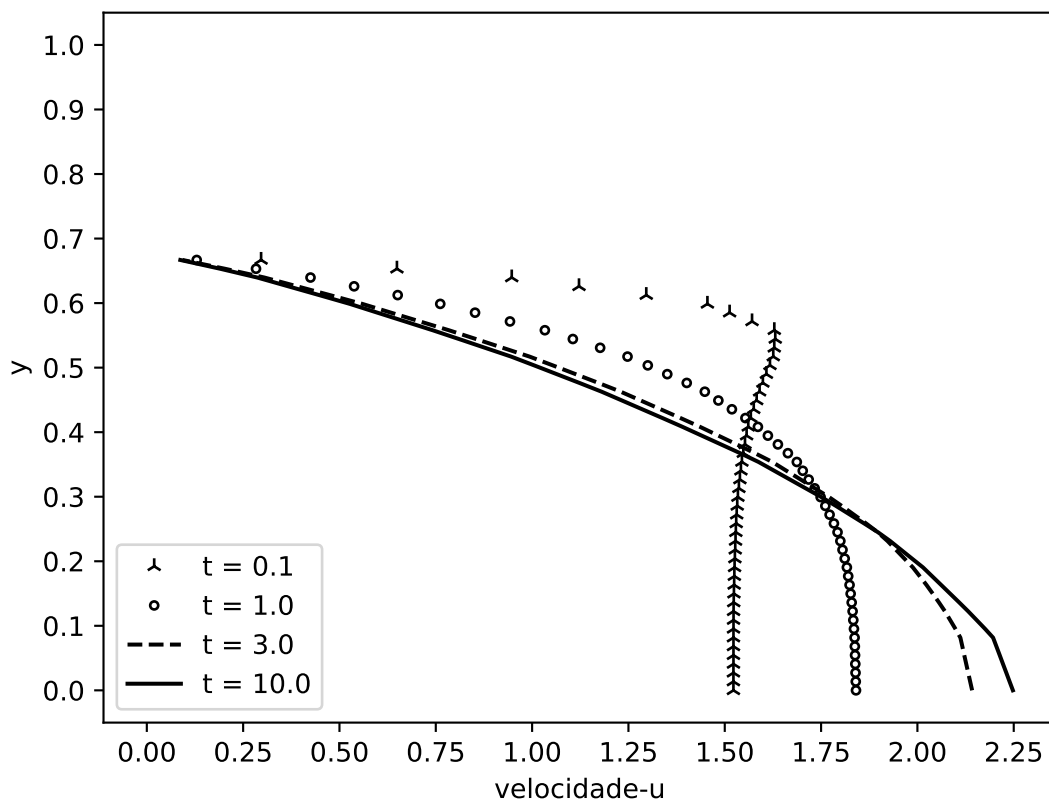


Figura 32: Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Real.

A Figura 33 apresenta a evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para a metade do domínio já que os resultados são simétricos na direção y . O campo de velocidade é representado com os valores adimensionais onde a cor vermelha se refere ao valor $u = 2.25$ e a cor azul $u = 0$.

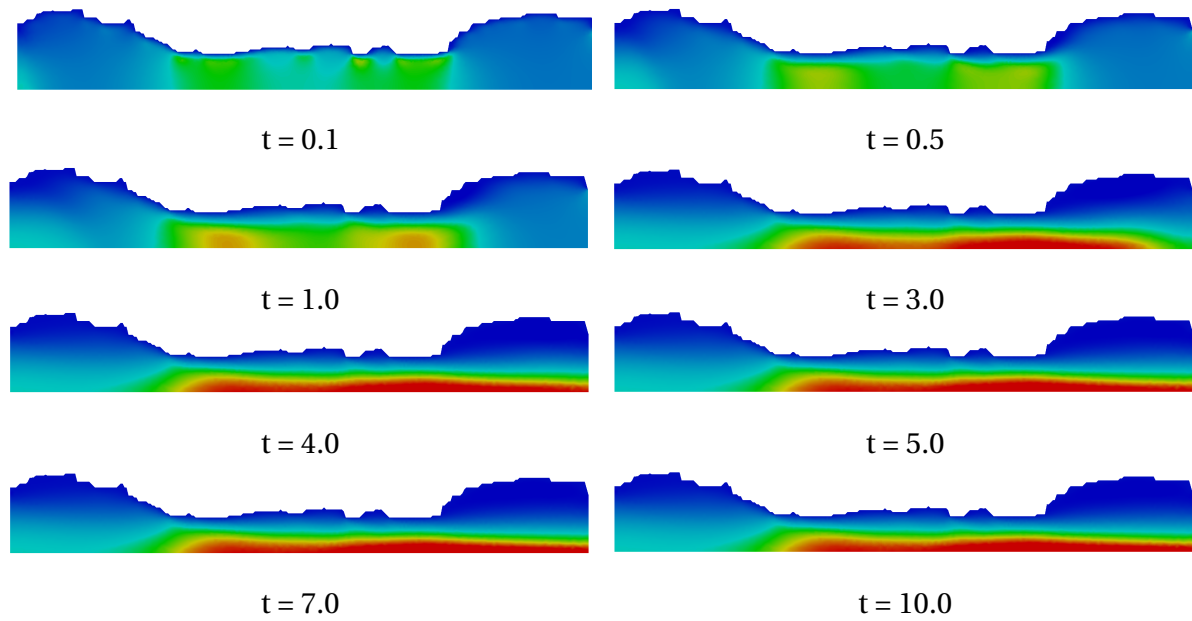


Figura 33: Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Real.

6.5 Canal Real com Stent Farmacológico

Para este caso, o stent farmacológico é colocado na parte superior da artéria coronária real. O mesmo é modelado por 10 semi círculos uniformemente espaçados. Assim como no caso anterior, foi considerado uma obstrução de 40% do canal devido a aterosclerose e o domínio foi discretizado com 11807 nós e 26426 elementos triangulares lineares.

A Figura 34 apresenta o perfil de velocidade transiente ao longo da coordenada y no meio do canal ($x = 5R$). Como podemos observar, o valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.65$ quando o stent é implantado, isto é, possuímos um aumento de apenas 18% quando comparado com a artéria sem o stent implantado como no caso anterior. Porém, esse aumento de velocidade pode variar de acordo com o perfil da geometria da artéria coronária para cada paciente.

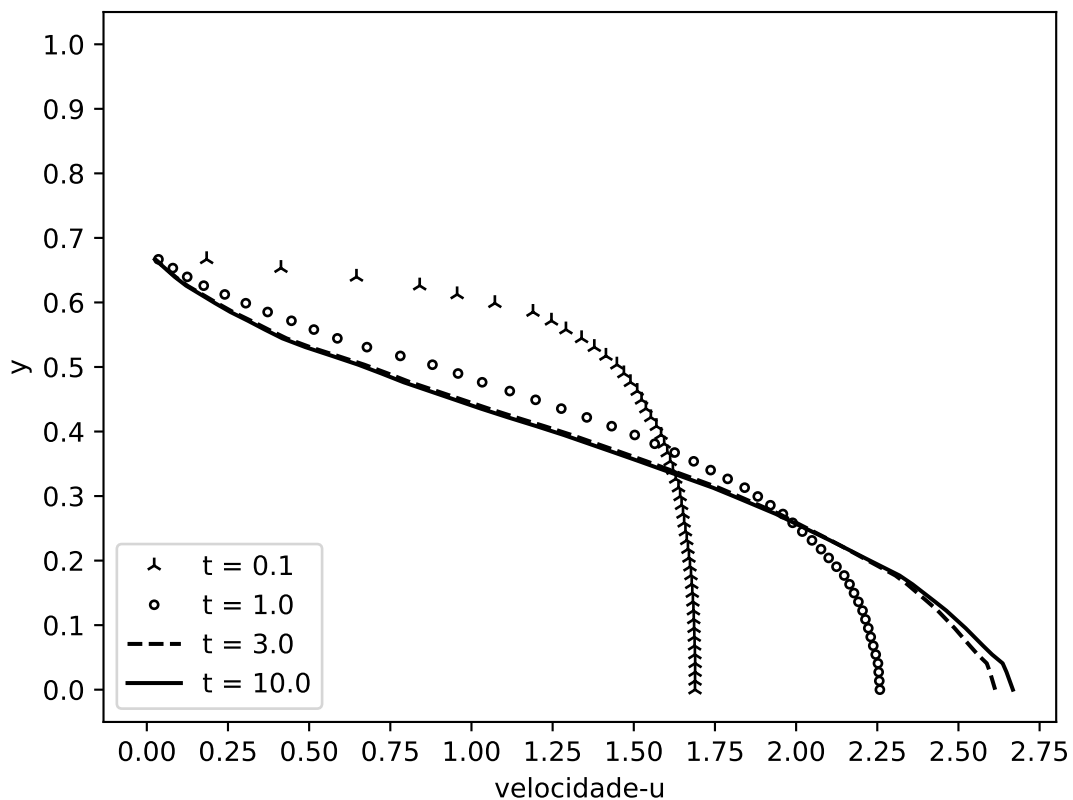


Figura 34: Evolução no tempo do perfil da velocidade para o Canal Real com Stent Farmacológico.

A Figura 35 apresenta a evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para a metade do domínio já que os resultados são simétricos na direção y . O campo de velocidade é representado com os valores adimensionais onde a cor vermelha se refere ao valor $u = 2.65$ e a cor azul $u = 0$.

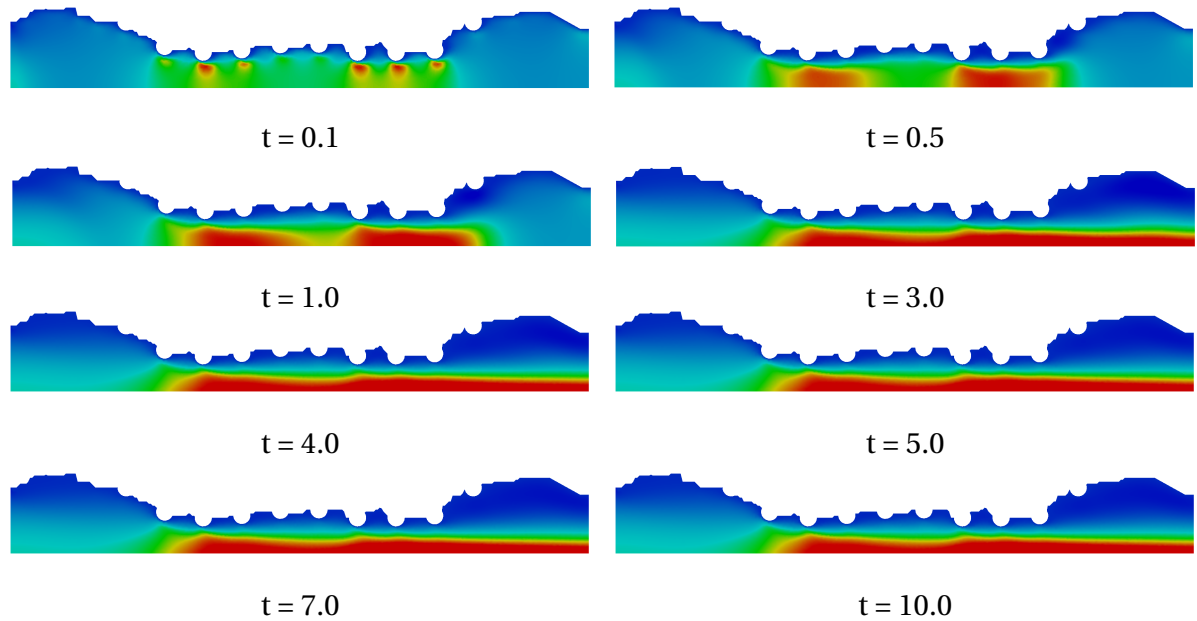


Figura 35: Evolução no tempo e no espaço do campo de velocidade para o Canal Real com Stent Farmacológico.

A Figura 36 e a Figura 37 apresentam a evolução no tempo e no espaço do campo de concentração para a metade do domínio devido a simetria para diversos números de *Schmidt* tais como: 1 e 10 respectivamente, onde é possível observar a influência do aumento do número de *Schmidt* na difusão do fármaco. A concentração é representado com os valores adimensionais onde a cor vermelha representa 100% e a cor azul representa 0% da concentração que é difundida na corrente sanguínea.

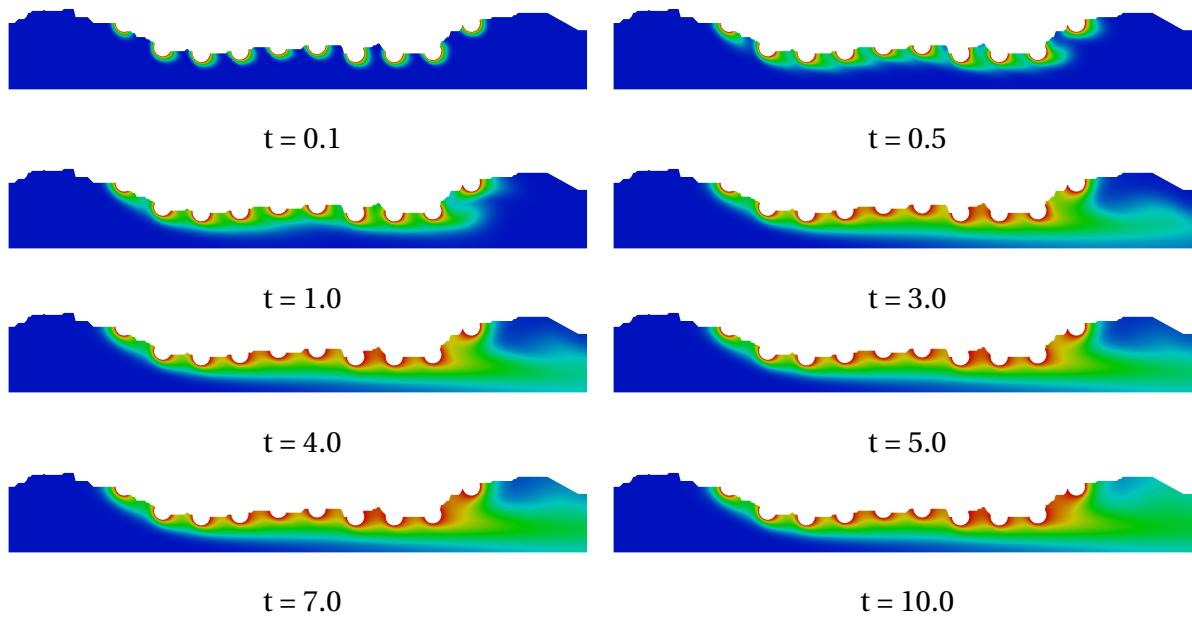


Figura 36: Canal Real com Stent Farmacológico cujo $Sc = 1$.

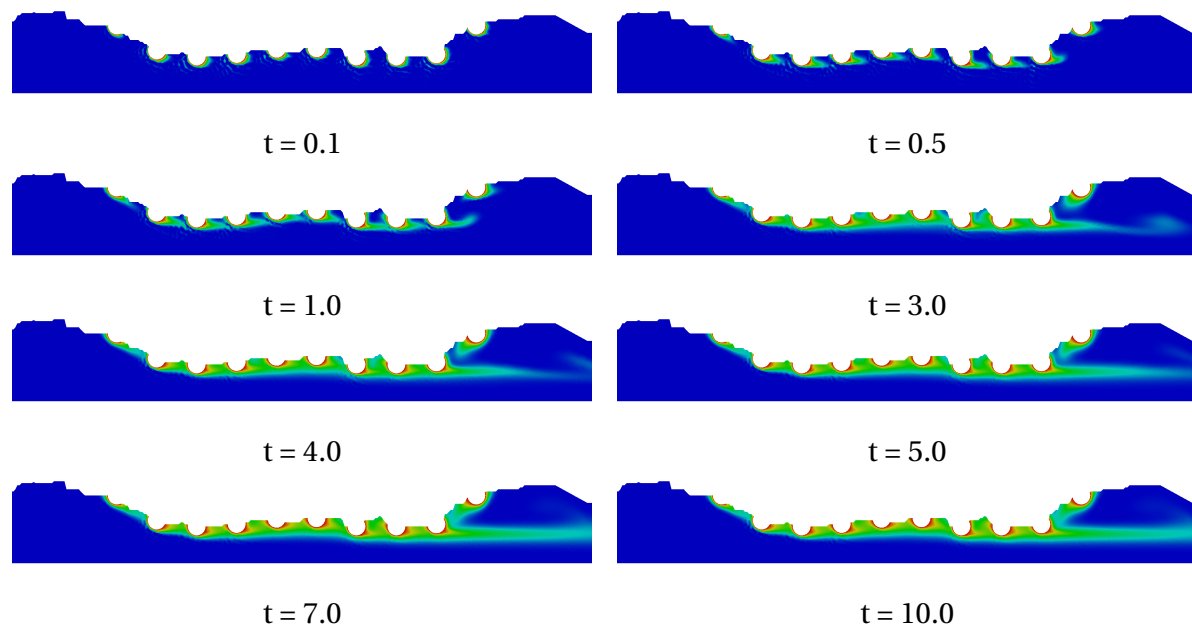


Figura 37: Canal Real com Stent Farmacológico cujo $Sc = 10$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentado a equação Navier-Stokes utilizando a formulação corrente-vorticidade com a equação de transporte de espécie química numa abordagem do Método dos Elementos Finitos onde o esquema Taylor-Galerkin foi aplicado às equações de governo. Como a formulação corrente-vorticidade não apresenta o acoplamento entre a velocidade e pressão, podemos utilizar o elemento triangular linear sem restrição possibilitando assim uma facilidade na implementação do código numérico além das variáveis envolvidas serem escalares e não vetoriais como no caso das variáveis primitivas.

O código numérico apresentou resultados satisfatórios comparados às soluções analíticas dos *Escoamento de Couette*, *Escoamento de Poiseuille* e *Escoamento de Poiseuille em Meio Domínio* onde a condição de superfície livre escorregamento no eixo de simetria foi aplicada. Foi simulado, também, o escoamento numa cavidade com tampa móvel (*lid-driven cavity flow*) onde os resultados foram comparados com aqueles apresentados por Ghia [4] e Marchi [5] para vários números de Reynolds. Por fim, foi apresentado a comparação entre os esquemas *Galerkin* e *Taylor-Galerkin* para um escoamento puramente convectivo de uma função parabólica onde foi possível observar a eficácia do esquema *Taylor-Galerkin* em comparação ao esquema *Galerkin* para a redução das oscilações espúrias. Dessa forma, a validação do código numérico foi realizada para problemas convectivos-difusivos bidimensionais em coordenadas cartesianas e submetido à condição de contorno de *Dirichlet*.

O objetivo desse trabalho era conhecer a dinâmica do escoamento sanguíneo em uma artéria coronária com aterosclerose e com stent farmacológico implantado. Dessa forma, foi apresentado a simulação para quatro geometrias modeladas como bidimensionais e em coordenadas cartesianas. O perfil do campo de velocidade foi apresentado para as quatro geometrias propostas onde foi possível observar o aumento da velocidade máxima quando o stent farmacológico estava implantado. A simulação foi feita utilizando diversos número de *Schmidt* tais como $Sc = 1$ e 10. Foi possível verificar que o número de *Schmidt* influencia diretamente no transporte do fármaco na corrente sanguínea. Para elevados valores do número de *Schmidt*, o transporte de espécie química torna-se puramente convectivo e sua influência na parede da artéria deve ser verificada.

Para trabalhos futuros, destacamos quatro desenvolvimentos:

- Utilização do esquema *Semi-Lagrangeano* para as derivadas materiais em substituição do esquema *Taylor-Galerkin* para a redução das oscilações espúrias
- Utilização das variáveis primitivas na equação Navier-Stokes numa abordagem 3D
- Modelar o escoamento sanguíneo como um problema multifásico
- Simular a transferência de espécie química na parede da artéria modelando a mesma como um meio poroso e aplicando, assim, a *Lei de Darcy*

REFERÊNCIAS

- [1] ORGANIZATION, W. W. H. *Cardiovascular diseases*. 2017. [Online; accessed 03/05/2018 11:55]. Disponível em: <"www.who.int/cardiovascular_diseases/en/">.
- [2] DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transporte problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984.
- [3] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. Finite element method - volume 3: Fluid dynamics. *Butterworth-Heinemann*, 2000.
- [4] GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokesequations and a multi-grid. *Journal of Computational Physics*, 1982.
- [5] MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: Numerical solution with a 1024 x 1024 grid. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2009.
- [6] WANG, H. et al. Dynamics of blood flow in coronary artery. *International Congress of Mechanical Engineering*, 2017.
- [7] HENDERSON, A. Paraview guide, a parallel visualization application. *Kitware Inc.*, 2007.
- [8] DOTTER, C. T.; JUDKINS, M. P. Transluminal treatment of arteriosclerotic obstruction: Description of a new technic and a preliminary report of its application. *Circulation*, 1964.
- [9] GRÜNTZIG, A. R.; SENNING, A.; SIEGENTHALER, W. E. Nonoperative dilatation of coronary-artery stenosis. *The New England Journal of Medicine*, 1979.
- [10] SIGWART, U. et al. Intravascular stents to prevent occlusion and restenosis after transluminal angioplasty. *The New England Journal of Medicine*, 1987.
- [11] SERRUYS, P. et al. A comparison of ballon-expandable-stent implantation with ballon angioplasty in patients with coronary artery disease. *The New England Journal of Medicine*, 1994.
- [12] HWANG, C.; WU, D.; EDELMAN, E. R. Physiological transport forces govern drug distribution for stent-based delivery. *Circulation*, 2001.

- [13] BOZSAK, E.; J-M., C.; BARAKAT, A. Modeling the transport of drugs eluted from stents: physical phenomena driving drug distribution in the arterial wall. *Biomech Model Mechanobiol*, Springer, v. 13, p. 327–347, 2014.
- [14] LUCENA, R. et al. Transport through polymer layer and porous arterial wall with binding in drug-eluting stents using the fem. *International Congress of Mechanical Engineering*, 2017.
- [15] MORICE, M. C. et al. Study with the sirolimus coated bx velocity balloon-expandable stent in the treatment of patients with de novo native coronary artery lesions. a randomized comparison of a sirolimus-elution stent with a standard stent for coronary revascularization. *The New England Journal of Medicine*, 2002.
- [16] GRUBE, E. et al. Taxus i: Six and twelve month results from a randomized, double-blind trial on a slow-release paclitaxel-eluting stent for de novo coronary lesions. *Circulation*, 2003.
- [17] COLOMBO, A. et al. Randomized study to assess the effectiveness of slow and moderate-release polymer based paclitaxel-eluting stents for coronary artery lesions. *Circulation*, 2003.
- [18] SCHAMPAERT, E. et al. Canadian study of the sirolimus-eluting stent in the treatment of patients with long de novo lesions in small native coronary arteries (c-sirius). *Journal of the American College of Cardiology*, 2004.
- [19] ARDISSINO, D. et al. Sirolimus-eluting vs uncoated stents for prevention of restenosis in small coronary arteries. *The Journal of the American Medical Association*, 2004.
- [20] JARYL, N. et al. Over-expansion capacity and stent design model: An update with contemporary des platforms. *International Journal of Cardiology*, 2016.
- [21] COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1943.
- [22] SPALDING, D. B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1972.

- [23] CHRISTIE, I. et al. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976.
- [24] HEINRICH, J. C.; HUYAKORN, P. S.; ZIENKIEWICZ, O. C. An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977.
- [25] BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1982.
- [26] PIRONNEAU, O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the navier-stokes equation. *Numerische Mathematik*, 1982.
- [27] LOHNER, R.; MORGAN, K.; ZIENKIEWICZ, O. C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 1984.
- [28] ANJOS, G. et al. Modelagem numérica de escoamentos acoplados ao transporte de um espécie química por elementos finitos. *Brazilian Congress os Thermal Sciences and Engineering*, 2006.
- [29] SILVA, H. C. *Finite Elements in Convection Dominated Flows: a semi-Lagrangian Method*. [S.l.]: State University of Rio de Janeiro, 2011.
- [30] PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia. Volume 1: Fundamentos*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2016.
- [31] FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introduction to Fluid Mechanics*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc, 2012.
- [32] ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. Finite elements in the solution of fiel problems. *The Engineer*, 1965.
- [33] LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. [S.l.]: Wiley John and Sons, 2004.

- [34] ANJOS, G. R. *Hydrodynamics Field Solution of electrochemical Cells Through Finite Element Method*. [S.l.]: Metallurgical and Materials Engineering, Federal University of Rio de Janeiro, Brazil, 2007.
- [35] BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. [S.l.]: Springer, 1994.
- [36] FINLAYSON, B. A. *The Method Weighted Residuals and Variational Principles*. [S.l.]: Elsevier, 1972.
- [37] BABUSKA, I. Error bounds for finite element method. *Numerische Mathematik*, 1971.
- [38] BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique.*, 1974.
- [39] PYTHON, S. F. *Python Language Reference, version 2.7*. 1990. [Online; accessed 12/12/2017 12:18]. Disponível em: <<http://www.python.org/>>.
- [40] GEUZAIN, C.; REMACLE, J. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009.
- [41] JONES, E.; OLIPHANT, T.; PETERSON, P. *Scipy - Open source scientific tools for Python*. 2001. [Online; accessed 15/03/2018 09:14]. Disponível em: <<http://www.scipy.org/>>.
- [42] COMMUNITY, T. S. *numpy.copy function*. [Online; accessed 15/03/2018 16:15]. Disponível em: <<https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.copy.html>>.
- [43] KESSLER, W. et al. Assessment of coronary blood flow in humans using phase difference mr imaging comparison with intracoronary doppler flow measurement. *International Journal of Cardiac Imaging*, 1998.

APÊNDICE - PUBLICAÇÕES

Durante a execução deste estudo, alguns trabalhos foram publicados ou aceitos na forma de artigos em congressos. Esta apêndice traz três desses trabalhos. Inicialmente é apresentado o trabalho aceito para publicação pelo *17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering (ENCIT)* que acontecerá em Novembro de 2018. Em seguida, apresentamos o trabalho publicado pelo *X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM)* com identificação doi://10.26678/ABCM.CONEM2018.CON18-1227 que ocorreu em Maio de 2018. Por fim, é apresentado o trabalho publicado pelo *II Congresso Brasileiro de Fluidodinâmica Computacional (CBCFD)* que ocorreu em Junho de 2018. Abaixo segue um pequeno resumo desses trabalhos:

BLOOD FLOW DYNAMICS SIMULATION IN CORONARY ARTERY WITH DRUG-ELUTING STENT USING FINITE ELEMENT METHOD

17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering (ENCIT 2018)

Novembro/2018 - Aceito para a publicação

The present work aims at developing a computational framework to simulate coronary artery flows in cartesian coordinates. The Finite Element Method (FEM) is used to solve the governing equations of the blood flow in coronary artery with drug-eluting stent placed. The blood was modeled as single-phase, incompressible and newtonian fluid. The Navier-Stokes equation is shown according to the stream-vorticity formulation with coupled species transport equation. The Taylor-Galerkin scheme were used to decrease spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds number. The code proved to be effective by results presented in validation cases. The dynamics of blood flow was shown to a coronary artery with atherosclerosis and drug-eluting stent placed. Therefore, the streamfunction and vorticity formulation showed an useful approximation for to calculate the velocity and concentration fields since the variables are scalars allowing then a smooth implementation.

A NUMERICAL SIMULATION OF BLOOD FLOW DYNAMICS IN CORONARY ARTERY USING STREAMFUNCTION-VORTICITY FORMULATION

X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2018)

Maio/2018 - Publicado

doi://10.26678/ABCM.CONEM2018.CON18-1227

The present work aims at developing a computational framework to simulate coronary artery flows in cartesian coordinates. An accurate method capable of capturing the flow dynamics is strictly required. In this paper a Finite Element Method (FEM) is used to solve the governing equations of the motion of the blood flow found in coronary artery as incompressible fluid using the stream-vorticity formulation with coupled mass transport. The validation of the numerical solution was done by well-known benchmark lid-driven cavity problem and the results were compared with others authors as well as the Hagen-Poiseuille flow for the case straight channel that was compared with analytical solution. The streamfunction and vorticity formulation showed an useful approximation for to calculate the velocity and concentration fields since the variables are scalars allowing then a smooth implementation.

BLOOD FLOW SIMULATION USING STREAM FUNCTION-VORTICITY FEM FORMULATION

II Congresso Brasileiro de Fluidodinâmica Computacional (CBCFD 2018)

Junho/2018 - Publicado

The present work aims at developing a computational framework to simulate coronary artery flows in cartesian coordinates. An accurate method capable of capturing the flow dynamics is strictly required. In this paper a Finite Element Method (FEM) is used to solve the governing equations of the motion of the blood flow found in coronary artery as incompressible fluid using the stream-vorticity formulation with coupled species transport equation. The results were shown for two-dimensional domain in complex geometries of modeled coronary artery channel. The numerical simulation was performed using the streamfunction and vorticity formulation with coupled species transport equation by finite element method approach. The streamfunction and vorticity formulation showed a smooth implementation for to calculate the variables since they are scalars. However, there is a significant difference between the results shown in cartesian coordinates and those shown by Wang et al. (2017) in axisymmetric coordinates.

ENCIT-2018-0357

BLOOD FLOW DYNAMICS SIMULATION IN CORONARY ARTERY WITH DRUG-ELUTING STENT USING FINITE ELEMENT METHOD

Leandro Marques

Gustavo Anjos

Jose Pontes

State University of Rio de Janeiro - UERJ, R. Fonseca Teles 524, 20550-013, Rio de Janeiro, Brazil

marquesleandro67@gmail.com, gustavo.anjos@uerj.br, jose.pontes@uerj.br

Abstract: The present work aims at developing a computational framework to simulate coronary artery flows in cartesian coordinates. The Finite Element Method (FEM) is used to solve the governing equations of the blood flow in coronary artery with drug-eluting stent placed. The blood was modeled as single-phase, incompressible and newtonian fluid. The Navier-Stokes equation is shown according to the stream-vorticity formulation with coupled species transport equation. The Taylor-Galerkin scheme were used to decrease spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds number.

Keywords: Stream-Vorticity Function, Finite Element Method, Taylor-Galerkin Method, Drug-Eluting Stent, Hemodynamics.

1. INTRODUCTION

According to the World Health Organization (2017), more people die annually from the cardiovascular diseases (CVDs) than from any other cause in the world. An estimated 17.7 million people died from CVDs in 2015, representing 31% of all global deaths. About 41% of these deaths were due to coronary artery disease (CAD). The leading cause of the CAD is atherosclerosis where the diameter of the vessel is decreased. Two treatments can be performed: coronary artery bypass grafting (CABG) or percutaneous transluminal coronary angioplasty (PTCA). The PTCA is a minimally invasive procedure where a small wire tube, called stents, is placed. This work aims to develop a Finite Element code for stream-vorticity formulation coupled species transport equation and to know how the dynamics of blood flow in coronary artery with atherosclerosis and with stents struts placed.

The dynamics of blood flow in coronary artery and possible influence of stents struts with computational fluid dynamics (CFD) requires a robust numerical method to compute the solution of the differential equations in a relevant model. The equations that govern the dynamics of blood flow in a coronary artery were developed according to continuum media assumption. Thus, the universal conservation laws such as conservation of mass, conservation of momentum and conservation of species transport were used. The blood was modeled as single-phase, incompressible and newtonian fluid, the diffusion coefficient was considered as constant. The Navier-Stokes equation is shown according to the 2D stream-vorticity formulation with coupled species transport equation in a Finite Element Method approach.

The domain was discretized on an unstructured triangular mesh using the *GMSH* open source as proposed by Geuzaine and Remacle (2009). According to decoupling between velocity field and pressure field achieved by stream-vorticity formulation, the linear triangular element was used. The equations were discretized in time by Taylor series expansion retaining the second order terms to decrease spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds number. Then, the Galerkin formulation was used to discretize in space. Therefore, the Taylor-Galerkin scheme was used as proposed by Donea (1984).

The computational development was done in *Python* language using object-oriented programming paradigm with the aim of reusability and further development. The code validation was made by comparison numerical solution and analytical solution of the *Poiseuille flow*. The comparison of velocity field was done for lid-driven cavity flow with those shown by Ghia *et al.* (1982) and Marchi *et al.* (2009). The dynamics of blood flow and species transport in coronary artery was investigated in 2 test cases as suggested by Wang *et al.* (2017), however modified for 2D cartesian coordinates. The simulation was shown using *Paraview* open source as proposed by Henderson (2007).

2. MATHEMATICAL MODEL

A 2-dimensional Finite Element Method approach is employed to analyse the dynamics of blood flow in coronary artery with atherosclerosis and possible influence of stents struts. The governing equations were developed according to continuum media assumption. Thus, the universal conservation laws such as conservation of mass, conservation of momentum and conservation of species transport were used. The blood was modeled as single-phase, incompressible and newtonian fluid, the diffusion coefficient was considered as constant. The Navier-Stokes equation is shown according to stream-vorticity formulation with coupled species transport equation.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (4)$$

Where, ω is the vorticity field, ψ is the stream function field, c is the concentration field, $\mathbf{v} = (u, v)$ is the velocity field, $\mathbf{D} = [\partial/\partial y, -\partial/\partial x]$ is a mathematical operator, $Re = \rho u D / \mu$ is the Reynolds number, $Sc = \nu / D$ is the Schmidt number, x and y are the independent spatial variables and t is the time variable.

2.1 Finite Element Method

The domain was discretized on an unstructured triangular mesh using the *GMSH* open source as proposed by Geuzaine and Remacle (2009). According to decoupling between velocity field and pressure field achieved by stream-vorticity formulation, the use of linear triangular element was used. The equations were discretized in time by Taylor series expansion remaining the second order terms to decrease spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds number. Then, the Galerkin formulation was used to discretize in space. Therefore, the Taylor-Galerkin scheme was used as proposed by Donea (1984). The governing equations in matrix form used in this paper were:

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \frac{1}{Re} [K_{xx} + K_{yy}] \right] \omega^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} \omega^n - u \cdot G_x \omega^n - v \cdot G_y \omega^n - u \frac{\Delta t}{2} [u K_{xx} + v K_{yx}] \omega^n - v \frac{\Delta t}{2} [u K_{xy} + v K_{yy}] \omega^n \quad (5)$$

$$[K_{xx} + K_{yy}] \psi = M \omega \quad (6)$$

$$M u = G_y \psi \quad (7)$$

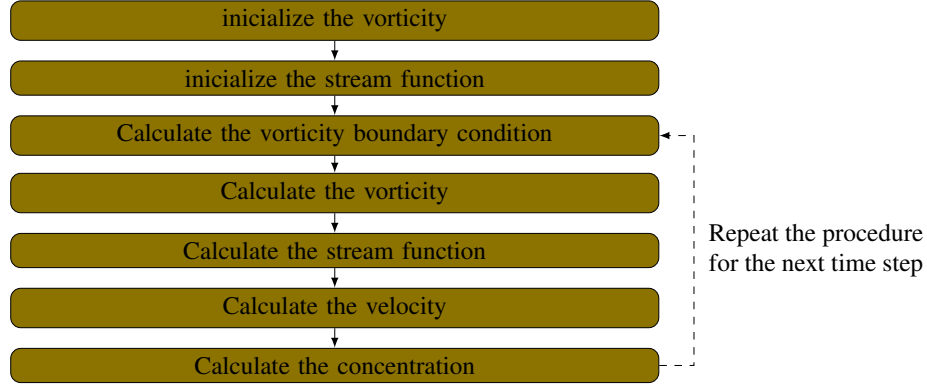
$$M v = -G_x \psi \quad (8)$$

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \frac{1}{ReSc} [K_{xx} + K_{yy}] \right] c^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} c^n - u \cdot G_x c^n - v \cdot G_y c^n - u \frac{\Delta t}{2} [u K_{xx} + v K_{yx}] c^n - v \frac{\Delta t}{2} [u K_{xy} + v K_{yy}] c^n \quad (9)$$

Where, M is mass matrix, G_x and G_y are gradient matrix, K_{xx} , K_{xy} , K_{yx} and K_{yy} are stiffness matrix. The last term of the Eqs. 5 and 9 is known as numerical diffusion and it decrease the spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds numbers. For scalars, *Taylor Galerkin Method* and *Characteristic Galerkin* produce the same result as showed by Lohner *et al.* (1984). The superscripts $n+1$ and n are the scalar that will be calculated and that was calculated in the previous time step, respectively.

2.2 Numerical Solution

The computational development was done in *Python* language using object-oriented programming paradigm with the aim of reusability and further development. The linear system of equations that come from implementing the FEM is solved through iterative method *Conjugate Gradient Solver* available in the public library for scientific tools *SciPy* maintained by Jones *et al.* (2001). The solution algorithm used is shown below:



The first and second steps are out of time loop, while the third to the seventh step are inside of time loop. The application of the boundary condition in the equation can be before loop, except for the vorticity equation (*fourth step*) that the boundary condition must be applied at each time step.

3. VALIDATION

The code validation was made by comparison numerical solution and analytical solution of the *Poiseuille flow*. The comparison of velocity field was done for lid-driven cavity flow with those shown by Ghia *et al.* (1982) and Marchi *et al.* (2009).

3.1 Poiseuille Flow

A single-phase flow, steady and fully developed of an incompressible and newtonian fluid between parallel horizontal plates and stationary is maintained due to a pressure gradient. This flow is known as *Poiseuille flow*. In Fig. ?? is shown a schematic representation of the numerical domain used to simulate the Poiseuille Flow problem, where no-slip condition were used at the top and bottom walls, while an inflow and outflow conditions were set in the plane $x = 0$ and $x = 5L$ respectively.

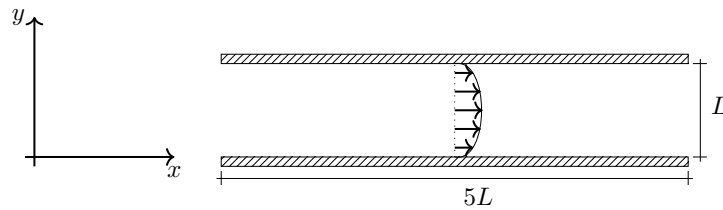


Figure 1: Poiseuille flow

The boundaries conditions used were:

- *inflow condition*: the normal velocity component is set to null value $v = 0$. The tangent velocity component is set to parabolic profile by exact solution, that is, $u = [4u_{max}y/L^2][L - y]$, where $u_{max} = 1.5$. The streamfunction is also specified and its value is defined according to continuity equation for an incompressible fluid. Thus, its value is $\psi = [2u_{max}y^2/3L^2][3L - 2y]$.
- *No-slip condition*: all the velocity components are specified with null value $u = 0$ and $v = 0$. The streamfunction is also specified $\psi = 1$ in top plate and $\psi = 0$ in bottom plate.

- *outflow condition*: no value is specified. The derivatives of the tangent velocity component, of the normal velocity component and of streamfunction are set to null values, that is, $\partial u/\partial n = 0$, $\partial v/\partial n = 0$ and $\partial \psi/\partial n = 0$ respectively.

The velocity field profile is calculated by equation below:

$$u = \frac{4u_{max}}{L^2}y[L - y] \quad (10)$$

Where, u_{max} is maximum velocity and its value is $u_{max} = 1.5$, L is non-dimensional width between parallel plates and its value is $L = 1$ and y is length between parallel plates and ranges $y = [0, 1]$. The domain was discretized using a linear triangular mesh with 3835 nodes and 7299 elements.

The Fig. 2 shown the evolution of velocity field profile in time when $Re = 100$, the comparasion is also shown between numerical solution and analytical solution. Therefore, the code shown a satisfactory result.

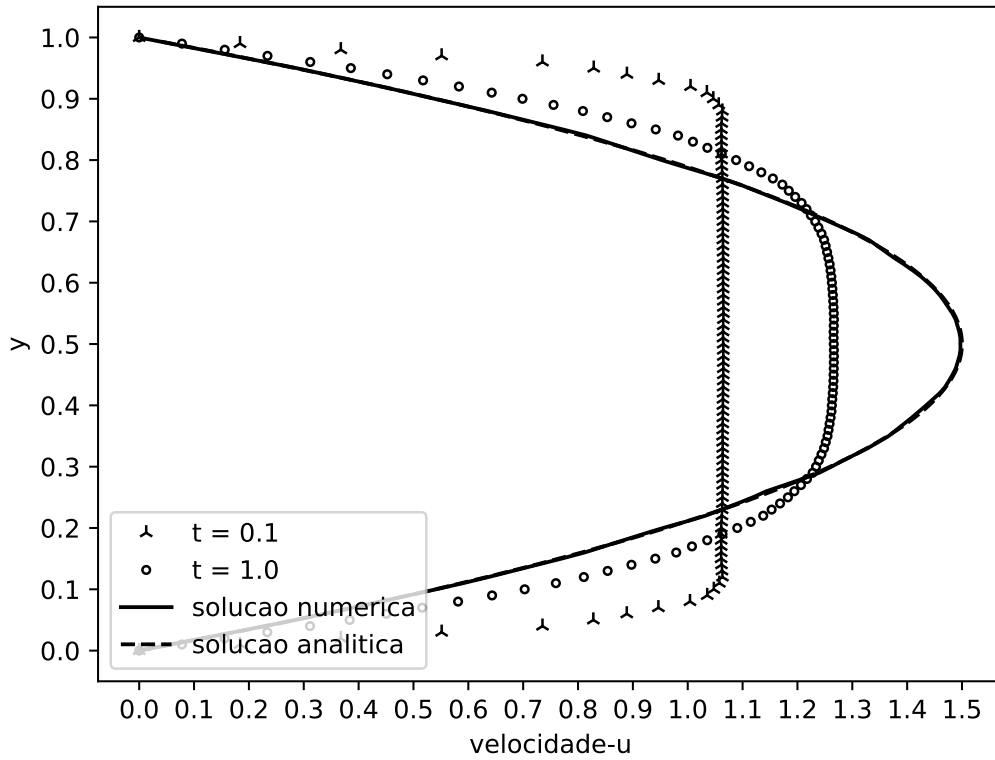


Figure 2: Evolution of velocity field profile in time for $Re = 100$ and the comparison between numerical solution and analytical solution.

3.2 Lid-driven Cavity Flow

A flow on cavity when side and bottom plates are stationary and top plate moves with velocity constant such that $U = u_{top} = 1$ is known as *lid-driven cavity flow*. In Fig. ?? is shown a schematic representation of the numerical domain used to simulate the Lid-driven Cavity Flow problem, where no-slip condition were used at the bottom and side walls, while at top wall, the velocity was set $u = U_{top}$.

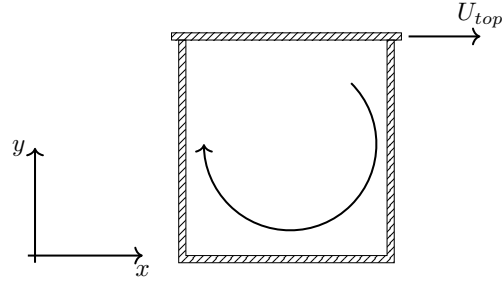


Figure 3: Lid-driven cavity flow

Were simulated flows for the following Reynolds numbers: (Re): 10, 100, 400 and 1000. The dimensions domain in x-direction and y-direction are [0,1]. We used a mesh with 1563 nodes and 2988 elements

The boundaries conditions used were:

- *top plate moves*: all the velocity components are specified with $v = 0$ and $u = U_{top}$, where $U_{top} = 1$. The streamfunction is also specified and its value is $\psi = 0$.
- *No-slip condition*: This condition is used on side and bottom plates. All the velocity components are also specified with null value $u = 0$ and $v = 0$. The streamfunction is specified as $\psi = 0$.

The Figs. 4 and 5 shown profile of u and v components respectively for several Reynolds numbers. The results were compared with Ghia *et al.* (1982) and Marchi *et al.* (2009). Therefore, the code shown a satisfactory result.

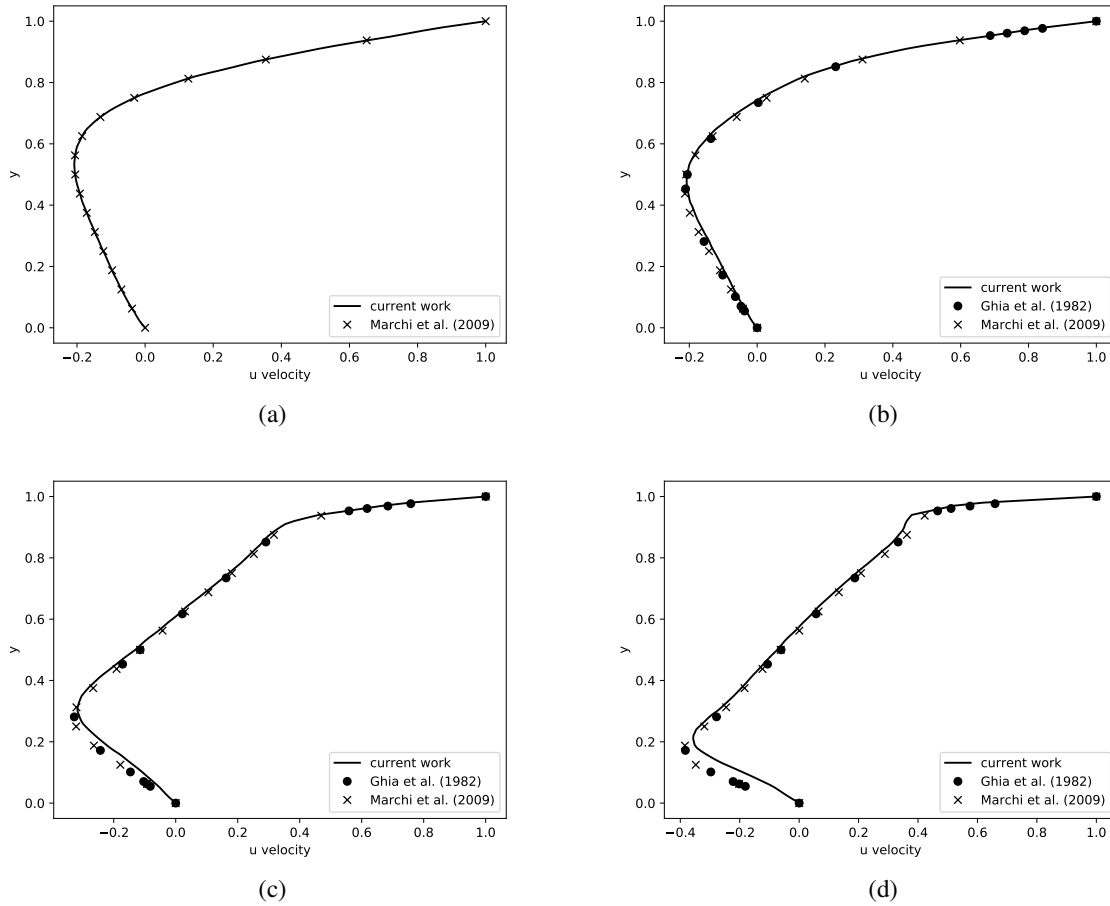


Figure 4: Centerline u velocity profile ($x = 0.5$) in a lid-driven cavity for different Reynolds numbers: (a) 10 (b) 100 (d) 400 (f) 1000.

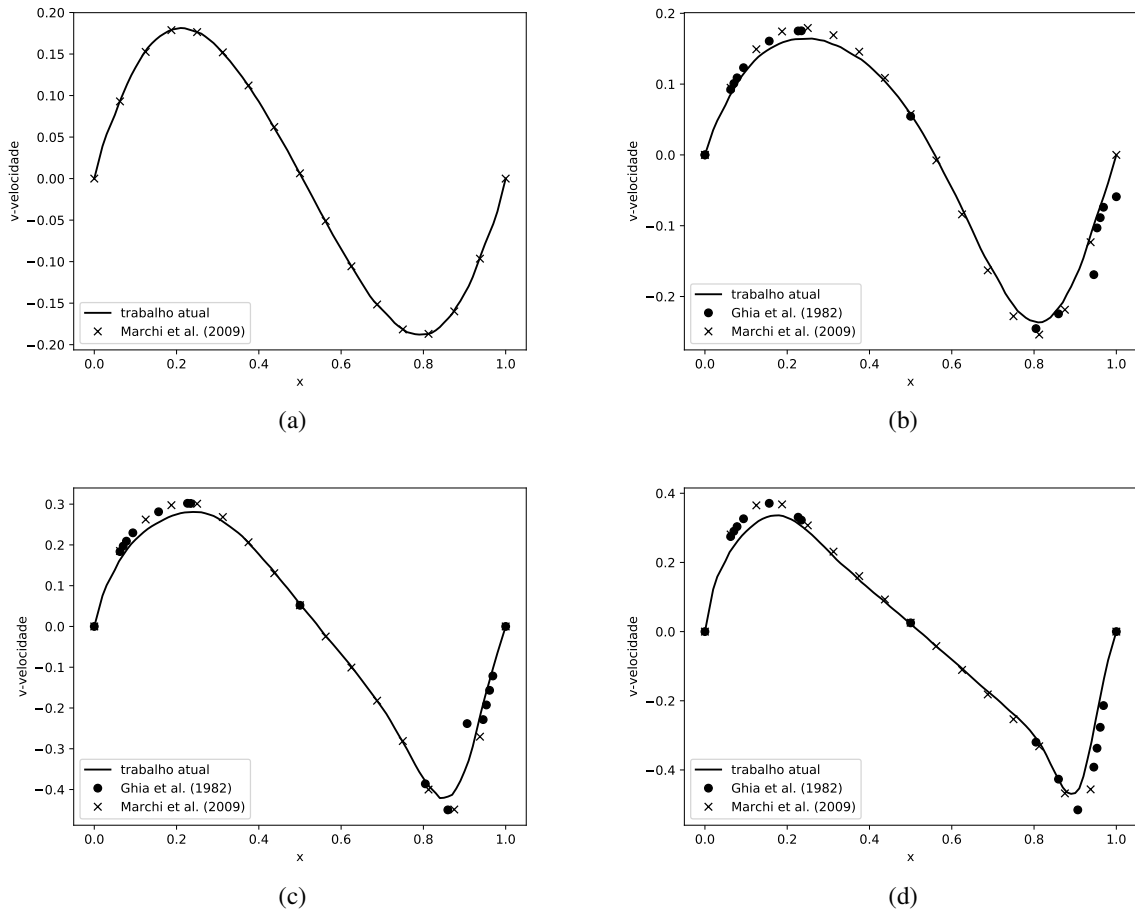


Figure 5: Centerline v velocity profile ($y = 0.5$) in a lid-driven cavity for different Reynolds numbers: (a) 10 (b) 100 (d) 400 (f) 1000.

4. RESULTS AND DISCUSSION

Some results of simulations are shown to demonstrate its capability of using unstructured triangular meshes on various geometries and combination of geometries. Numerical results are given for several cases of blood flows in artery when $Sc = 10$. The post-processing was performed by open source software *PARAVIEW* proposed by Henderson (2007). The lumen radius of a typical artery is about $R = 0.0015\text{m}$, viscosity in the lumen are set to $\mu = 0.0035\text{Pa.s}$ and density $\rho = 1060\text{kg/m}^3$ as suggested by Bozsak *et al.* (2014). According to Kessler *et al.* (1998), the velocity of the flow at coronary artery is $v = 12\text{cm/s}$. Therefore, the Reynolds number is $Re = 54.5$.

The Navier-Stokes equation is used according to stream-vorticity formulation with species transport equation coupled for 2 different geometries proposed by Wang *et al.* (2017) and is shown in the Fig. 6, however modified for cartesian coordinates. According to symmetry on y coordinate, half domain was simulated.

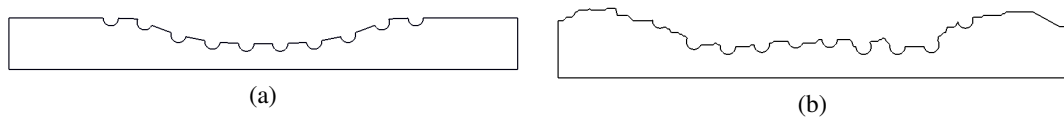


Figure 6: Non-dimensional geometry for blood flow dynamics in coronary arteries. The channel length $L = 10R$ is based on the channel width $R = 1$. (a) Curved Channel with Stent and (b) Real Channel with Stent.

The boundaries conditions used were:

- *inflow condition*: the normal velocity component is set to null value $v = 0$. The tangent velocity component is set

to parabolic profile by exact solution, that is, $u = u_{max}[1 - (y/L)^2]$, where $u_{max} = 1.5$. The streamfunction is also specified and its value is defined according to continuity equation for an incompressible fluid. Thus, its value is $\psi = [u_{max}y/3][3 - (y/L)^2]$.

- *No-slip condition*: this condition is used on bottom plate. all the velocity components are specified with null value $u = 0$ and $v = 0$. The streamfunction is also specified $\psi = 1$ and the derivative of concentration has null value $\partial c/\partial n = 0$.
- *outflow condition*: no value is specified. The derivatives of the tangent velocity component, of the normal velocity component and of streamfunction are set to null values, that is, $\partial u/\partial n = 0$, $\partial v/\partial n = 0$, $\partial \psi/\partial n = 0$ and $\partial c/\partial n = 0$ respectively.
- *Free-slip condition*: used when a symmetry condition is desired. The normal velocity component is set to null value $v = 0$ as well as the streamfunction $\psi = 0$. The derivative of the tangent velocity component and the derivative of the concentration are also set to null value $\partial u/\partial n = 0$ and $\partial c/\partial n = 0$ respectively.
- *Strut condition*: used on the stent. The normal velocity component and the tangent velocity component are specified with null value $u = 0$ and $v = 0$. The streamfunction and the concentration are also specified $\psi = 1$ and $c = 1$ respectively.

4.1 Curved Channel with Stent

For the case when coronary artery has atherosclerosis and drug-eluting stent is placed, the problem is modeled as a parallel and curved plates flow and the stent is modeled by 10 semi-circles uniformly spaced. The geometry used promotes a smooth reduction of length between the bottom and top plates. Were considered 40% of channel obstruction due to atherosclerosis. The Fig. 10 shown velocity field profile along y coordinates in centerline ($x = 5R$).

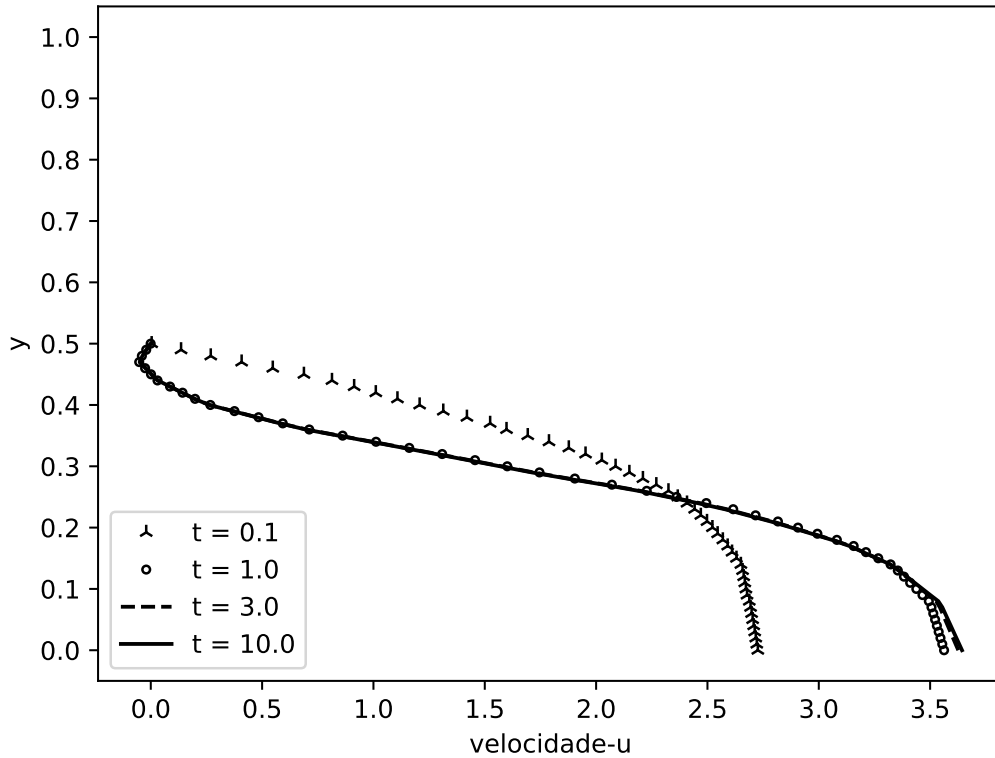


Figure 7: Evolution of velocity profile in time for Curved Channel with Drug-eluting Stent.

In Figs 8 and 9, are shown the velocity and concentration evolution in time and space for half domain according to symmetry y coordinate. The concentration field is represented with non-dimensional values when the red color is $c = 1$ and blue color $c = 0$.

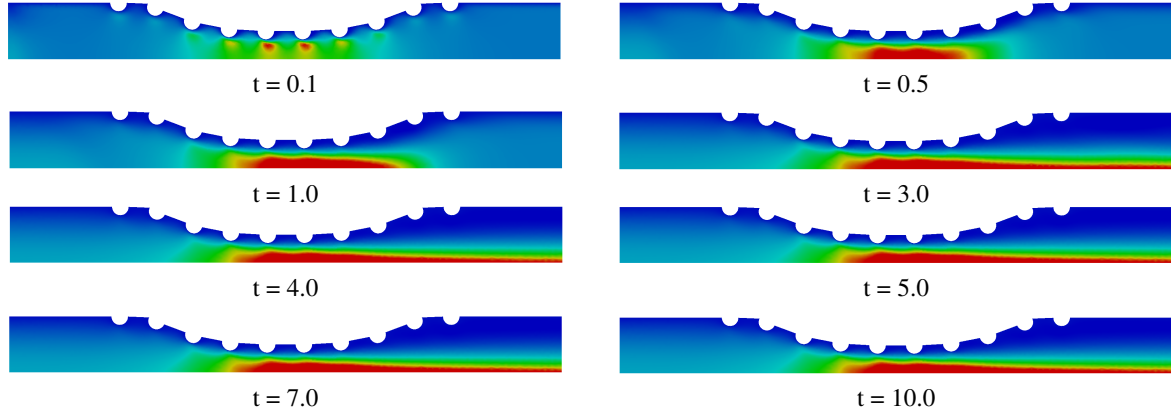


Figure 8: Evolution in time and space of velocity field for Curved Channel with Drug-eluting Stent.

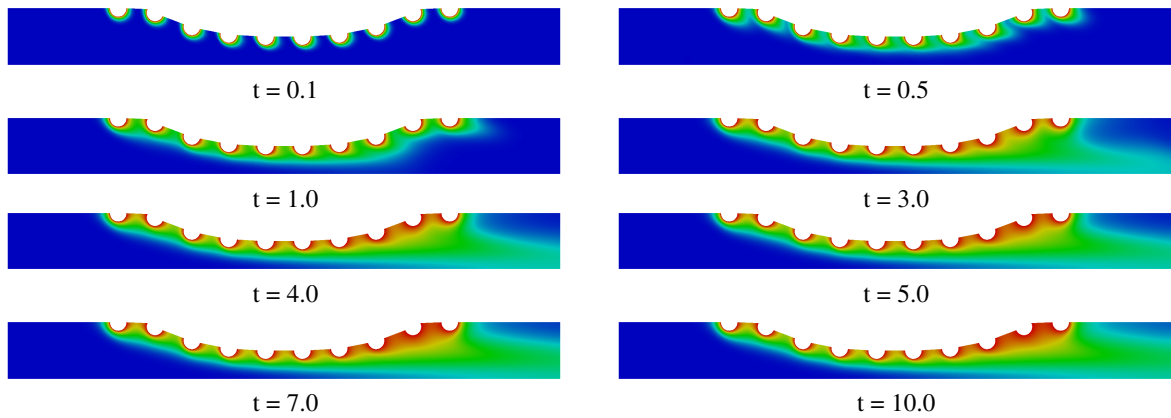


Figure 9: Evolution in time and space of concentration field for Curved Channel with Drug-eluting Stent.

4.2 Real Channel with Stent

In this case, the real coronary artery with atherosclerosis and drug-eluting stent placed is performed. The geometry was taken using image processing from a real coronary artery photography. The stent is modeled by 10 semi-circles uniformly spaced. As in other case, the geometry used promotes a reduction of length between the bottom and top plates when were considered 40% of channel obstruction due to atherosclerosis. The Fig. 10 shown velocity field profile along y coordinates in centerline ($x = 5R$).

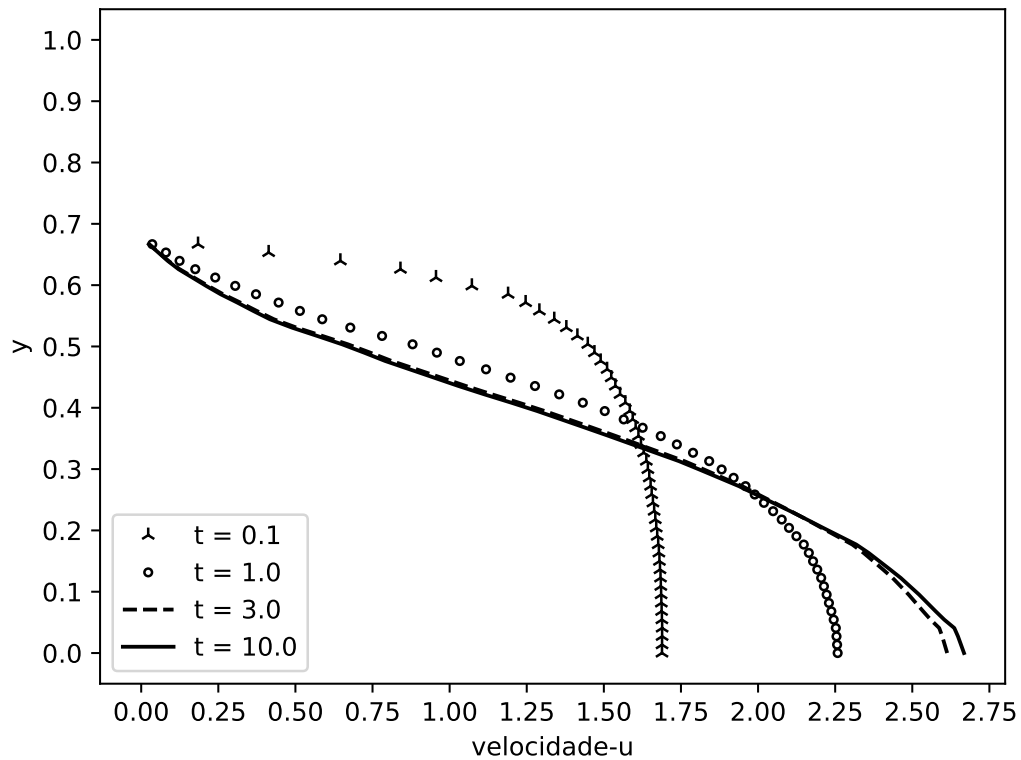


Figure 10: Evolution of velocity profile in time for Curved Channel with Drug-eluting Stent.

In Figs 11 and 12, are shown the velocity and concentration evolution in time and space for half domain according to symmetry y coordinate. The concentration field is represented with non-dimensional values when the red color is $c = 1$ and blue color $c = 0$.

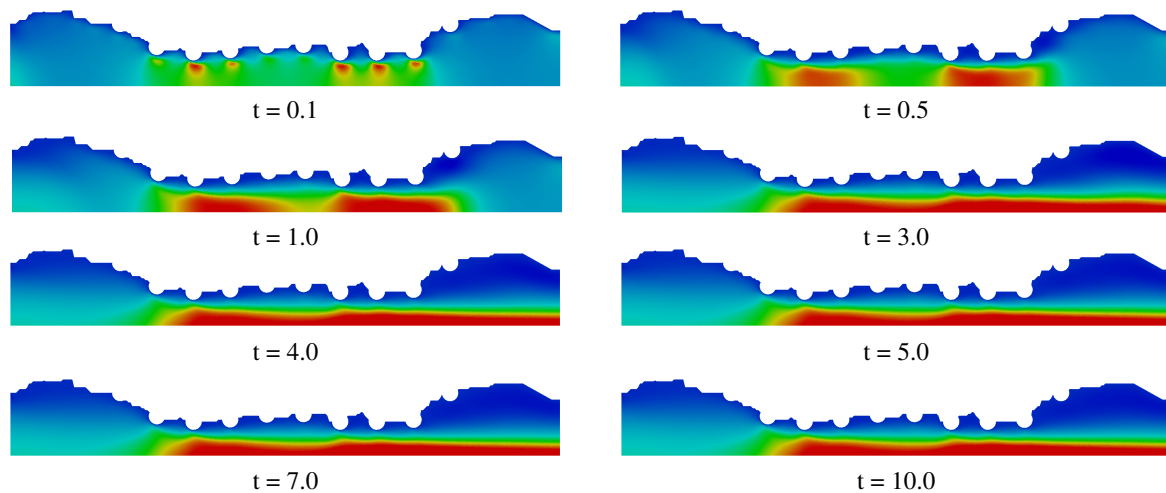


Figure 11: Evolution in time and space of velocity field for Real Channel with Drug-eluting Stent.

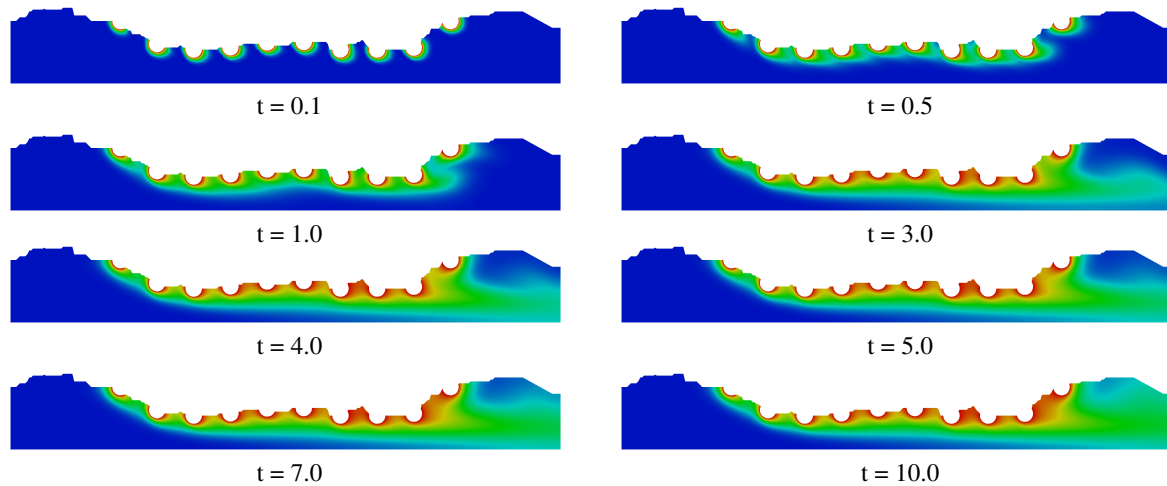


Figure 12: Evolution in time and space of concentration field for Real Channel with Drug-eluting Stent.

5. CONCLUSION

In this work, a numerical code for Navier-Stokes equation according to stream-vorticity formulation with species transport equation coupled was developed using Finite Element Method. The Taylor-Galerkin scheme was applied to decrease the spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds number. The code proved to be effective by results presented in validation cases. The dynamics of blood flow was shown to a coronary artery with atherosclerosis and drug-eluting stent placed. Therefore, the streamfunction and vorticity formulation showed an useful approximation for to calculate the velocity and concentration fields since the variables are scalars allowing then a smooth implementation.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank the FAPERJ (Research Support Foundation of the State of Rio de Janeiro) for its financial support.

7. REFERENCES

- Bozsak, F., J-M., C. and Barakat, A., 2014. "Modeling the transport of drugs eluted from stents: physical phenomena driving drug distribution in the arterial wall". *Biomech Model Mechanobiol*, Vol. 13, pp. 327–347. doi:10.1007/s10237-013-0546-4.
- Donea, J., 1984. "A taylor-galerkin method for convective transporte problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Geuzaine, C. and Remacle, J., 2009. "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982. "High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokesequations and a multi-grid." *Journal of Computational Physics*.
- Henderson, A., 2007. "Paraview guide, a parallel visualization application". *Kitware Inc*.
- Jones, E., Oliphant, T. and Peterson, P., 2001. "Scipy - open source scientific tools for python". URL <http://www.scipy.org/>. [Online; accessed 15/03/2018 09:14].
- Kessler, W., Moshage, W., Galland, A., Zink, D., Achenbach, S., Nitz, W., Laub, G. and Bachmann, K., 1998. "Assessment of coronary blood flow in humans using phase difference mr imaging comparison with intracoronary doppler flow measurement." *International Journal of Cardiac Imaging*.
- Lohner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C., 1984. "The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method". *International Journal of Numerical Methods in Fluids*.
- Marchi, C.H., Suero, R. and Araki, L.K., 2009. "The lid-driven square cavity flow: Numerical solution with a 1024 x 1024 grid." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*.
- Wang, H., McGinty, S., Lucena, R., Pontes, J., Anjos, G. and Mangiavacchi, N., 2017. "Dynamics of blood flow in coronary artery". *International Congress of Mechanical Engineering*.
- World Health Organization, W., 2017. "Cardiovascular diseases". URL ["www.who.int/cardiovascular_diseases/en/"](http://www.who.int/cardiovascular_diseases/en/). [Online; accessed 03/05/2018 11:55].

8. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

A NUMERICAL SIMULATION OF BLOOD FLOW DYNAMICS IN CORONARY ARTERY USING STREAMFUNCTION-VORTICITY FORMULATION

Leandro Marques, marquesleandro67@gmail.com¹

Gustavo Anjos, gustavo.anjos@uerj.br¹

José Pontes, jose.pontes@uerj.br¹

¹State University of Rio de Janeiro - UERJ, R. Fonseca Teles 524, 20550-013, Rio de Janeiro, Brazil

Abstract: *The present work aims at developing a computational framework to simulate coronary artery flows in cartesian coordinates. An accurate method capable of capturing the flow dynamics is strictly required. In this paper a Finite Element Method (FEM) is used to solve the governing equations of the motion of the blood flow found in coronary artery as incompressible fluid using the stream-vorticity formulation with coupled mass transport.*

Keywords: *Finite Element Method, Taylor-Galerkin Method, Biomedical Engineering, Hemodynamics, Atherosclerosis.*

doi://10.26678/ABCM.CONEM2018.CON18-1227

1. INTRODUCTION

According to the World Health Organization (2017), more people die annually from the cardiovascular diseases (CVDs) than from any other cause in the world. An estimated 17.7 million people died from CVDs in 2015, representing 31% of all global deaths. About 41% of these deaths were due to coronary artery disease (CAD). The leading cause of the CAD is atherosclerosis where the diameter of the vessel is decreased. Two treatments can be performed: coronary artery bypass grafting (CABG) or percutaneous transluminal coronary angioplasty (PTCA). The PTCA is a minimally invasive procedure where a small wire tube, called stents, is placed. This work aims to know how the dynamics of blood flow in coronary artery with atherosclerosis and with stents struts placed.

The dynamics of blood flow in coronary artery and possible influence of stents struts with computational fluid dynamics (CFD) requires a robust numerical method to compute the solution of the differential equations in a relevant model. We consider the model of dissolution and transport of sirolimus on a two-dimensional domain representing the polymer coating layer and the hydrodynamic of the blood flow in the artery in the vicinity of a stent strut as suggested by Bozsak *et al.* (2014) and McGinty and Pontrelli (2016). Also, the effect of the releasing process of the polymers is considered. However, the spatial distribution of the sirolimus is greatly influenced by the flow and the arterial wall properties, being therefore susceptible to patient health conditions. The difference of artery shapes and existence of the struts have been investigated in 4 test cases in the influence on the flow dynamics and the transport of a chemical species as suggested by Wang *et al.* (2017).

We employ the Finite Element method on an unstructured mesh created by open source software called *GMSH* proposed by Geuzaine and Remacle (2009) for the discretization of the incompressible single-phase Navier-Stokes through the stream-vorticity function coupled with the concentration equation. We apply the Taylor-Galerkin method to the decrease the spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds numbers as proposed by Donea (1984) and Zienkiewicz and Taylor (2000) and was used the well-known benchmark problem lid-driven cavity for the validation of the numerical code where the results were compared with Ghia *et al.* (1982) and Marchi *et al.* (2009).

2. MATHEMATICAL MODEL

A 2-dimensional Finite Element Method approach is employed to analyse the dynamics of blood flow in coronary artery and possible influence of stents struts. The first step in its development is the initial modelling of the problem, and in this case it can be described by a formulation using the vorticity and stream function applied in the conservation of momentum equation for incompressible flow and the concentration distribution equation. This approach makes the model useful for the cases of single-phase flows.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w = \frac{1}{Re} \nabla^2 w \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -w \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (4)$$

Where, ω is the vorticity field, ψ is the stream function field, c is the concentration field, $\mathbf{v} = (u, v)$ is the velocity field, $\mathbf{D} = [\partial/\partial y, -\partial/\partial x]$ is a mathematical operator, $Re = \rho u D / \mu$ is the Reynolds number, $Sc = \nu / D$ is the Schmidt number, x and y are the independent spatial variables and t is the time variable.

2.1 Initial and Boundary Conditions

As commented by Anjos (2012), the initial conditions and the boundary conditions are of utmost importance to realistically characterizing any problem modeled by differential equations. Thus, the boundary conditions used in this paper are briefly explained below:

- *inflow condition*: the normal velocity component is set to null value $v = 0$. The derivatives of the streamfunction and the concentration are set null values $\partial\psi/\partial n = 0$ and $\partial c/\partial n = 0$ respectively. For the tangent velocity component is set a half parabolic profile comes from the analytical solution of a Straight Channel in the cartesian coordinates: $u = u_{max}(1 - (y/R)^2)$, where $u_{max} = 2$.
- *No-slip condition*: all the velocity components are specified with null value $u = 0$ and $v = 0$. The streamfunction is also specified $\psi = 1.3$. The derivative concentration is set null value $\partial c/\partial n = 0$.
- *outflow condition*: no value is specified. The derivatives of the tangent velocity component, of the normal velocity component, of streamfunction and of concentration are set to null values, that is, $\partial u/\partial n = 0$, $\partial v/\partial n = 0$, $\partial\psi/\partial n = 0$ and $\partial c/\partial n = 0$ respectively.
- *Free-slip condition*: used when a symmetry condition is desired. The normal velocity component is set to null value $v = 0$ as well as the streamfunction $\psi = 0$. The derivative of the tangent velocity component and the derivative of the concentration are also set to null value $\partial u/\partial n = 0$ and $\partial c/\partial n = 0$ respectively.
- *Strut condition*: used on the stent. The normal velocity component and the tangent velocity component are specified with null value $u = 0$ and $v = 0$. The streamfunction and the concentration are also specified $\psi = 1.3$ and $c = 1$ respectively.

The boundary condition of the vorticity field is calculated in the solution algorithm scheme as we will see later.

2.2 Finite Element Method

This is paper, was used the Galerkin formulation to discretize the government equations. The spatial domain was discretized using linear triangular elements by open source software called GMSH proposed by Geuzaine and Remacle (2009). For the discretization of the temporal domain was used a finite differences method with a forward difference approximation and the Taylor-Galerkin Method with omitted terms of higher order than two was used to the decrease the spurious oscillations for moderate to high Reynolds numbers as proposed by Donea (1984) and Zienkiewicz and Taylor (2000). Therefore, the governing equations in matrix form used in this paper were:

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \frac{1}{Re} [K_{xx} + K_{yy}] \right] w^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} w^n - u \cdot G_x w^n - v \cdot G_y w^n - u \frac{\Delta t}{2} [u K_{xx} + v K_{xy}] w^n - v \frac{\Delta t}{2} [u K_{yx} + v K_{yy}] w^n \quad (5)$$

$$[K_{xx} + K_{yy}] \psi = M w \quad (6)$$

$$M u = G_y \psi \quad (7)$$

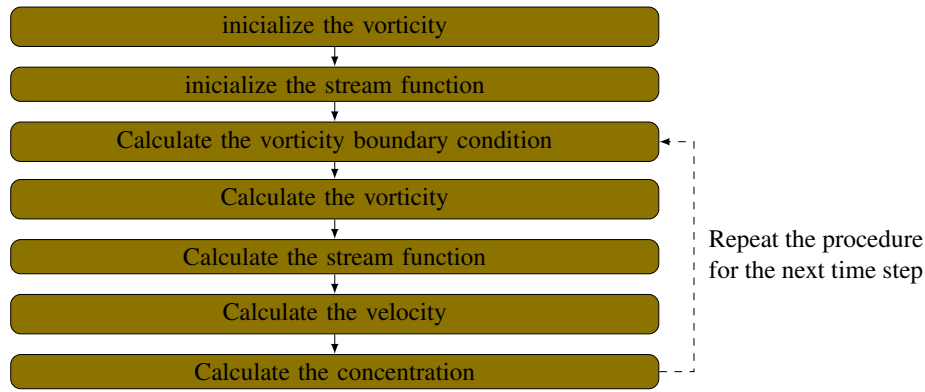
$$Mv = -G_x\psi \quad (8)$$

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \frac{1}{ReSc} [K_{xx} + K_{yy}] \right] c^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} c^n - u \cdot G_x c^n - v \cdot G_y c^n - u \frac{\Delta t}{2} [uK_{xx} + vK_{xy}] c^n - v \frac{\Delta t}{2} [uK_{yx} + vK_{yy}] c^n \quad (9)$$

Where, M is mass matrix, G_x and G_y are gradient matrix, K_{xx} , K_{xy} , K_{yx} and K_{yy} are stiffness matrix. The last term of the Eqs. 5 and 9 is known as numerical diffusion and it decrease the spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds numbers. For scalars, *Taylor Galerkin Method* and *Characteristic Galerkin* produce the same result as showed by Lohner *et al.* (1984). The superscripts $n+1$ and n are the scalar that will be calculated and that was calculated in the previous time step, respectively.

2.3 Numerical Solution

The linear system of equations that come from implementing the FEM is solved through iterative method *Conjugate Gradient Solver* available in the public library for scientific tools *SciPy* maintained by Jones *et al.* (2001) in the Python language. The solution algorithm used is shown below:



that is:

1. Initialize the vorticity with the equation:

$$Mw = G_x v - G_y u$$

2. Initialize the stream function with the equation:

$$[K_{xx} + K_{yy}] \psi = Mw$$

It is necessary to apply the boundary condition in the equation.

3. Calculate the vorticity boundary condition with the equation:

$$Mw = G_x v - G_y u$$

4. Calculate the vorticity with the equation:

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \frac{1}{Re} [K_{xx} + K_{yy}] \right] w^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} w^n - u \cdot G_x w^n - v \cdot G_y w^n - u \frac{\Delta t}{2} [uK_{xx} + vK_{xy}] w^n - v \frac{\Delta t}{2} [uK_{yx} + vK_{yy}] w^n$$

Where w^n is the vorticity calculated in the previous time step and w^{n+1} is the vorticity that will be calculated in the time step. It is necessary to apply the boundary condition calculated in the third step before finding vorticity field.

5. Calculate the stream function with equation:

$$[K_{xx} + K_{yy}] \psi = Mw$$

It is necessary to apply the boundary condition in the equation before finding streamfunction field.

6. Calculate the velocity with the equation:

$$Mu = G_y \psi$$

$$Mv = -G_x \psi$$

It is necessary to apply the boundary condition in the equation before u and v . Note that one can solve the linear system using the conjugate gradient method, since M is positive and definite matrix or M can be approximated by its lumped version and therefore easily inverted.

7. Calculate the concentration with equation:

$$\left[\frac{M}{\Delta t} + \frac{1}{ReSc} [K_{xx} + K_{yy}] \right] c^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} c^n - u \cdot G_x c^n - v \cdot G_y c^n$$

$$- u \frac{\Delta t}{2} [u K_{xx} + v K_{xy}] c^n - v \frac{\Delta t}{2} [u K_{yx} + v K_{yy}] c^n$$

Where c^n is the vorticity calculated in the previous time step and c^{n+1} is the vorticity that will be calculated in the time step. It is necessary to apply the boundary condition in the equation before finding concentration field.

8. Return the third step and repeat the procedure for next time step.

The first and second steps are out of time loop, while the third to the seventh step are inside of time loop. The application of the boundary condition in the equation can be before loop, except for the vorticity equation (*fourth step*) that the boundary condition must be applied at each time step.

3. VALIDATION

The validation of the numerical simulation was done by well-known benchmark problem: flow in a lid-driven cavity. The dimensions domain in x-direction and y-direction are [0,1]. We used a mesh with 1563 nodes and 2988 elements and the following Reynolds numbers (Re): 10, 100, 400 and 1000. The results were compared with Ghia *et al.* (1982) and Marchi *et al.* (2009).

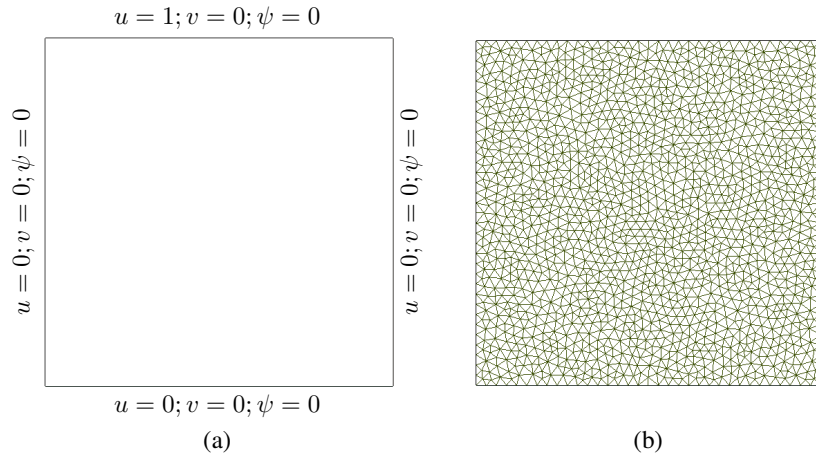


Figure 1: Lid-driven cavity: (a) geometry (b) mesh.

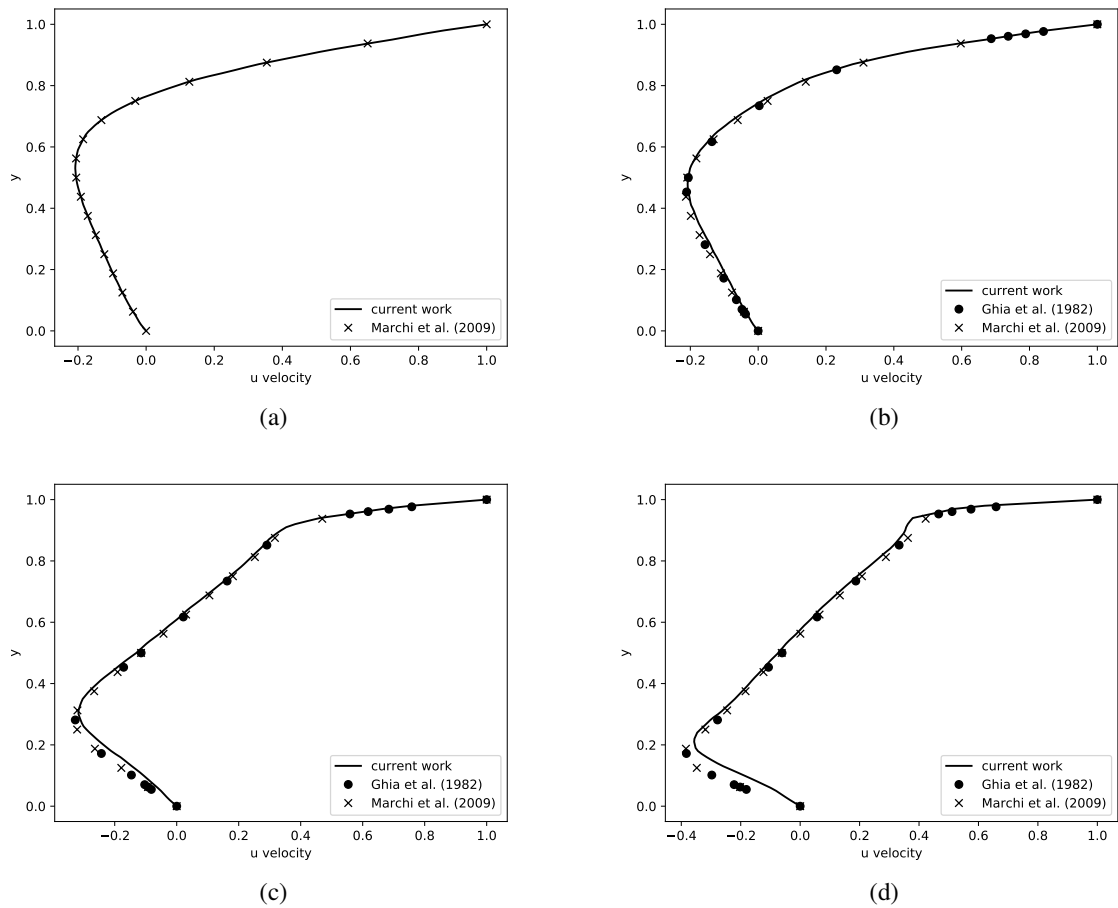


Figure 2: Centerline velocity profile ($x = 0.5$) in a lid-driven cavity for different Reynolds numbers: (a) 10 (b) 100 (d) 400 (f) 1000.

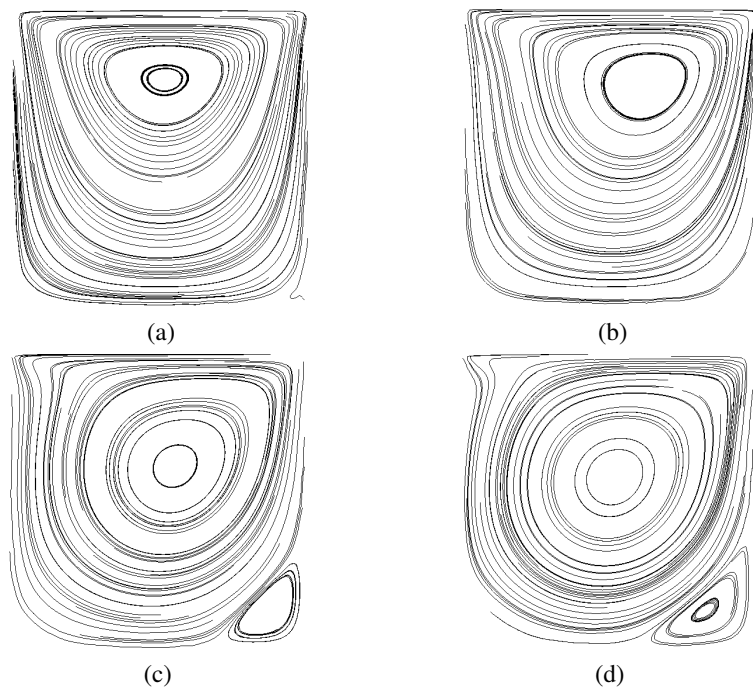


Figure 3: Streamfunction countours in a lid-driven cavity for different Reynolds numbers: (a) 10 (b) 100 (c) 400 (d) 1000.

4. RESULTS AND DISCUSSION

Some results of simulations are shown to demonstrate its capability of using unstructured triangular meshes on various geometries and combination of geometries. Numerical results are given for several cases of blood flows in artery. The post-processing was performed by open source software *PARAVIEW* proposed by Henderson (2007). The lumen diameter of a typical artery is about $D = 0.003\text{m}$, viscosity in the lumen are set to $\mu = 0.0035\text{Pa.s}$ and density $\rho = 1060\text{kg/m}^3$ as suggested by Bozsak *et al.* (2014). According to Kessler *et al.* (1998), the velocity of the flow at coronary artery is $v = 12\text{cm/s}$. Therefore, the Reynolds number is $Re = 109$. Four different geometries were used in the simulations as proposed by Wang *et al.* (2017) and is shown in the Figure 4. Only half domain are shown since the results are symmetric in y-direction.

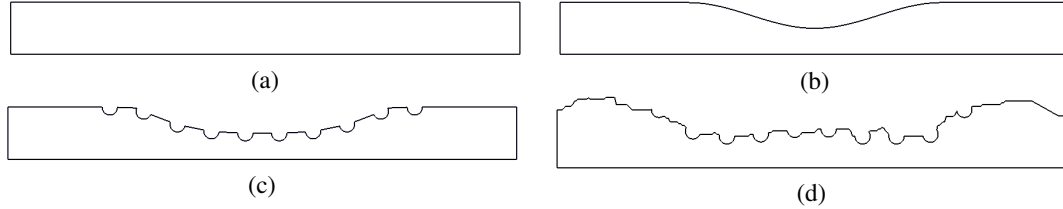


Figure 4: Non-dimensional geometry for blood flow dynamics in coronary arteries. The channel length $L = 10R$ is based on the channel width $R = 1$. (a) Straight Channel (b) Curved Channel (c) Curved Channel with Stent and (d) Real Channel with Stent.

4.1 Straight Channel

For the case where we don't have atherosclerosis, the coronary artery is a straight channel. In the literature, this case is known as Hagen-Poiseuille flow and there is an analytical solution for the velocity profile. The analytical solution is given by:

$$u = u_{max} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \quad (10)$$

where u_{max} is the velocity in the symmetry axis and has the value $u_{max} = 2$, R is non-dimensional radius and has the value $R = 1$ and y the width of half vessel and ranges from $y = [0, 1]$.

The Figure 5 shows the transient velocity profile along the y-direction at the middle of the channel ($x = 5.0R$). As expected, the velocity profile evolution in time converges to the analytical solution with a small error.

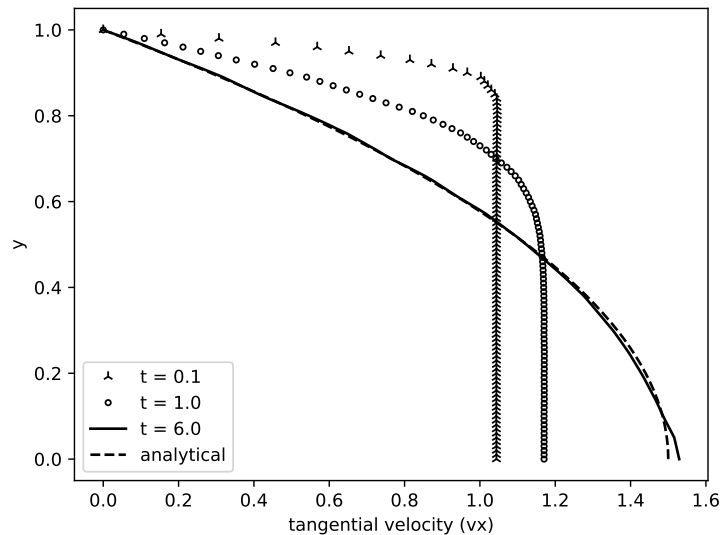


Figure 5: Velocity field profile evolution in time for Straight Channel.

The Figure ?? shows the velocity field evolution in space and time for half domain since the results are symmetric in y-direction. The velocity field is represented with non-dimensional values where the red color is $vx = 2$ and the blue color is $vx = 0$.

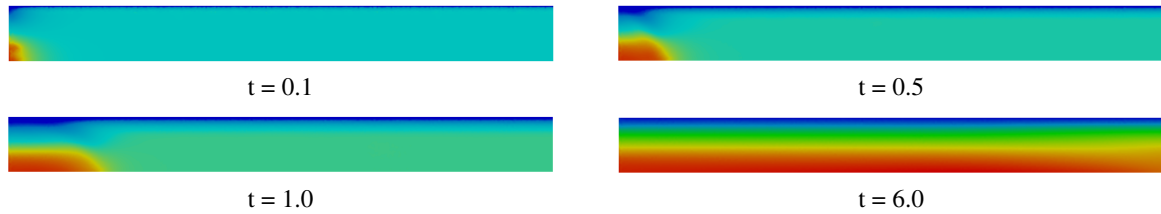


Figure 6: Time evolution of the velocity field for the straight geometry channel. The velocity profile at the middle of the channel is showed in Fig. 5.

4.2 Curved Channel

For the case where we have atherosclerosis, the coronary artery is a curved channel. This geometry promotes a smooth reduction of the channel diameter followed by a smooth expansion as commonly found in Venturi channel. Was considered 40% of obstruction, that is, the vessel has 60% of diameter for blood flow. The Figure 7 shows the transient velocity profile along the y-direction at the middle of the channel ($x = 5.0R$).

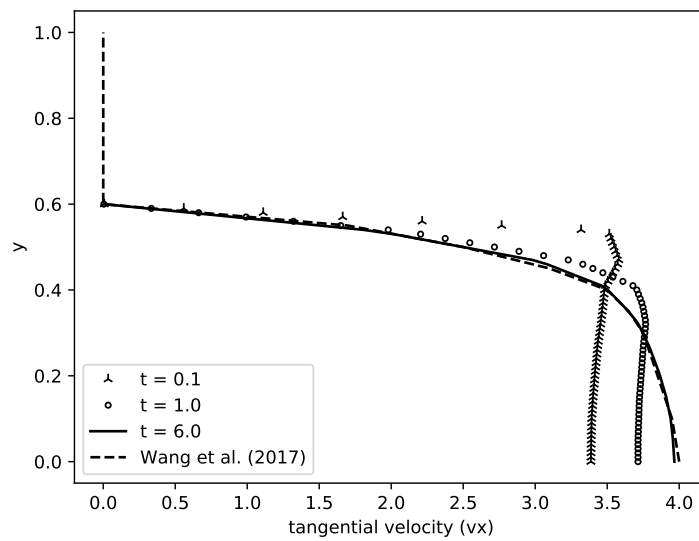


Figure 7: Velocity field profile evolution in time for Curved Channel.

The Figure 8 shows the velocity field evolution in space and time for half domain since the results are symmetric in y-direction. The velocity field is represented with non-dimensional values where the red color is $vx = 4$ and the blue color is $vx = 0$.



Figure 8: Time evolution of the velocity field for the curved geometry channel. The velocity profile at the middle of the channel is showed in Fig. 7.

4.3 Curved Channel with Stent

In this case, the stent strut was placed at the top of the curved channel and it was modeled by 10 semi-circles uniformly spaced. As in other cases was considered 40% of obstruction, that is, the vessel has 60% of diameter for blood flow. The Figure 9 shows the transient velocity profile along the y-direction at the middle of the channel ($x = 5.0R$).

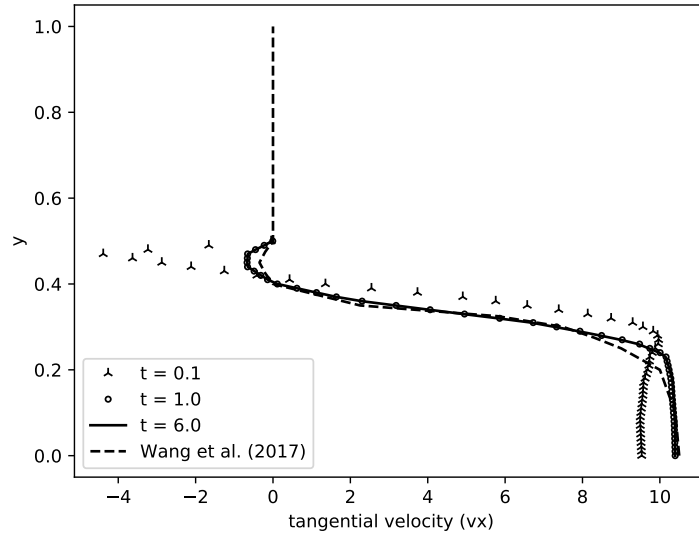


Figure 9: Velocity field profile evolution in time for Curved Channel with Stent.

The Figure 10 shows the velocity field evolution in space and time on the left hand side and the concentration field evolution on the right hand side for half domain since the results are symmetric in y -direction. The velocity field is represented with non-dimensional values where the red color is $vx = 10$ and the blue color is $vx = 0$. The concentration field also is represented with non-dimensional values where the red color is $c = 1$ and the blue color is $c = 0$.

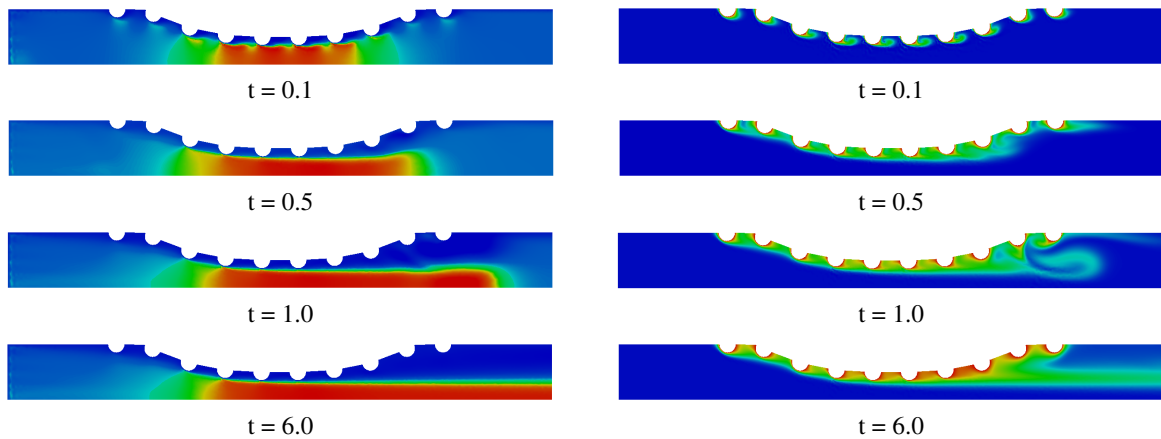


Figure 10: Time evolution of the velocity (left) and concentration (right) fields for the curved geometry channel with stent strut. The velocity profile at the middle of the channel is showed in Fig. 9.

4.4 Real Channel with Stent

In this case, a numerical simulation was performed for a real artery channel whose geometry was taken using image processing from a real coronary artery photography as proposed by Wang *et al.* (2017). It is important to know that each coronary artery geometry is particular to each patient and compatible to its health conditions. The stent strut was placed at the top of the curved channel and it was modeled by 10 semi-circles uniformly spaced. As in other cases was considered 40% of obstruction, that is, the vessel has 60% of diameter for blood flow. The Figure 11 shows the transient velocity profile along the y -direction at the middle of the channel ($x = 5.0R$).

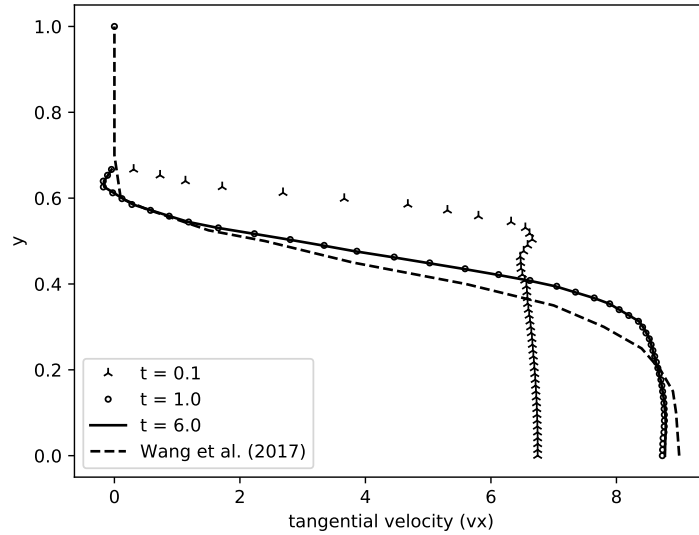


Figure 11: Velocity field profile evolution in time for Real Channel with Stent.

The Figure 12 shows the velocity field evolution in space and time on the left hand side and the concentration field evolution on the right hand side for half domain since the results are symmetric in y -direction. The velocity field is represented with non-dimensional values where the red color is $vx = 9$ and the blue color is $vx = 0$. The concentration field also is represented with non-dimensional values where the red color is $c = 1$ and the blue color is $c = 0$.

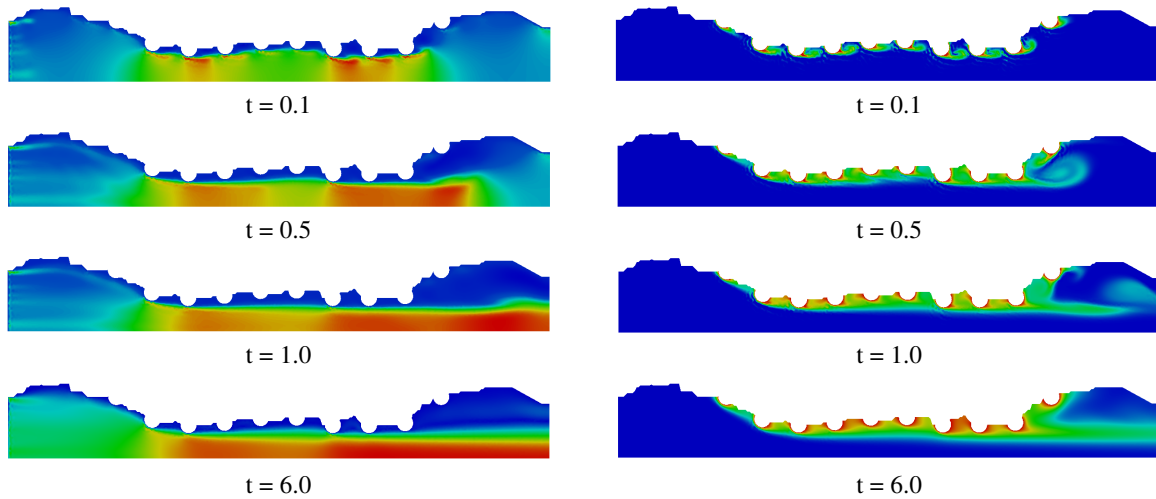


Figure 12: Time evolution of the velocity (left) and concentration (right) fields for the curved geometry channel with stent strut. The velocity profile at the middle of the channel is showed in Fig. 11.

5. CONCLUSION

The results obtained in this paper for the velocity and concentration fields of complex geometries of a modeled coronary artery channel were similar to those presented by Wang *et al.* (2017). However, the numerical simulation was performed using the streamfunction and vorticity formulation by finite element method approach. The Taylor-Galerkin Method was applied to the decrease the spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds numbers. The validation of the numerical solution was done by well-known benchmark lid-driven cavity problem and the results were compared with others authors as well as the Hagen-Poiseuille flow for the case straight channel that was compared with analytical solution. The streamfunction and vorticity formulation showed an useful approximation for to calculate the velocity and concentration fields since the variables are scalars allowing then a smooth implementation.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank the FAPERJ (Research Support Foundation of the State of Rio de Janeiro) for its financial support.

7. REFERENCES

- Anjos, G.R., 2012. *A 3D ALE Finite Element Method for Two-Phase Flows with Phase Change*. Ph.D. thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Bozsak, F., J-M., C. and Barakat, A., 2014. "Modeling the transport of drugs eluted from stents: physical phenomena driving drug distribution in the arterial wall". *Biomech Model Mechanobiol*, Vol. 13, pp. 327–347. doi:10.1007/s10237-013-0546-4.
- Donea, J., 1984. "A taylor-galerkin method for convective transporte problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Geuzaine, C. and Remacle, J., 2009. "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., 1982. "High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokesequations and a multi-grid." *Journal of Computational Physics*.
- Henderson, A., 2007. "Paraview guide, a parallel visualization application". *Kitware Inc*.
- Jones, E., Oliphant, T. and Peterson, P., 2001. "Scipy - open source scientific tools for python". URL <http://www.scipy.org/>. [Online; accessed 15/03/2018 09:14].
- Kessler, W., Moshage, W., Galland, A., Zink, D., Achenbach, S., Nitz, W., Laub, G. and Bachmann, K., 1998. "Assessment of coronary blood flow in humans using phase difference mr imaging comparison with intracoronary doppler flow measurement." *International Journal of Cardiac Imaging*.
- Lohner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C., 1984. "The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method". *International Journal of Numerical Methods in Fluids*.
- Marchi, C.H., Suero, R. and Araki, L.K., 2009. "The lid-driven square cavity flow: Numerical solution with a 1024 x 1024 grid." *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*.
- McGinty, S. and Pontrelli, G., 2016. "On the role of specific drug binding in modelling arterial eluting stents". *Journal of Mathematical Chemistry*.
- Python, S.F., 1990. "Python language reference, version 2.7". URL <http://www.python.org/>. [Online; accessed 12/12/2017 12:18].
- Wang, H., McGinty, S., Lucena, R., Pontes, J., Anjos, G. and Mangiavacchi, N., 2017. "Dynamics of blood flow in coronary artery". *International Congress of Mechanical Engineering*.
- World Health Organization, W., 2017. "Cardiovascular diseases". URL <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs317/en/>. [Online; accessed 28/03/2018 14:37].
- Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 2000. "Finite element method - volume 3: Fluid dynamics". *Butterworth-Heinemann*.

8. RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.

BLOOD FLOW SIMULATION USING STREAM FUNCTION-VORTICITY FEM FORMULATION

L. MARQUES¹, G. R. ANJOS² AND J. PONTES³

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia Mecânica

¹ marquesleandro67@gmail.com, ² gustavo.anjos@uerj.br and ³ jose.pontes@uerj.br

1. ABSTRACT

The present work aims at developing a computational framework to simulate coronary artery flows in cartesian coordinates. An accurate method capable of capturing the flow dynamics is strictly required. In this paper a Finite Element Method (FEM) is used to solve the governing equations of the motion of the blood flow found in coronary artery as incompressible fluid using the stream-vorticity formulation with coupled species transport equation.

Keywords: Finite Element Method, Taylor-Galerkin Method, Coronary Artery, Blood.

2. INTRODUCTION

According to the *Health World Organization*, more people die annually from the cardiovascular diseases (CVDs) than from any other cause in the world. The leading cause of these deaths is coronary artery with atherosclerosis and the main purpose of stent implementation is to attack this problem. This work aims to know how the dynamics of blood flow in coronary artery with atherosclerosis and with stents struts placed.

We consider the hydrodynamic of the blood flow in the artery in the vicinity of a stent strut for a two-dimensional domain. The difference of artery shapes and existence of the struts have been investigated in 4 test cases in the influence on the flow dynamics and the transport of chemical species as suggested by Wang et al. (2017).

We employ the Finite Element method on an unstructured mesh created by open source software called *GMSH* for the discretization of the incompressible single-phase Navier-Stokes through the stream-vorticity function coupled with species transport equation. We apply the Taylor-Galerkin method to decrease the spurious oscillations as seen for moderate to high Reynolds numbers as proposed by Donea (1984).

3. MATHEMATICAL MODEL

A two-dimensional Finite Element Method approach is employed to analyse the dynamics of blood flow in coronary artery and possible influence of stents struts. The modelling of the problem can be described by a formulation using the vorticity and stream function applied in the conservation of momentum equation for incompressible flow and the species transport equation.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (2)$$

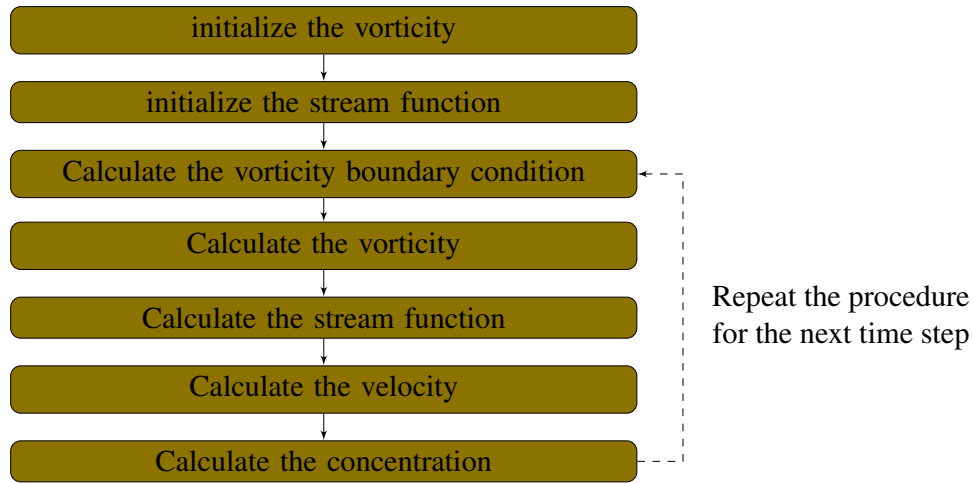
$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (4)$$

Where ω is the vorticity field, ψ is the stream function field, c is the concentration scalar field of the chemical species, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ is the velocity field, $\mathbf{D} = [\partial/\partial y, -\partial/\partial x]$ is a mathematical operator, $Re = \rho u D / \mu$ is the Reynolds number, $Sc = \nu / D$ is the Schmidt number, x and y are the independent spatial variables and t is the time variable.

The temporal domain was discretized using the Taylor series with the terms higher second order omitted. The second order terms were used to decrease the spurious oscillations for moderate to high Reynolds numbers as proposed by Donea (1984). The spatial domain was discretized by Galerkin Formulation using linear triangular.

The linear system of equations that come from implementing the FEM is solved through iterative method *Conjugate Gradient Solver* available in the public library for scientific tools *SciPy* in the *Python* language. The solution algorithm used is shown below:



4. RESULTS

Numerical results are shown for several cases of blood flows in artery. The post-processing was performed by open source software *PARAVIEW*. The lumen radius of a typical artery is about $R = 0.0015\text{m}$, viscosity in the lumen are set to $\mu = 0.0035\text{Pa.s.}$ and density $\rho = 1060\text{kg/m}^3$ as suggested by Bozsak et al. (2014). According to Kessler et al. (1998), the velocity of the flow at coronary artery is $v = 12\text{cm/s}$. Therefore, the Reynolds number is $Re = 54.5$. Four non-dimensional geometries were used with channel length $L = 10R$ and channel width $R = 1$ as proposed by Wang et al. (2017), however were modified to cartesian coordinates and

are shown in the Figure 1. Only half domain are shown since the results are symmetric in y-direction.

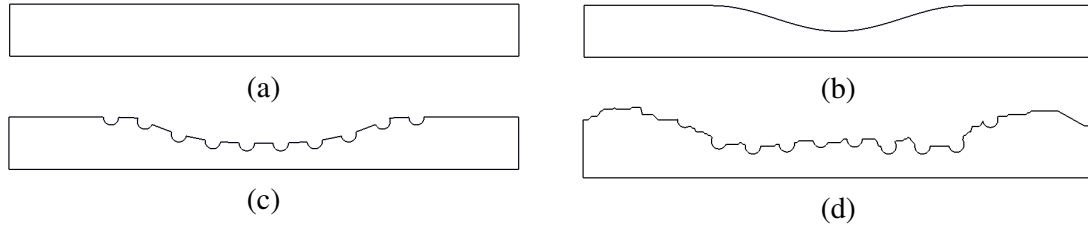


Figura 1 – Non-dimensional geometry for blood flow dynamics in coronary arteries. (a) Straight Channel (b) Curved Channel (c) Curved Channel with Stent and (d) Real Channel with Stent.

In fig 2 and 3, are shown the velocity profiles evolution in time and the velocity and concentration fields for the steady state respectively. There is a significant difference between the results shown and those shown in axisymmetric coordinates by Wang et al. (2017).

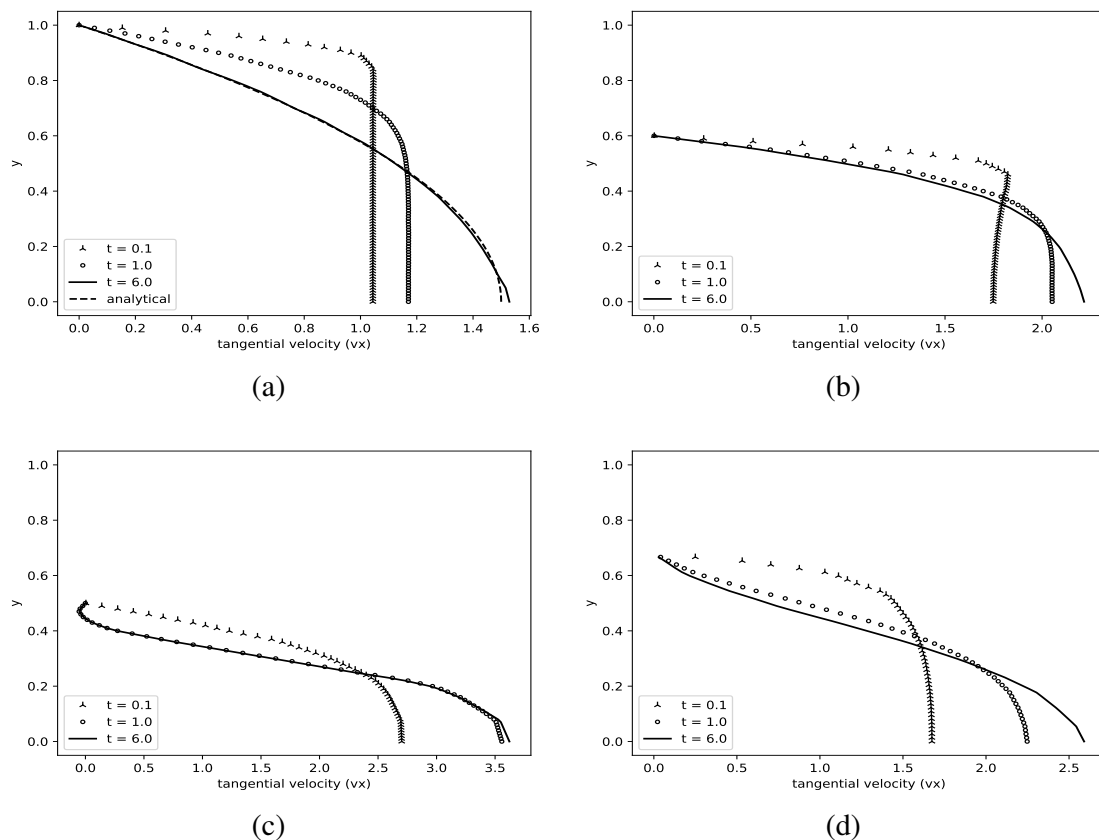


Figura 2 – Velocity field profile evolution in time for various geometries (a) Straight Channel (b) Curved Channel (c) Curved Channel with Stent and (d) Real Channel with Stent.

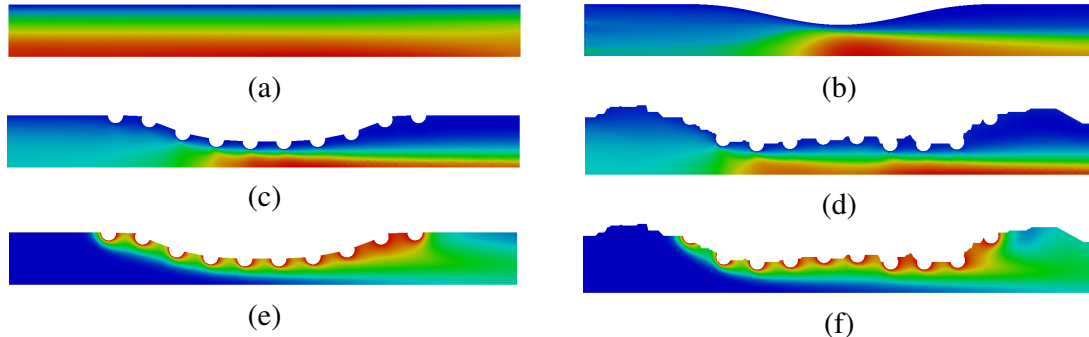


Figura 3 – Velocity field steady state: (a) Straight Channel (b) Curved Channel (c) Curved Channel with Stent and (d) Real Channel with Stent. Concentration field steady state: (e) Curved Channel with Stent and (f) Real Channel with Stent.

5. CONCLUSION

In this paper, the results were shown for two-dimensional domain in complex geometries of modeled coronary artery channel. The numerical simulation was performed using the streamfunction and vorticity formulation with coupled species transport equation by finite element method approach. The streamfunction and vorticity formulation showed a smooth implementation for to calculate the variables since they are scalars. However, there is a significant difference between the results shown in cartesian coordinates and those shown by Wang et al. (2017) in axisymmetric coordinates.

6. REFERENCES

- BOZSAK, F.; J-M., C.; BARAKAT, A. Modeling the transport of drugs eluted from stents: physical phenomena driving drug distribution in the arterial wall. *Biomech Model Mechanobiol*, 13, 327–347, 2014.
- DONEA, J. A taylor-galerkin method for convective transporte problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984.
- KESSLER, W.; MOSHAGE, W.; GALLAND, A.; ZINK, D.; ACHENBACH, S.; NITZ, W.; LAUB, G.; BACHMANN, K. Assessment of coronary blood flow in humans using phase difference mr imaging comparison with intracoronary doppler flow measurement. *International Journal of Cardiac Imaging*, 1998.
- WANG, H.; MCGINTY, S.; LUCENA, R.; PONTES, J.; ANJOS, G.; MANGIAVACCHI, N. Dynamics of blood flow in coronary artery. *International Congress of Mechanical Engineering*, 2017.

