



ANÁLISE NUMÉRICA DE UM TROCADOR DE CALOR UTILIZADO NA
PRODUÇÃO DE CERVEJA ARTESANAL

Pedro Henrique Paranhos Lima

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Gustavo dos Anjos Rabello

Daniel Barbedo Vasconcelos Santos

Rio de Janeiro

Abril de 2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Departamento de Engenharia Mecânica

DEM/POLI/UFRJ



ANÁLISE NUMÉRICA DE UM TROCADOR DE CALOR UTILIZADO NA
PRODUÇÃO DE CERVEJA ARTESANAL

Pedro Henrique Paranhos Lima

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

Prof. Gustavo dos Anjos Rabello, PhD

Daniel Barbedo Vasconcelos Santos, D.Sc

Prof. Carolina Palma Naveira Cotta, D.Sc

Prof. Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto, Dr.Ing

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2026

Paranhos Lima, Pedro Henrique

ANÁLISE NUMÉRICA DE UM TROCADOR DE CALOR UTILIZADO NA PRODUÇÃO DE CERVEJA ARTESANAL/ Pedro Henrique Paranhos Lima. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2026.

XIII, 123 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Gustavo dos Anjos Rabello

Daniel Barbedo Vasconcelos Santos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/
Curso de Engenharia Mecânica, 2026.

Referências Bibliográficas: p. 83 – 86.

1. Transferencia de Calor. 2. Mecânica dos Fluidos.
3. Cerveja. 4. Trocadores de Calor. I. dos Anjos Rabello, Gustavo *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica.
III. ANÁLISE NUMÉRICA DE UM TROCADOR DE CALOR UTILIZADO NA PRODUÇÃO DE CERVEJA ARTESANAL.

Dedico este trabalho a todos que estiveram comigo ao longo desta caminhada, em especial à minha família, amigos e companheira.

Agradecimentos

Dedico essa dissertação aos meus pais, que me sustentaram durante todo o processo de formação acadêmica. Ao meu irmão Bruno Hermes, que além de fabricar a cerveja utilizada para a realização do estudo, me ajudou ao longo da caminhada no curso, seja de maneira emocional, financeira ou mesmo em algumas matérias da faculdade. E aos meus amigos Kaique, Tainá, Fábio, Gabriel Gomes, Gabriel Santos, Belo e Laíse, que participaram dessa caminhada comigo. Por fim, mas não menos importante, a Letícia, que me suportou de todas as formas possíveis durante o término da minha jornada.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

ANÁLISE NUMÉRICA DE UM TROCADOR DE CALOR UTILIZADO NA PRODUÇÃO DE CERVEJA ARTESANAL

Pedro Henrique Paranhos Lima

Abril/2026

Orientadores: Gustavo dos Anjos Rabello

Daniel Barbedo Vasconcelos Santos

Programa: Engenharia Mecânica

A etapa de resfriamento do mosto na produção de cerveja artesanal exige redução rápida da temperatura (de $80^{\circ}C$ para valores abaixo de $60^{\circ}C$) para evitar contaminações e formação excessiva de DMS, mas há carência de ferramentas acessíveis para o dimensionamento adequado de trocadores de calor de contrafluxo (chillers) em pequena escala. Este trabalho desenvolve um programa em Python que, com base na equação de convecção-difusão em coordenadas cilíndricas, discretizada pelo Método dos Elementos Finitos, simula numericamente o campo de temperatura no interior do chiller. A principal métrica de sucesso é a temperatura de saída do mosto, permitindo avaliar o desempenho térmico do equipamento sob diferentes vazões da água de resfriamento.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

ANALYSIS OF A HEAT EXCHANGER USED FOR HOMEBREWING BEER
PRODUCTION

Pedro Henrique Paranhos Lima

April/2026

Advisors: Gustavo dos Anjos Rabello

Daniel Barbedo Vasconcelos Santos

Department: Mechanical Engineering

The wort cooling stage in craft beer production requires a rapid temperature reduction (from $80^{\circ}C$ to below $60^{\circ}C$) to avoid contamination and excessive DMS formation, yet there is a lack of accessible tools for the proper sizing of counterflow heat exchangers (chillers) at small scales. This work develops a Python program based on the convection-diffusion equation in cylindrical coordinates, discretized by the Finite Element Method, to numerically simulate the temperature field inside the chiller. The main success metric is the wort outlet temperature, allowing the evaluation of the equipment's thermal performance under different cooling water flow rates.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivo	2
1.2 Metodologia	2
1.3 Organização do Estudo	3
2 Revisão Bibliográfica	4
2.1 Produção de Cerveja Artesanal	5
2.2 Processo de Resfriamento do Mosto	8
2.2.1 Chiller	10
2.3 Síntese da Literatura e Lacunas Identificadas	13
2.3.1 Resumo dos Estudos	13
3 Fundamentação Teórica	15
3.1 Mecânica dos Fluidos	15
3.1.1 Tipos de Escoamento	16
3.1.2 Desenvolvimento do Escoamento	17
3.1.3 Equação de Navier-Stokes	17
3.1.4 Equação da Continuidade	18
3.2 Discretização da Equação Governante	18
3.2.1 Balanço de Energia em um Volume de Controle	18
3.2.2 Termo Convectivo	19
3.2.3 Termo Condutivo (Lei de Fourier)	20

3.2.4	Taxa de Acúmulo e Geração	20
3.2.5	Equação Final	20
3.3	Condições de Contorno	21
3.3.1	Condição de Contorno de Dirichlet	21
3.3.2	Condição de Contorno de Neumann	21
3.3.3	Condição de Contorno de Robin	22
3.4	Escoamento Interno	22
3.4.1	Perfil de Velocidade na Região de Escoamento Interno	23
3.4.2	Escoamento Anular	24
3.5	Transferência de Calor	26
3.5.1	Condução	26
3.5.2	Convecção	27
3.6	Introdução ao Método de Elementos Finitos	28
3.7	Introdução ao Método de Diferenças Finitas	29
4	Metodologia	31
4.1	Hipóteses Simplificadoras	31
4.2	Método dos elementos finitos	32
4.2.1	Espaços funcionais	32
4.2.2	Forma Fraca	34
4.2.3	Discretização do Domínio	39
4.2.4	Taylor-Galerkin	44
5	Verificações	47
5.1	Escoamento de Hagen–Poiseuille	48
5.1.1	Configuração do Problema	49
5.1.2	Análise de Convergência Numérica	50
5.1.3	Solução Semi-Analítica de Hagen-Poiseuille	53
5.1.4	Comparação com o Caso Estimado	55
5.2	Trocador de Calor Bitubular em Regime Laminar	55
5.2.1	Configuração do Problema	55
5.2.2	Solução Analítica	57
5.2.3	Resistência térmica do tubo devido à espessura da parede	60

5.2.4	Resistência térmica global	61
5.2.5	Comparação com o Modelo Numérico	63
5.2.6	Verificação do Modelo Numérico	63
6	Resultados e Discussão	66
6.1	Estudo de Caso	66
6.2	Propriedades e Condições de Contorno	67
6.2.1	Propriedades do Mosto	67
6.2.2	Propriedades da Água	68
6.2.3	Parâmetros da Simulação	69
6.2.4	Condições de Contorno	70
6.3	Resultados	70
6.3.1	Perfil de Velocidade	70
6.3.2	Perfil de Temperatura	71
6.3.3	Temperatura de Saída	73
6.3.4	Comparação com efetividade-NTU	77
7	Conclusão	81
7.1	Sugestões para desenvolvimentos futuros	82
	Referências Bibliográficas	83
A	Código-Fonte para Trocador de Calor	87
B	Código-Fonte para Escoamento Interno	112

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de Moagem do Malte	6
2.2	Representação básica do processo produtivo de cerveja artesanal	7
2.3	Fórmula do Dimetilsulfeto	8
2.4	Chiller de Contrafluxo	11
2.5	Chiller de Placas	12
2.6	Chiller de Imersão	12
3.1	Desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica em escoamento interno	17
3.2	Volume de Controle Infinitesimal	19
3.3	Representação esquemática da seção transversal de dois tubos concêntricos.	25
3.4	Fluxograma das principais etapas do Método dos Elementos Finitos (MEF)	29
4.1	Exemplo de Diferentes Malhas	40
4.2	Exemplo de um Elemento Triangular	41
4.3	Esboço do método de Taylor-Galerkin	44
5.1	Condições de contorno para o caso do escoamento de Hagen–Poiseuille	49
5.2	Evolução temporal da temperatura de saída do fluido para diferentes níveis de refinamento de malha	52
5.3	Condições de Contorno do Tubo Bitubular	57
6.1	Condições de Contorno	70
6.2	Exemplo de Perfil de Velocidade ao Longo da Seção Radial	71
6.3	Temperatura nas Saídas do Mosto e da Água nas Respectivas Saídas	72

6.4	Campo de Temperatura para a Vazão da água de $0.01l/s$	73
6.5	Campo de Temperatura para a Vazão da água de $0.02l/s$	73
6.6	Campo de Temperatura para a Vazão da água de $0.03l/s$	74
6.7	Campo de Temperatura para a Vazão da água de $0.04l/s$	74
6.8	Temperatura dos Fluidos ao longo do Comprimento	76
6.9	Temperatura dos Fluidos do Chiller em Função da Vazão	76

Lista de Tabelas

2.1	Comparação básica dos tipos de Chiller	10
2.2	Síntese dos estudos sobre resfriamento de mosto e simulação de trocadores de calor	13
5.1	Configuração do hardware utilizado nas simulações	48
5.2	Análise de convergência para as diferentes malhas	51
5.3	Custo computacional em função do refinamento de malha	52
5.4	Comparação das temperaturas de saída e parâmetros de desempenho para os arranjos em contracorrente e corrente paralela.	63
5.5	Configurações de malha utilizadas para ambas as análises	64
5.6	Desvios entre temperaturas numéricas e analíticas	64
6.1	Propriedades físicas do mosto	68
6.2	Propriedades físicas da água a 30 °C	69
6.3	Parâmetros da simulação numérica	69
6.4	Temperaturas de Saída dos Fluidos para as Diferentes Vazões	75
6.5	Temperaturas de Saída a Diferentes Vazões	75
6.6	Temperaturas de saída e parâmetros de desempenho para diferentes vazões de água em contracorrente	79
6.7	Resultados de temperatura e erro para diferentes vazões de água	80
7.1	Resumo dos erros absolutos e relativos máximos e médios obtidos na comparação entre resultados calculados e numéricos.	81

Capítulo 1

Introdução

O Brasil figura entre os principais polos cervejeiros do mundo e também entre os maiores consumidores da bebida. O consumo de cerveja no país permanece em crescimento contínuo. De acordo com o Global Beer Consumption Report de 2024, o Brasil ocupou a 3^a colocação entre os maiores consumidores de cerveja do mundo, com um consumo total de 15,137 milhões de quilolitros no ano de 2023. Esse volume representa aproximadamente 8% do consumo mundial e um aumento de 1,4% em relação a 2022, conforme apresentado em [1].

Com o aumento do consumo de cerveja, observa-se o crescimento do número de cervejarias artesanais e caseiras, que se destacam por apresentar sabores e estilos distintos daqueles produzidos pelas grandes indústrias. Segundo o Anuário da Cerveja de 2024 [2], o número de cervejarias distribuídas pelo território brasileiro segue em expansão. Somente no ano de 2023, foi registrado um aumento de 6,8% no total de estabelecimentos formalmente cadastrados.

É desejável que o mosto seja resfriado o mais rapidamente possível após o término da ebulição, idealmente até a temperatura de inoculação da levedura. O ponto mais crítico do resfriamento ocorre até aproximadamente $60^{\circ}C$, faixa na qual a formação de dimetil sulfeto (DMS), a partir da decomposição térmica da S-metilmetionina (SMM), torna-se pouco significativa. A temperatura de inoculação da levedura varia de acordo com o tipo de levedura utilizada, situando-se tipicamente no intervalo de $8^{\circ}C$ a $22^{\circ}C$.

Caso o resfriamento não ocorra de forma rápida, o DMS, principal composto associado a *off-flavors* com aroma de milho cozido, pode continuar a ser formado em

temperaturas elevadas. A remoção efetiva do DMS ocorre principalmente durante a etapa de fervura vigorosa, por volatilização.

Por esses motivos, o resfriamento rápido do mosto é fundamental tanto para a redução do risco de contaminações microbiológicas e da formação excessiva de dimetil sulfeto (DMS) quanto para o atingimento da faixa ideal de temperatura para a inoculação da levedura, possibilitando o início adequado do processo de fermentação.

1.1 Objetivo

O presente estudo tem como objetivo analisar, por meio do método dos elementos finitos, se um chiller de contrafluxo de 15 m, amplamente utilizado na fabricação de cerveja em pequena escala e de forma caseira, é capaz de reduzir a temperatura do mosto até o mínimo de 60°C , que corresponde a temperatura na qual a formação de dimetil sulfeto (DMS) torna-se pouco significativa, em um intervalo de tempo aproximado de 30 minutos. A partir disso, pode-se realizar uma estimativa inicial da qualidade da cerveja, pois a mesma não apresentaria um *off-flavor* oriundo da concentração de DMS.

1.2 Metodologia

O método de estudo consiste no desenvolvimento de uma ferramenta numérica capaz de analisar apenas o perfil térmico de diferentes Chillers em um domínio axissimétrico, por meio do método dos elementos finitos. A solução do problema foi obtida a partir da equação de convecção–difusão, sem geração interna de energia, derivada das equações de transferência de calor e do princípio da conservação de energia. O escoamento foi desenvolvido analiticamente a partir das equações de Navier-Stokes.

Além do código desenvolvido em *Python*, foram utilizados dois programas gratuitos: um destinado à geração da malha computacional (*Gmsh*) e outro à visualização e pós-processamento dos resultados (*Paraview*).

1.3 Organização do Estudo

O trabalho está dividido em sete capítulos:

- **Capítulo 2:** Revisão sobre o processo cervejeiro, a necessidade de resfriamento rápido do mosto e os principais tipos de trocadores de calor comumente empregados;
- **Capítulo 3:** Revisão dos principais conceitos de mecânica dos fluidos e transferência de calor, bem como dos diferentes métodos numéricos utilizados neste estudo;
- **Capítulo 4:** Metodologia adotada, incluindo o equacionamento da equação de convecção-difusão e a formulação utilizada no método dos elementos finitos;
- **Capítulo 5:** Validação do código numérico proposto;
- **Capítulo 6:** Resultados obtidos para o caso do Chiller;
- **Capítulo 7:** Conclusões, limitações e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A cerveja é considerada uma das bebidas alcoólicas mais antigas produzidas pela humanidade, com registros em aproximadamente 7000 a.C. na região da Mesopotâmia [3]. Evidências históricas indicam que os sumérios desenvolveram técnicas de fermentação de cereais e possuíam uma deusa da cerveja, Ninkasi, cujo hino contém uma das mais antigas receitas de cerveja já registradas [3, 4]. Da Mesopotâmia, o conhecimento cervejeiro expandiu-se para o Egito, onde a bebida era consumida por todas as classes sociais e utilizada tanto em rituais religiosos quanto como forma de pagamento aos trabalhadores envolvidos na construção das pirâmides [5]. A partir do Egito, as técnicas de produção disseminaram-se pelo Império Romano e, posteriormente, por toda a Europa, adaptando-se aos ingredientes disponíveis em cada região. Durante a Idade Média, a produção cervejeira concentrou-se inicialmente nos mosteiros, onde os monges aprimoraram as técnicas e introduziram o lúpulo como conservante e aromatizante, substituindo gradualmente a mistura de ervas anteriormente conhecida como *gruit* [4, 5].

A transformação da cerveja em produto industrial ocorreu a partir do século XIX, impulsionada pelos trabalhos de Louis Pasteur sobre a ação dos microrganismos na fermentação [6]. Pasteur demonstrou que a levedura era responsável pela conversão dos açúcares em álcool e dióxido de carbono, estabelecendo as bases para o controle microbiológico do processo e permitindo maior previsibilidade e qualidade na produção. Pouco depois, em 1883, Emil Christian Hansen isolou e cultivou pela primeira vez uma linhagem pura de levedura, a *Saccharomyces pastorianus*, amplamente utilizada na produção de cervejas do tipo lager [6, 7]. O século XX testemunhou a

consolidação de grandes grupos industriais e a padronização de estilos, mas também o surgimento, nas últimas décadas, do movimento *craft beer* (cerveja artesanal), que resgatou técnicas tradicionais e ampliou significativamente a diversidade de estilos, ingredientes e perfis sensoriais disponíveis no mercado global [3, 7].

2.1 Produção de Cerveja Artesanal

A primeira etapa do processo de fabricação de cerveja artesanal consiste na maltagem. Ela é necessária para transformar os grãos da cevada em malte, criando condições propícias para que seja possível a formação de enzimas que são necessárias para a quebra do amido em açúcar fermentável.

De maneira resumida, Palmer [8] diz que esse processo ocorre quando a cevada é umidificada para iniciar a germinação, liberando enzimas que convertem amido e proteínas em açúcares e aminoácidos. Em seguida, desidrata-se a cevada, interrompendo o processo germinativo e preservando parcialmente a atividade enzimática do malte.

Após a maltagem, realiza-se a moagem dos grãos, cujo objetivo é romper a casca e expor o endosperma, facilitando a extração dos seus componentes durante a mosturação. Além disso, as cascas remanescentes dos grãos moídos atuam como um meio filtrante natural durante a clarificação do mosto.

As enzimas presentes no malte tornam-se novamente ativas durante a mosturação, por meio da hidratação do malte em temperaturas entre $60^{\circ}C$ e $72^{\circ}C$, variando de acordo com o tipo de malte e a enzima predominante. Ao final desse processo, obtém-se o mosto, um líquido que contém açúcares fermentáveis, aminoácidos e outros nutrientes extraídos do malte.



Figura 2.1: Exemplo de Moagem do Malte

Fonte: [9]

Após esse procedimento, ocorre a recirculação do mosto pelos grãos. Tal procedimento busca sedimentar o resíduo da cevada, criando um filtro que separa partículas sólidas e também ajuda no processo de clarificação do mosto, deixando-o mais claro.

Posteriormente à mosturação, ocorre a fervura do mosto para a adição do lúpulo desejado. Cada lúpulo possui uma temperatura ideal de trabalho, cabendo ao cervejeiro controlá-la. O tempo de fervura e o momento de adição do lúpulo influenciam em aromas e níveis de amargores para a cerveja. A adição do lúpulo também representa um processo crítico da produção cervejeira, pois em altas temperaturas são formados diversos compostos indesejados para a cerveja.

Após a fervura, é necessário resfriar o mosto o mais rapidamente possível. O resfriamento tem dois principais objetivos: impedir a proliferação de microrganismos contaminantes e interromper a síntese de compostos indesejados, como o dimetil-sulfeto (DMS). A formação excessiva de DMS causa *off-flavors* (sabores e aromas defeituosos), geralmente considerados falhas sensoriais na maioria dos estilos cervejeiros.

Após alcançar a temperatura desejada, adiciona-se a levedura ao mosto para o início do processo de fermentação, onde as leveduras irão consumir o açúcar presente no mosto e transformá-lo em dióxido de carbono e etanol, além de formar outros componentes, tais como ésteres, álcoois superiores e compostos sulfurados. Geralmente, esse processo ocorre em temperaturas específicas, variando de acordo com a

levedura escolhida. Porém, na maioria dos casos, é necessário a utilização de um refrigerador durante um longo período de tempo para auxiliar na fermentação e na sedimentação de partículas sólidas, como leveduras vivas em estado de dormência ou mortas e proteínas.

Por fim, existe a maturação, etapa em que a levedura refina os sabores da cerveja. A maturação consiste em deixar a cerveja de repouso durante um tempo após o término da fermentação com o objetivo de promover a clarificação e a redução de compostos indesejados, como diacetil e acetaldeído, além da estabilização do perfil sensorial.

Por fim, ocorre a carbonatação, que consiste em carbonatar o produto resultante através da adição de açúcar, no caso de cerveja engarrafada, ou de injetar diretamente gás carbônico no fermentador para garantir que a cerveja possua gás para o seu consumo.

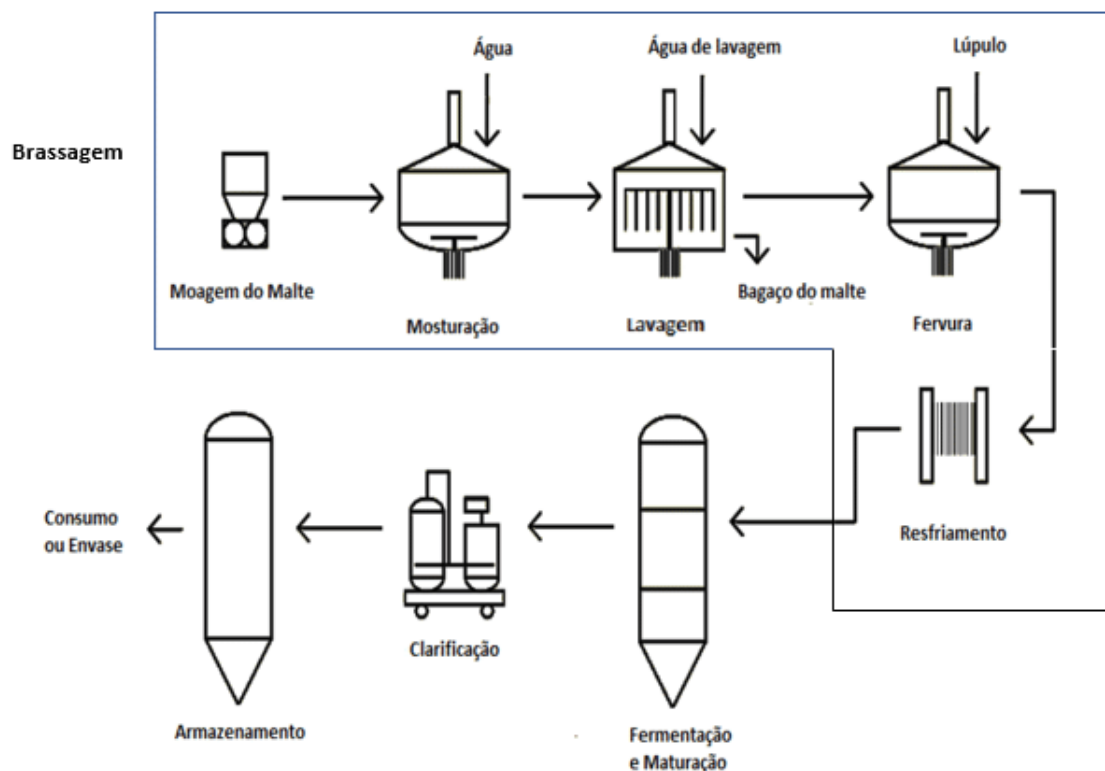


Figura 2.2: Representação básica do processo produtivo de cerveja artesanal

Fonte: [10]

2.2 Processo de Resfriamento do Mosto

Ao final da fervura, é necessário resfriar o mosto da temperatura de ebulição até aproximadamente 30°C . De acordo com Palmer [8], o resfriamento rápido é fundamental para reduzir o tempo em que o mosto permanece em condições favoráveis à contaminação por microrganismos indesejados. Entretanto, enquanto o mosto permanece em temperaturas elevadas, compostos sulfurados ainda podem continuar a ser formados.

O dimetilsulfeto (DMS) é um dos principais compostos sulfatados formados na fabricação da cerveja. Ele é formado a partir de S-metilmetionina (SMM) naturalmente presente nos maltes. Durante a fervura, o DMS é produzido pela degradação térmica da SMM e removido, principalmente, pela vaporização. O resfriamento rápido visa interromper essa reação o mais breve possível, evitando o acúmulo de DMS para além do que foi volatilizado durante a fervura.

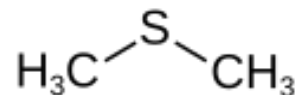


Figura 2.3: Fórmula do Dimetilsulfeto

Caso o mosto seja resfriado lentamente, esses compostos continuarão a ser produzidos e não serão removidos do mosto pela vaporização. Contudo, a presença de DMS na cerveja, em baixas concentrações, não provoca alterações sensoriais no produto final. Existem diversos estilos de cerveja que possuem altas concentrações de DMS propositalmente.

Entretanto, para a maioria dos estilos de cerveja fabricados, a alta concentração de DMS pode interferir diretamente no aroma e no sabor desejado. Quando sua concentração é alta, a cerveja apresenta um gosto e odor de vegetal ou repolho cozido, que é considerado *off-flavor*.

Por outro lado, o resfriamento rápido do mosto também promove a formação do *Cold Break*, que consiste na coagulação de proteínas que precipitam devido à queda brusca de temperatura. A precipitação contribui para a redução da turbidez e melhora a estabilidade físico-química da cerveja.

Diversos trabalhos na literatura investigam a importância do resfriamento do mosto e o desempenho de chillers utilizados nesse processo. Macedo [11] destaca

que o resfriamento rápido do mosto é uma etapa crítica na produção de cerveja artesanal, reduzindo o tempo de exposição ao ambiente e diminuindo o risco de contaminação microbiológica. Nesse contexto, o autor apresenta o dimensionamento de um trocador de calor do tipo duplo tubo aplicado ao resfriamento do mosto.

De forma semelhante, Santana [12] realizou a modelagem e simulação do fenômeno de transferência de calor em um trocador de calor de placas utilizado no resfriamento do mosto em uma microcervejaria. O estudo avaliou parâmetros adimensionais como os números de Reynolds, Prandtl e Nusselt, além do coeficiente convectivo de transferência de calor, com o objetivo de compreender o comportamento térmico do sistema durante a operação.

Além disso, Santos [13] analisou o impacto da temperatura ao longo do processo de produção da cerveja, destacando que o controle térmico do mosto influencia diretamente o perfil sensorial da bebida. Segundo o autor, variações inadequadas de temperatura durante o resfriamento podem provocar a formação de aromas e sabores indesejados, evidenciando a importância do controle rigoroso das condições térmicas nessa etapa do processo cervejeiro.

Estudos recentes também demonstram a aplicação de métodos numéricos na análise de trocadores de calor. Balaji et al. [14] realizaram uma análise numérica de um trocador de calor bitubular utilizando o método dos elementos finitos. No estudo, o domínio físico do trocador foi discretizado e resolvido computacionalmente para determinar a distribuição de temperatura e o comportamento da transferência de calor ao longo do equipamento. Os resultados indicaram que a modelagem baseada em elementos finitos permite avaliar o desempenho térmico do trocador de calor e investigar diferentes condições de operação e propriedades dos fluidos, evidenciando o potencial desse método como ferramenta para análise e dimensionamento de sistemas de troca térmica.

Diante disso, é essencial dimensionar equipamentos capazes de promover o resfriamento rápido do mosto. Nesse contexto, destacam-se os trocadores de calor utilizados na produção cervejeira, conhecidos como *chillers*, responsáveis por realizar a troca térmica entre o mosto e um fluido refrigerante, que normalmente é a água.

2.2.1 Chiller

O Chiller é um tipo de trocador de calor que tem o objetivo de resfriar um fluido de interesse. Existem diversos tipos de chiller, que diferem quanto ao método de operação, à eficiência térmica e ao método de resfriamento.

No caso da produção de cerveja, é necessário resfriar o mosto da temperatura de fervura até uma determinada temperatura para evitar a formação de DMS e garantir a temperatura ideal para continuar o processo de fabricação da cerveja.

Existem diversos tipos de chiller, desde equipamentos utilizados em processos industriais até equipamentos caseiros. A seguir, serão apresentados os principais tipos de chillers utilizados na produção de cerveja caseira e suas respectivas características:

A Tabela 2.1 apresenta, de maneira resumida, as principais características de cada tipo de Chiller utilizado.

Tabela 2.1: Comparação básica dos tipos de Chiller

Característica	Contrafluxo	Placas	Imersão
Eficiência	Alta	Muito Alta	Média
Custo	Moderado	Alto	Baixo
Manutenção	Moderada	Complexa	Simples

Lucca [15] apresenta uma validação experimental ao comparar o desempenho de diferentes métodos de resfriamento do mosto. Os resultados obtidos indicaram que o trocador de calor de placas foi capaz de reduzir a temperatura do mosto de 75 °C para 30 °C em aproximadamente 26 minutos e 51 segundos. Em comparação, um chiller de imersão necessitou de cerca de 43 minutos e 53 segundos para atingir a mesma variação de temperatura, enquanto o resfriamento por banho de gelo demandou aproximadamente 1 hora, 21 minutos e 13 segundos.

Chiller de Contrafluxo

O chiller de contrafluxo consiste em dois tubos concêntricos nos quais o fluido quente e o fluido refrigerante (normalmente água resfriada ou em temperatura ambiente) fluem em direções opostas, maximizando a troca de calor. É comumente utilizado para a produção caseira de cerveja devido à sua praticidade e o seu baixo

custo quando comparado ao chiller de placa.



Figura 2.4: Chiller de Contrafluxo

Fonte: [16]

Chiller de Placas

Os trocadores de calor de placas utilizam uma série de placas metálicas com superfícies onduladas e espaçadas uniformemente, formando canais alternados para a circulação de fluidos. Cada placa possui quatro aberturas e vedações que direcionam os fluxos, permitindo a troca de calor sem misturá-los. O número de placas varia de 2 a 700, conforme necessidade decorrente da quantidade de cerveja produzida.

Esse tipo de chiller é o mais eficiente, além de ser compacto, e poder ser armazenado em qualquer lugar. Os principais desafios consistem em sua sanitização e no seu elevado custo de aquisição [17].



Figura 2.5: Chiller de Placas

Fonte: [18]

Chiller de Imersão

O chiller de imersão consiste em uma serpentina metálica mergulhada diretamente no mosto quente. No caso de produção caseira de cerveja, água da torneira flui no interior da serpentina, promovendo a troca térmica com o mosto pelo diferencial de temperatura. É uma solução de baixo custo e fácil higienização, porém menos eficiente que os chillers de placas ou contrafluxo.



Figura 2.6: Chiller de Imersão

Adaptado de [19]

2.3 Síntese da Literatura e Lacunas Identificadas

2.3.1 Resumo dos Estudos

A Tabela 2.2 apresenta um resumo dos principais trabalhos citados, destacando seus métodos, contribuições e limitações.

Tabela 2.2: Síntese dos estudos sobre resfriamento de mosto e simulação de trocadores de calor

Autor(es)	Objetivo / Método	Principal Limitação
Macedo (2012) [11]	Dimensionamento de trocador duplo tubo para resfriamento de mosto.	Não apresenta validação numérica ou experimental; abordagem puramente analítica.
Santana (2020) [12]	Modelagem e simulação de trocador de placas em microcervejaria; análise de Re, Pr, Nu.	Não implementa simulação numérica própria; depende de correlações empíricas sem verificação independente.
Santos (2017) [13]	Análise do impacto da temperatura no sensorial da cerveja.	Foco sensorial, não aborda modelagem térmica ou dimensionamento de equipamentos.
Lucca (2013) [15]	Construção e ensaio de trocador de placas polimérico; comparação experimental entre métodos de resfriamento (placas, imersão, gelo).	Não inclui chiller de contrafluxo na comparação; dados pontuais para uma única condição operacional.
Balaji et al. (2024) [14]	Análise numérica de trocador bitubular com nanofluidos via Método dos Elementos Finitos.	Aplica-se a nanofluidos, não ao mosto cervejeiro; não aborda regime transiente de resfriamento.

Apesar dos estudos existentes, ainda existem gaps em estudos científicos para o mundo cervejeiro.

1. **Ferramentas acessíveis para pequena escala:** Os trabalhos de Macedo [11] e Santana [12] focam em dimensionamento analítico ou simulação de micro- cervejarias, mas não oferecem um código aberto ou uma ferramenta numérica acessível para qualquer indivíduo.
2. **Simulação numérica específica para chiller de contrafluxo caseiro:** Embora Balaji et al. (2024) [14] tenha aplicado o Método dos Elementos Finitos a trocadores bitubulares, ele analisou fluidos diferentes, focando mais em nanofluidos.
3. **Falta de estudos paramétricos para Chiller de Contrafluxo:** Não foi encontrado um estudo paramétrico que relacione a vazão da água à temperatura final do mosto em chillers de contrafluxo de pequena escala.

Diante disso, este trabalho propõe desenvolver um código computacional em Python utilizando o método de elementos finitos para simular o campo de temperatura em um chiller de contrafluxo e avaliar o impacto da vazão de água na temperatura de saída do mosto.

A principal contribuição é a disponibilização de uma ferramenta numérica acessível, validada com problemas clássicos da literatura, que possa auxiliar o dimensionamento e a operação de trocadores de calor para produção de cerveja caseira.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

O presente capítulo estabelece os fundamentos físicos e matemáticos necessários para a análise termo-hidráulica de trocadores de calor tubulares, com ênfase na sua aplicação ao resfriamento de mosto cervejeiro.

3.1 Mecânica dos Fluidos

A Mecânica dos Fluidos é um ramo da física que estuda o comportamento de diferentes fluidos tanto em repouso quanto em movimento. Seu principal objetivo é compreender e descrever, por meio de leis físicas e modelos matemáticos, os fenômenos associados ao escoamento de fluidos e as forças que eles exercem sobre as superfícies em que estão em contato [20].

A Mecânica dos Fluidos pode ser dividida em duas áreas principais:

- **Estática dos fluidos:** estuda os fluidos em repouso, considerando as distribuições de pressão e as forças exercidas sobre superfícies submersas;
- **Dinâmica dos fluidos:** analisa os fluidos em movimento, considerando parâmetros como velocidade, pressão, viscosidade, regimes de escoamento e interações com fronteiras sólidas.

Neste trabalho, aborda-se o escoamento interno de fluidos, caracterizado pelo confinamento do fluido entre superfícies sólidas, como no interior de tubos ou dutos. A abordagem central consiste em verificar o tipo de escoamento e os efeitos da viscosidade para aplicá-los à transferência de energia entre os fluidos.

3.1.1 Tipos de Escoamento

O fluido pode apresentar dois tipos de escoamento: o escoamento laminar, onde o fluido se move através de camadas finas que preservam as características do meio, e o escoamento turbulento, no qual ocorrem flutuações aleatórias na velocidade da partícula ao longo do campo tridimensional de velocidades. Existe ainda uma região de transição, em que o fluido apresenta ora comportamento laminar, ora comportamento turbulento.

Para determinar o tipo de escoamento, é necessário conhecer o número de Reynolds, que, de forma resumida, define a razão entre forças inerciais e forças viscosas. O número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho v D_h}{\mu}$$

onde:

- ρ é a densidade do fluido,
- v é a velocidade do fluido,
- D_h é o diâmetro hidráulico característico,
- μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

Para o tubo circular, a classificação do tipo de escoamento segue os seguintes parâmetros:

- **Laminar:** $Re < 2300$
- **Transição:** $2300 < Re < 4000$
- **Turbulento:** $Re > 4000$

Para aplicações de engenharia, o valor crítico $Re \approx 2300$ é amplamente aceito como limite prático entre os regimes laminar e turbulento. Apesar disso, existem situações extremamente específicas e controladas em que o regime laminar pode ser alcançado com um número de Reynolds de até 100.000, conforme indicado por Fox [20].

3.1.2 Desenvolvimento do Escoamento

Considere um escoamento em um tubo circular com raio r . O fluido entra no tubo com velocidade uniforme, mas, ao entrar em contato com as superfícies, o fluido passa a sofrer os efeitos de sua viscosidade, formando uma camada-limite que se desenvolve conforme o aumento da distância percorrida pelo fluido. Esse desenvolvimento resulta na diminuição da região onde os efeitos viscosos ainda não atingiram todo o campo de velocidades, até que a camada limite se funda no eixo central do tubo.

Após essa fusão, os efeitos viscosos estendem-se por toda a seção transversal, e o perfil de velocidade torna-se constante ao longo da direção axial, indicando que o escoamento está plenamente desenvolvido. A distância da entrada do tubo até o ponto em que ocorre essa fusão é chamada de comprimento de entrada hidrodinâmica ($x_{cd,v}$). A imagem abaixo ilustra o desenvolvimento da camada-limite hidrodinâmica em um tubo circular. O mesmo raciocínio é válido para o escoamento anular entre tubos.

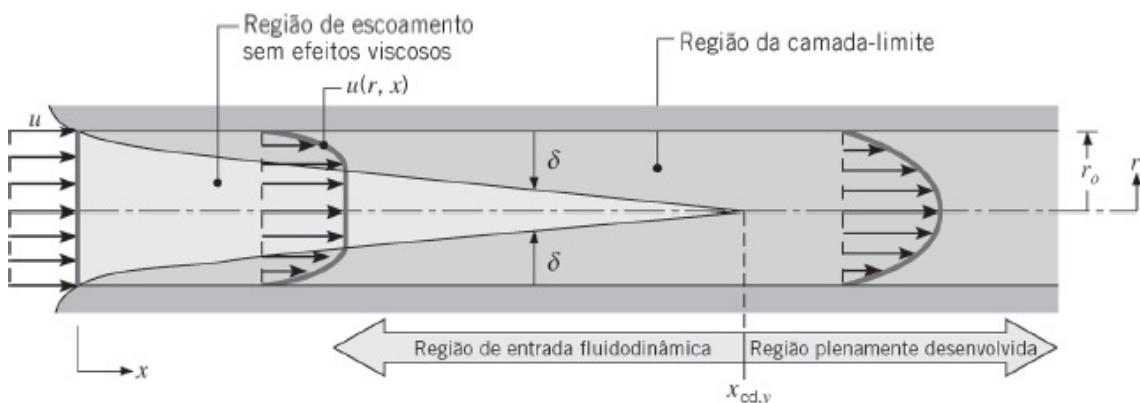


Figura 3.1: Desenvolvimento da camada limite hidrodinâmica em escoamento interno

Adaptado de [21]

3.1.3 Equação de Navier-Stokes

O movimento de fluidos newtonianos, incompressíveis e com propriedades constantes é governado pelas equações de Navier-Stokes. Em coordenadas cilíndricas (x, r, θ) , considerando simetria axial ($\partial/\partial\theta = 0$) e escoamento na direção x , a componente x da equação da quantidade de movimento é dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] + \rho g_x \quad (3.1)$$

onde u_x é a velocidade axial, u_r a velocidade radial, p a pressão, ρ a massa específica, μ a viscosidade dinâmica e g_x a componente da aceleração da gravidade na direção x .

3.1.4 Equação da Continuidade

Além da conservação da quantidade de movimento, o escoamento deve satisfazer o princípio da conservação da massa. Para um fluido incompressível ($\rho = \text{constante}$) em coordenadas cilíndricas com simetria axial ($\partial/\partial\theta = 0$), a equação da continuidade é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Essa equação estabelece uma relação entre as componentes axial (u_x) e radial (u_r) da velocidade. No caso de escoamento plenamente desenvolvido, em que o perfil de velocidade axial não varia com x ($\partial u_x/\partial x = 0$), a equação (3.2) reduz-se a:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0.$$

Integrando em relação a r e considerando a condição de simetria em $r = 0$ (onde u_r deve ser finito), obtém-se $u_r = 0$ em toda a seção transversal. Essa conclusão é fundamental para as simplificações adotadas na Seção 3.4.1, pois elimina os termos convectivos na equação de Navier-Stokes.

3.2 Discretização da Equação Governante

3.2.1 Balanço de Energia em um Volume de Controle

Considere um volume de controle infinitesimal $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ em um meio material com velocidade $u = (u_1, u_2, u_3)$, conforme mostrado na Figura 3.2. O balanço de energia é dado por:

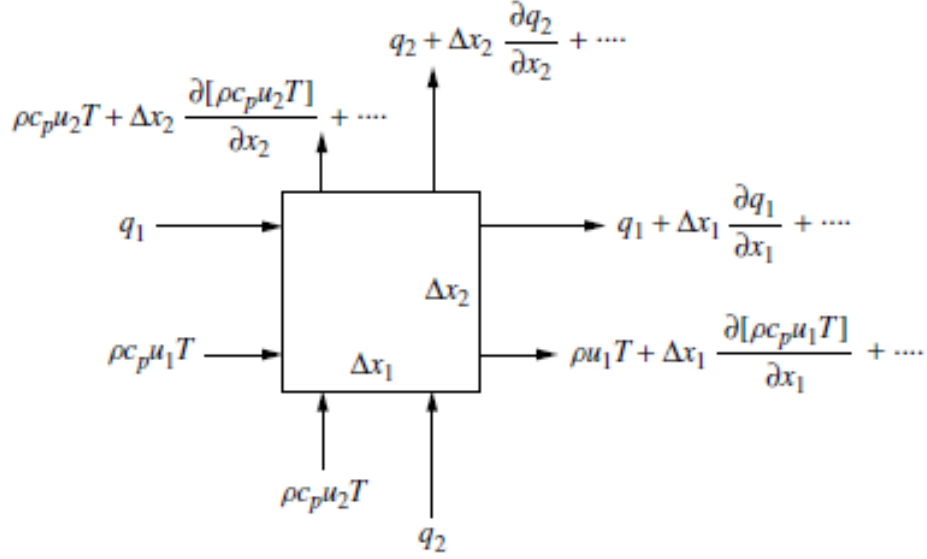


Figura 3.2: Volume de Controle Infinitesimal

$$\text{Taxa de acúmulo} = \text{Entrada por convecção} - \text{Saída por convecção} \quad (3.3)$$

$$+ \text{Entrada por condução} - \text{Saída por condução} + \text{Geração} \quad (3.4)$$

3.2.2 Termo Convectivo

O fluxo de energia por convecção na direção x_1 é:

$$q_{\text{conv},x_1} = \rho c_p u_1 T \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (3.5)$$

onde as propriedades do fluido são consideradas constantes.

Aplicando a expansão em série de Taylor para a saída:

$$q_{\text{conv},x_1+\Delta x_1} = \rho c_p u_1 T \Delta x_2 \Delta x_3 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho c_p u_1 T) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (3.6)$$

O balanço líquido na direção x_1 torna-se:

$$\Delta q_{\text{conv},x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho c_p u_1 T) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (3.7)$$

Generalizando para três dimensões:

$$\Delta q_{\text{conv}} = -\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho c_p u_1 T) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho c_p u_2 T) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho c_p u_3 T) \right] \Delta V \quad (3.8)$$

3.2.3 Termo Condutivo (Lei de Fourier)

O fluxo de calor por condução na direção x_1 é:

$$q_{\text{cond},x_1} = -k \frac{\partial T}{\partial x_1} \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (3.9)$$

Com a saída sendo:

$$q_{\text{cond},x_1+\Delta x_1} = -k \frac{\partial T}{\partial x_1} \Delta x_2 \Delta x_3 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (3.10)$$

O balanço líquido é:

$$\Delta q_{\text{cond},x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) \Delta V \quad (3.11)$$

Generalizando para três dimensões:

$$\Delta q_{\text{cond}} = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right] \Delta V \quad (3.12)$$

3.2.4 Taxa de Acúmulo e Geração

A taxa de acúmulo de energia térmica é:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Delta V \quad (3.13)$$

E a geração de calor:

$$\dot{q} \Delta V \quad (3.14)$$

3.2.5 Equação Final

Combinando todos os termos e dividindo-os por ΔV :

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho c_p u_1 T) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho c_p u_2 T) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\rho c_p u_3 T) \\ = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right] + \dot{q} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assumindo ρ e c_p constantes e usando a continuidade ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), obtemos a forma matricial final:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (3.16)$$

A partir desse ponto, considera-se um domínio bidimensional, assumindo simetria axial e gradientes desprezíveis na direção azimutal.

3.3 Condições de Contorno

Segundo [22], existem 3 tipos de condições de contorno para a solução da equação de calor.

3.3.1 Condição de Contorno de Dirichlet

Para uma região do contorno, a condição de Dirichlet prescreve o valor da função em cada ponto do contorno. A definição matemática pode ser descrita pela equação abaixo.

$$T(p) = T_0 \quad \text{para } p \in \Gamma_D \quad (3.17)$$

Essa condição é muito utilizada quando a temperatura nos contornos é considerada fixa ao longo da superfície.

3.3.2 Condição de Contorno de Neumann

Para uma determinada região do contorno, a condição de contorno de Neumann prescreve o valor do produto escalar entre o gradiente de temperatura e o vetor da área da superfície. A definição matemática é mostrada abaixo.

$$\frac{\partial T(p)}{\partial n} = C_0 \quad \text{para } p \in \Gamma_N \quad (3.18)$$

Essa condição é utilizada quando o fluxo de calor fornecido é conhecido, seguindo o princípio que o fluxo de calor percorre uma direção conhecida, conforme mostrado na equação abaixo. É importante ressaltar que o sinal do fluxo depende da orientação do vetor normal à superfície.

$$q_n(p) = -k \frac{\partial T(p)}{\partial n} = -k C_0 \quad \text{para } p \in \Gamma_N \quad (3.19)$$

3.3.3 Condição de Contorno de Robin

A condição de contorno de Robin prescreve o valor do produto escalar entre o gradiente de temperatura e o vetor normal da superfície e o valor em cada ponto do contorno. Essa condição pode ser interpretada como uma superposição da Condição de Contorno de Neumann e de Dirichlet.

$$a_0 \frac{\partial T(p)}{\partial n} + b_0 T(p) = C_0 \quad \text{para } p \in \Gamma_R \quad (3.20)$$

Essa condição de calor é utilizada em casos em que a superfície está trocando calor por meio da convecção, dada a definição numa determinada direção, conforme mostra a equação abaixo:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_\infty) \quad \Rightarrow \quad k \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_\infty \quad (3.21)$$

3.4 Escoamento Interno

Para o escoamento interno, algumas hipóteses simplificadoras são utilizadas [20], permitindo reduzir a equação geral (3.1) para uma forma com solução analítica. As hipóteses são:

- **Regime permanente:** as propriedades não variam com o tempo, logo $\partial u_x / \partial t = 0$.
- **Escoamento plenamente desenvolvido:** o perfil de velocidade não se altera ao longo do eixo x , o que implica $\partial u_x / \partial x = 0$ e, por consequência, $u_r = 0$ (da equação da continuidade).
- **Convecção forçada dominante:** os efeitos de empuxo associados à gravidade são desprezíveis, logo $g_x = 0$.
- **Escoamento axissimétrico:** as propriedades são uniformes na direção angular, eliminando derivadas em θ .

Aplicando essas hipóteses à equação (3.1), os termos inerciais (lado esquerdo) e a derivada axial viscosa ($\partial^2 u_x / \partial x^2$) se anulam, restando:

$$\frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_x}{dr} \right). \quad (3.22)$$

A equação (3.22) expressa o equilíbrio local entre o gradiente de pressão (força motriz) e as tensões viscosas (força resistiva). Ela é a forma diferencial que rege o escoamento laminar plenamente desenvolvido em tubos.

3.4.1 Perfil de Velocidade na Região de Escoamento Interno

Segundo Fox [20], uma condição de não deslizamento (no-slip) é imposta nas superfícies dos tubos em contato com o fluido. Adicionalmente, em sistemas axissimétricos com escoamento plenamente desenvolvido, a velocidade atinge o seu valor máximo no eixo central ($r = 0$) e é independente da posição axial (x). Dessa forma, a distribuição de velocidades em um tubo circular pode ser expressa exclusivamente em função do raio r .

As condições de contorno, de forma numérica, estão sendo mostradas na equação 3.23.

$$\begin{aligned} \left. \frac{du_x}{dr} \right|_{r=0} &= 0 \\ u_x|_{r=R} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Integrando duas vezes a equação (3.22) em relação a r e aplicando as condições de contorno, obtém-se o perfil de velocidade:

$$v(r) = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (3.24)$$

A partir disso, conclui-se que o perfil de velocidade é parabólico.

Vazão

Pelo princípio de conservação de massa, a vazão volumétrica Q através de uma área transversal A é dada por:

$$Q = \int_A v(r) dA \quad (3.25)$$

Substituindo o perfil de velocidade da Equação (3.24) e integrando, obtém-se:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (3.26)$$

Para escoamento plenamente desenvolvido, $\frac{\partial p}{\partial x}$ é constante e pode ser substituído por $\frac{\Delta p}{L}$, resultando na equação de Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu L}. \quad (3.27)$$

Velocidade Média

A velocidade média \bar{V} é definida como a razão entre a vazão e a área transversal:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (3.28)$$

Ponto de Velocidade Máxima

O ponto de velocidade máxima ocorre quando $\frac{dv}{dr} = 0$. Derivando a Equação (3.24):

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) r, \quad (3.29)$$

verifica-se que a velocidade máxima $U = v_{\max}$ ocorre em $r = 0$:

$$U = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) = 2\bar{V}. \quad (3.30)$$

Expressão final para a Velocidade no Escoamento Interno

Assim, o perfil de velocidade pode ser reescrito em termos de U :

$$\frac{v(r)}{U} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2. \quad (3.31)$$

3.4.2 Escoamento Anular

Perfil de Velocidade na Região Anular com Escoamento Plenamente desenvolvido

Considere um sistema composto por dois tubos concêntricos, conforme ilustrado na figura abaixo, onde um fluido escoar na região anular entre eles. Seja R_1 o raio interno do tubo externo e R_0 o raio externo do tubo interno.

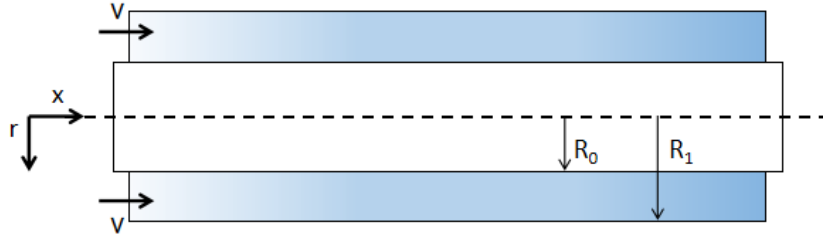


Figura 3.3: Representação esquemática da seção transversal de dois tubos concêntricos.

Fonte: Elaboração Própria

A equação de Navier-Stokes e as simplificações para o escoamento interno ainda permanecem válidas para esse caso. Contudo, as condições de contorno devem considerar o efeito de não deslizamento nas duas paredes dos tubos, ou seja, a velocidade do fluido é nula tanto em $r = R_0$ quanto em $r = R_1$.

Aplicando-se essas condições à equação da velocidade em um espaço confinado, obtém-se a solução para o perfil de velocidade:

$$\begin{aligned}
 v(r) &= -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \\
 v(R_0) &= 0 \\
 v(R_1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Resolvendo as constantes C_1 e C_2 e simplificando, obtém-se o perfil de velocidade para o escoamento anular plenamente desenvolvido:

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[R_0^2 - r^2 + \frac{R_1^2 - R_0^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) \right] \tag{3.33}$$

Vazão no Espaço Anular

A vazão volumétrica Q é determinada pela integração do perfil de velocidade $v(r)$ sobre a área da seção transversal anular:

$$Q = \int_A v(r) dA = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} v(r) r dr. \tag{3.34}$$

Substituindo a Equação 3.33 na expressão acima, obtém-se:

$$Q = - \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left[R_0^2 - r^2 + \frac{R_1^2 - R_0^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) \right] dr \quad (3.35)$$

A solução da integral resulta na expressão final para a vazão:

$$Q = - \frac{\pi}{8\mu} \frac{dp}{dx} \left[R_1^4 - R_0^4 - \frac{(R_1^2 - R_0^2)^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \right]. \quad (3.36)$$

Expressão final para a Velocidade no escoamento Anular

Tendo em mente a vazão e o perfil de velocidades no escoamento anular em função da pressão, podemos isolar a $\frac{\partial p}{\partial x}$ e encontrar a velocidade final apenas em função da vazão, raios interno e externo e viscosidade.

$$v(r) = \frac{2Q}{\pi \left[R_1^4 - R_0^4 - \frac{(R_1^2 - R_0^2)^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \right]} \left[r^2 - R_0^2 - \frac{R_1^2 - R_0^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_0}\right) \right] \quad (3.37)$$

3.5 Transferência de Calor

De acordo com Incropera [21], a transferência de calor é definida como a energia térmica em trânsito, resultante de um gradiente de temperatura no espaço. Sempre que há um gradiente de temperatura, seja dentro de um único corpo ou entre um corpo e um meio, ocorre transferência de calor, o que provoca, por sua vez, uma alteração na temperatura.

Existem três tipos principais de processos de transferência de calor: convecção, radiação e condução. É importante ressaltar que esses três modos de troca de calor podem ou não ocorrer de forma simultânea.

As subseções a seguir abordam detalhadamente cada um dos mecanismos de transferência de calor, bem como suas respectivas formulações matemáticas.

3.5.1 Condução

A condução térmica deve ser diretamente associada a processos moleculares e atômicos, uma vez que se trata de uma forma de transferência de calor entre partículas de diferentes energias térmicas. O fluxo de calor ocorre da partícula mais

energética (mais quente) para a partícula menos energética (mais fria), sendo resultante de colisões entre partículas ou do intercâmbio de energia entre átomos, moléculas e elétrons. Assim, o sentido do fluxo de calor é sempre direcionado da região de maior temperatura para a de menor temperatura.

A Equação 3.38, mais conhecida como Lei de Fourier, é uma lei empírica formulada pelo físico e matemático francês Joseph Fourier. A equação modela o fluxo de calor por condução, mostrando que o fluxo é proporcional à área de contato entre as superfícies e ao negativo do gradiente de temperatura, conforme ilustrado pela equação abaixo.

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (3.38)$$

Além disso, o fluxo de calor pode ocorrer em qualquer uma das três direções possíveis em um sistema de coordenadas cartesianas.

$$\dot{Q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial T}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (3.39)$$

A constante de proporcionalidade k , conhecida como condutividade térmica, apresenta variação em função do tipo de material e da temperatura.

3.5.2 Convecção

A convecção térmica é um mecanismo de transferência de calor que ocorre quando um fluido, seja ele estacionário ou em movimento, interage com um corpo sólido, apresentando um gradiente de temperatura entre ambos. Existem dois tipos principais de convecção: a convecção forçada, que se dá quando o fluido é induzido a escoar por uma força externa, como a ação de uma bomba, e a convecção natural, que ocorre quando variações na densidade do fluido geram uma força de empuxo, resultando em um escoamento natural.

A Equação 3.40, proposta por Isaac Newton, descreve a taxa de transferência de calor entre um elemento estacionário e o fluido em movimento. Segundo essa equação, a taxa de transferência de calor por convecção é proporcional à diferença de temperatura entre o fluido T_f e a temperatura da superfície T_s , à área de contato A entre o fluido e a superfície. Essa relação é frequentemente denominada Lei de Resfriamento de Newton.

$$\dot{Q} = hA(T_f - T_s) \quad (3.40)$$

É importante destacar que a constante de proporcionalidade h é frequentemente difícil de ser obtida. Para aplicações de engenharia, uma abordagem prática consiste em realizar aproximações baseadas em diversos fatores, como o tipo de convecção (forçada ou natural), o regime de escoamento do fluido, as características físicas do fluido e a geometria do corpo envolvido.

3.6 Introdução ao Método de Elementos Finitos

A modelagem de problemas de engenharia frequentemente resulta em equações diferenciais parciais sem solução analítica ou de difícil obtenção. Nesse contexto, as simplificações clássicas, que outrora permitiam aproximações razoáveis, mostram-se limitadas, uma vez que sua validade se restringe, na maioria das vezes, a casos particulares ou condições muito específicas.

Para resolver sistemas complexos que não possuem soluções analíticas, foram desenvolvidos diversos métodos numéricos para a resolução desses sistemas. O método dos elementos finitos (MEF) é um dos mais utilizados para a discretização espacial do sistema e é o foco dessa seção.

Segundo Perumal Nithiarasu[22], o método surgiu inicialmente para a resolução de problemas relativos a tensões em estruturas complexas de fuselagem de avião. O método considera que o domínio pode ser dividido em pequenas regiões interconectadas, que podem ser aproximadas por meio de funções polinomiais de grau conhecido. A partir disso, ocorre a redução de um domínio contínuo para um domínio discreto, que possui um número finito de pontos, chamados *nós*. Um conjunto de pontos formam um elemento, que é delimitado por uma região conhecida como contorno. A Figura 3.4 mostra o fluxograma com as principais etapas para a solução do MEF.

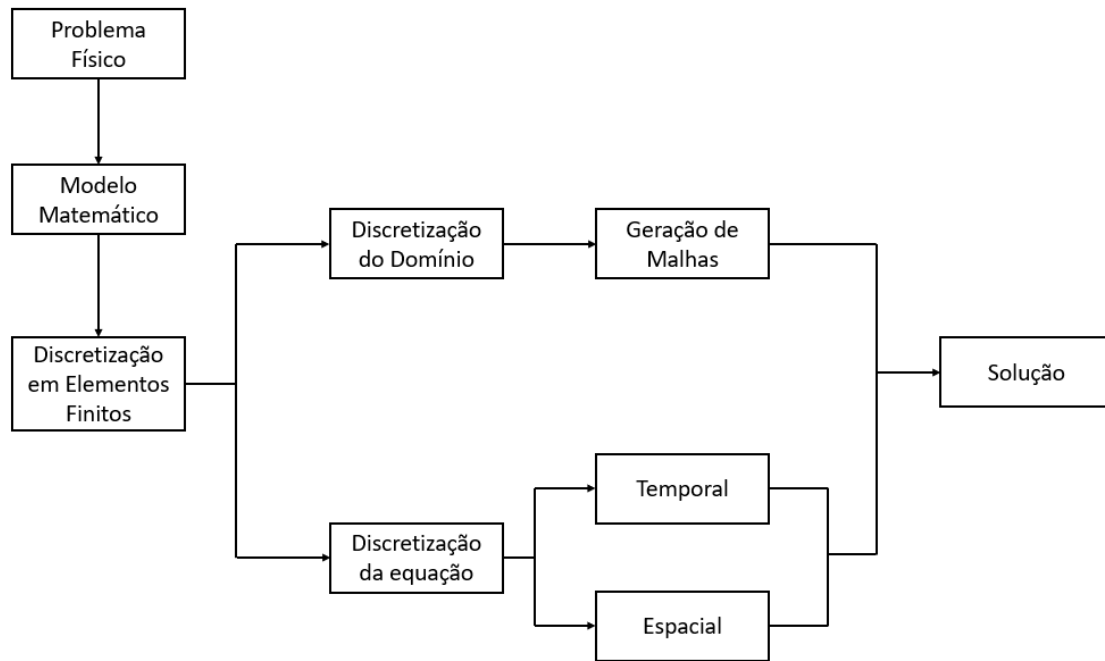


Figura 3.4: Fluxograma das principais etapas do Método dos Elementos Finitos (MEF)

Fonte: Elaboração Própria

Um passo a passo simplificado é descrito abaixo e será a base para a criação de um código que resolva problemas gerais utilizando o método dos elementos finitos para a variação espacial.

- Discretização do Domínio
- Seleção da Função de Forma
- Formulação da Equação dos Elementos
- Montagem da Equação dos Elementos
- Resolução do Sistema de Equações
- Análise dos Resultados

3.7 Introdução ao Método de Diferenças Finitas

O problema abordado neste trabalho envolve tanto regimes permanentes quanto transientes. Por essa razão, a derivada temporal na equação convecção-difusão não

pode ser anulada. Portanto, a próxima etapa para a solução numérica da equação do calor em fluidos consiste em discretizar o termo temporal, que indica a variação da temperatura ao longo do tempo, utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF).

$$\frac{dT_i}{dt} \approx T'_i(t) \quad (3.41)$$

O MDF é um método numérico que aproxima derivadas por meio de fórmulas obtidas a partir da Série de Taylor, gerando um erro relacionado à ordem do grau da derivada. Para a derivada temporal de interesse, temos:

$$\frac{dT_i}{dt} \approx \frac{T_i(t + \Delta t) - T_i(t)}{\Delta t} \quad (3.42)$$

onde Δt representa o passo de tempo da simulação, em segundos.

Capítulo 4

Metodologia

Neste capítulo, apresenta-se o método dos elementos finitos aplicado à equação de energia em escoamentos com simetria axial, com foco na aplicabilidade em um chiller de contrafluxo.

4.1 Hipóteses Simplificadoras

As seguintes hipóteses simplificadoras foram adotadas para a resolução do problema da transferência de calor no chiller:

- propriedades termofísicas constantes
- escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido
- ausência de geração volumétrica de energia
- ausência de dissipação viscosa
- resistência térmica da parede desprezível

Os motivos que levaram à adoção dessas simplificações são abordados ao longo do texto.

4.2 Método dos elementos finitos

4.2.1 Espaços funcionais

Antes de obter a formulação fraca da equação do calor para o fluido, é necessário definir os espaços funcionais nos quais a solução e as funções teste serão procuradas. Esses espaços garantem que todas as operações matemáticas envolvidas na formulação variacional estejam definidas.

No presente trabalho, essa formulação é aplicada à análise térmica de um chiller de contrafluxo, no qual dois fluidos (mosto e água) escoam em sentidos opostos, promovendo transferência de calor através da parede do tubo interno.

Como a resistência térmica da parede é desprezível, o domínio espacial é composto apenas por duas regiões: Ω_m , correspondente ao domínio do mosto e Ω_a , correspondente ao domínio da água. Considera-se simetria axial, reduzindo o problema a uma seção meridional no plano (x, r) , com r a coordenada radial e x a coordenada axial.

Define-se o domínio total como

$$\Omega = \Omega_m \cup \Omega_a$$

Inicialmente, define-se o espaço das funções quadrado-integráveis como

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\}. \quad (4.1)$$

O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(v, w) = \int_{\Omega} vw d\Omega, \quad (4.2)$$

o qual induz a norma

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Entretanto, para a formulação da equação do calor para o fluido, é necessário considerar funções cujas derivadas espaciais de primeira ordem também sejam quadrado-integráveis. Dessa forma, define-se o espaço de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (4.4)$$

Esse espaço é equipado com a norma

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (4.5)$$

Para o problema de transferência de calor em fluidos em movimento, o campo de temperatura $T(\mathbf{x}, t)$ é a variável de interesse. Assim, define-se o espaço funcional da solução como

$$V = H^1(\Omega) \quad (4.6)$$

e as funções teste pertencem ao mesmo espaço.

A equação do calor do fluido considerada é a Equação 3.16, mostrada abaixo.

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} \quad (4.7)$$

onde T representa a temperatura, u é o vetor velocidade do escoamento, k a condutividade térmica efetiva e \dot{q} representa um termo fonte volumétrico.

No caso de um chiller de contrafluxo, o termo convectivo está associado ao escoamento do fluido ao longo do tubo, enquanto o termo difusivo representa a condução térmica no interior do fluido. O termo fonte é considerado nulo neste trabalho, uma vez que se assume a ausência de geração volumétrica de calor. Além disso, a dissipação de energia devido aos efeitos viscosos é desprezada, por ser considerada insignificante nas condições de operação analisadas quando comparada aos mecanismos convectivo e difusivo de transferência de calor.

Observa-se também que, em um problema axisimétrico, não existe variação na direção angular. Essa hipótese é baseada na geometria cilíndrica do trocador de calor.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0. \quad (4.8)$$

Assim, o operador gradiente no plano (r, x) pode ser escrito como

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad (4.9)$$

O operador Laplaciano em coordenadas cilíndricas, considerando a hipótese de axisimetria é reduzido para

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.10)$$

Assumindo que o campo de velocidades possui apenas componentes radial e axial, $\mathbf{u} = (u_x, u_r)$, o termo convectivo fica

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_r \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (4.11)$$

Dessa forma, a equação do calor para fluidos em movimento em coordenadas cilíndricas axisimétricas pode ser escrita como

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (4.12)$$

Com os espaços funcionais e os operadores diferenciais devidamente definidos, torna-se possível proceder à obtenção da formulação fraca da equação de calor para um fluido em movimento.

4.2.2 Forma Fraca

Após a aplicação do cálculo variacional ocorre a transformação da equação de sua forma forte para sua forma fraca. A forma forte consiste na forma natural da equação, mantendo seu formato diferencial original. A forma fraca é obtida pela multiplicação da equação diferencial por uma função peso ω e integrando o resultado sobre o domínio.

Essa abordagem é muito utilizada em problemas de transferência de calor com convecção, como ocorre no chiller. Além disso, uma outra hipótese simplificadora adotada no estudo é que consideram-se dois domínios fluidos: mosto e água, ambos com propriedades constantes ao longo do tempo e da temperatura. Ademais, ambos os fluidos são considerados isotrópicos e homogêneos. Logo, as propriedades são constantes e não variam com a direção e nem dependem do referencial.

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) - k \nabla^2 T = 0 \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega} \omega \left(\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) - k \nabla^2 T \right) r d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

Podemos simplificar a equação acima através da separação da integral em uma soma de integrais:

$$\int_{\Omega} \omega \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r d\Omega + \int_{\Omega} \omega \rho c_p (\mathbf{u} \cdot \nabla T) r d\Omega - \int_{\Omega} \omega k \nabla^2 T r d\Omega = 0 \quad (4.15)$$

A partir da equação em sua forma fraca, a etapa subsequente é a redução da ordem do termo de derivada segunda através do uso do Teorema de Green. A redução de ordem da equação também é responsável por separar os termos da região de contorno.

Na formulação axisimétrica, o fator r é incorporado ao elemento de integração volumétrica, sendo tratado como parte do peso das integrais variacionais. Para campos vetoriais, o teorema de Green pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} k \omega \nabla^2 T r d\Omega = \int_{\Gamma} k \omega \nabla T \cdot \mathbf{n} r d\Gamma - \int_{\Omega} k \nabla \omega \cdot \nabla T r d\Omega \quad (4.16)$$

O fator axisimétrico r foi incorporado ao elemento de volume nas integrais variacionais

$$\int_{\Omega} \omega \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} r d\Omega + \int_{\Omega} \omega \rho c_p (\mathbf{u} \cdot \nabla T) r d\Omega - \int_{\Gamma} \omega k (\nabla T \cdot \mathbf{n}) r d\Gamma + \int_{\Omega} k \nabla \omega \cdot \nabla T r d\Omega = 0 \quad (4.17)$$

Em seguida, deve-se aproximar a função peso $\omega(x, r)$ e a temperatura T por séries de somas para todos os n nós da malha.

$$\omega \approx \sum_{i=1}^n N_i(x, r) \omega_i \quad (4.18)$$

$$T \approx \sum_{j=1}^n N_j(x, r) T_j \quad (4.19)$$

Vale destacar que T_j (coeficientes da expansão da temperatura) e ω_i (coeficientes das funções peso) são constantes no espaço, mas variam no tempo. Por outro lado, as funções de forma N_i e N_j dependem apenas das coordenadas espaciais, não do tempo.

Substituindo as aproximações $\omega \approx \sum_{i=1}^n N_i \omega_i$ e $T \approx \sum_{j=1}^n N_j T_j$ na Equação 4.17, e rearranjando os somatórios e integrais, obtém-se uma expressão que deve ser satisfeita para quaisquer valores dos coeficientes ω_i .

Como as funções teste são arbitrárias, a condição é satisfeita impondo-se que o coeficiente associado a cada ω_i seja nulo individualmente, resultando em um sistema de equações algébricas para as temperaturas nodais T_j .

Reorganizando os termos e escrevendo a contribuição de cada elemento finito e , chega-se à seguinte forma semi-discretizada no espaço:

$$\sum_e \left(\rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} \int_{\Omega_e} N_i N_j r d\Omega + \rho c_p T_j \int_{\Omega_e} N_i (\mathbf{u} \cdot \nabla N_j) r d\Omega - k T_j \int_{\Gamma_e} N_i (\nabla N_j \cdot \mathbf{n}) r d\Gamma + k T_j \int_{\Omega_e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j r d\Omega \right) = 0 \quad (4.20)$$

onde fica implícito o somatório nos índices repetidos i e j e a integração é realizada sobre cada elemento. A forma matricial é obtida diretamente a partir dessa expressão, como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} \sum_e \rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} \int_{\Omega_e} N_i N_j r d\Omega + \sum_e \rho c_p T_j \int_{\Omega_e} N_i (\mathbf{u} \cdot \nabla N_j) r d\Omega \\ - k \sum_e T_j \int_{\Gamma_e} N_i (\nabla N_j \cdot \mathbf{n}) r d\Gamma \\ + k \sum_e T_j \int_{\Omega_e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j r d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Adicionalmente, as integrais que multiplicam as funções de formas são preestabelecidas conforme mostrado nas equações abaixo: Integral sem derivadas

$$\int_{\Omega} N_i N_j \rho c_p r d\Omega \quad \longrightarrow \quad \text{Matriz de massa} \quad \mathbf{M} \quad (4.22)$$

Integral com derivada na direção axial

$$\int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \rho c_p r d\Omega \quad \longrightarrow \quad \text{Matriz global do gradiente axial} \quad \mathbf{G}_x \quad (4.23)$$

Integral com derivada na direção radial

$$\int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} \rho c_p r d\Omega \quad \longrightarrow \quad \text{Matriz global do gradiente radial} \quad \mathbf{G}_r \quad (4.24)$$

Integral com multiplicação escalar entre gradientes

$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j k r d\Omega \quad \longrightarrow \quad \text{Matriz de rigidez } \mathbf{K} \quad (4.25)$$

Na fronteira externa correspondente ao tubo externo, adota-se uma condição de Neumann homogênea, assumindo-se ausência de fluxo térmico entre o chiller e o ambiente externo. Essa hipótese é considerada válida devido à baixa condutividade térmica da parede externa do equipamento, a qual apresenta resistência térmica significativamente superior à do aço inoxidável. Dessa forma, as perdas de calor para o ambiente tornam-se desprezíveis quando comparadas à transferência de calor entre os fluidos no interior do trocador.

Além disso, é imposta uma condição de contorno de Dirichlet para a entrada de ambos os fluidos. No caso da água, a temperatura é prescrita na região anular no comprimento $x = L$, enquanto que a temperatura de entrada do mosto é prescrita na região $x = 0$.

As condições de contorno de Dirichlet são implementadas impondo diretamente os valores conhecidos de temperatura nos nós pertencentes às regiões de entrada dos fluidos. Do ponto de vista matricial, isso é realizado modificando o sistema linear global de forma que os graus de liberdade associados aos nós com temperatura prescrita assumam exatamente os valores desejados. Para isso, as linhas correspondentes da matriz global são substituídas por zeros, atribuindo-se valor unitário ao termo da diagonal principal, enquanto o vetor do lado direito é ajustado para conter a temperatura prescrita naquele nó.

Na região de saída de ambos os fluidos, que é a região de interesse, é considerada uma condição de Neumann homogênea, assim como foi considerado na parede do tubo externo.

Para o tratamento da condição de contorno de Neumann homogênea nas matrizes, as integrais de contorno associadas ao fluxo térmico se anulam, não contribuindo para o sistema global de equações.

Já para o termo temporal, emprega-se discretização por diferenças finitas. A combinação do MEF no espaço com diferenças finitas no tempo é muito utilizada devido a sua simplicidade, flexibilidade e eficiência computacional.

Em seguida, podemos substituir as integrais acima na Equação 4.21 e discretizar o tempo de acordo com o método de diferenças finitas para obtermos a equação

matricial do elemento.

$$m^e \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right) + c^e T^{n+1} + k^e T^{n+1} + k_{est}^e T^{n+1} = 0$$

Através do processo conhecido como "assembling", que consiste em agregar as matrizes do elemento na matriz global, respeitando a conexão dos elementos pelos seus nós com o intuito de formar o sistema global de equações de forma que seja possível tratar computacionalmente, podemos chegar na equação matricial global:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_{est} \right) T^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} T^n, \quad (4.26)$$

onde o termo de convecção (\mathbf{C}) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{C} = u_x \mathbf{G}_x + u_r \mathbf{G}_r \quad (4.27)$$

Embora a formulação permita componente radial de velocidade, em escoamentos plenamente desenvolvidos essa componente é nula, ou seja, $u_r = 0$.

Por fim, podemos adotar diferentes esquemas temporais para avaliar o termo convectivo. Na equação do calor, quando o termo multiplica T^{n+1} , ele é considerado como termo implícito. Caso ele multiplique o termo T^n , ele é considerado explícito. Em geral, o termo convectivo é tratado de forma implícita para permitir passos de tempo maiores; o tratamento explícito impõe restrições de estabilidade (CFL). É possível tratar o termo convectivo de forma implícita ou explícita, gerando os seguintes esquemas temporais:

$$\text{Convecção Implícita} \longrightarrow \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{K} + \mathbf{C} \right) T^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} T^n \quad (4.28)$$

$$\text{Convecção Explícita} \longrightarrow \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{K} \right) T^{n+1} = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \mathbf{C} \right) T^n \quad (4.29)$$

Neste trabalho, todos os termos são tratados de forma implícita. A escolha do esquema implícito melhora a estabilidade numérica e permite passos de tempo maiores. Entretanto, em regimes convectivos dominantes ainda podem ocorrer oscilações espúrias, sendo necessário o uso de um método de estabilização para corrigir esse problema.

4.2.3 Discretização do Domínio

A discretização do domínio consiste em dividir o modelo (objeto a ser estudado) em pequenas partes, formadas por nós e por elementos, conhecido no método dos elementos finitos como malha.

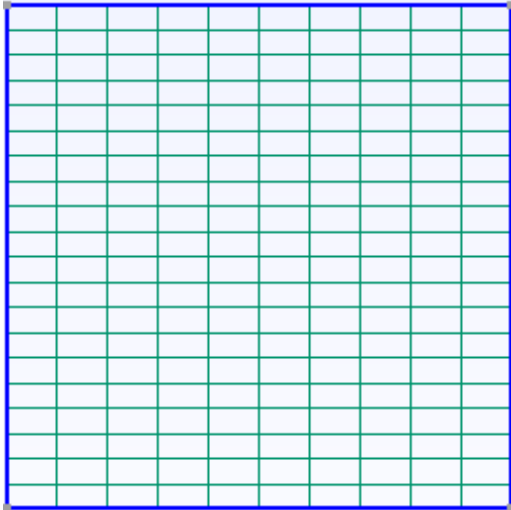
No caso real de um chiller de contrafluxo, o domínio consiste em dois tubos concêntricos com espessura de parede conhecida. Considerando que essa espessura é reduzida e que o material do tubo interno apresenta elevada condutividade térmica, pode-se desprezar a resistência térmica da parede, desde que sua resistência térmica seja desprezível frente às resistências convectivas dos fluidos.

Essa hipótese pode ser justificada através da parcela da resistência térmica global que a parede do tubo interno possui. Além disso, para o caso da parede do tubo externo, também é adotada a hipótese de fluxo de calor nulo.

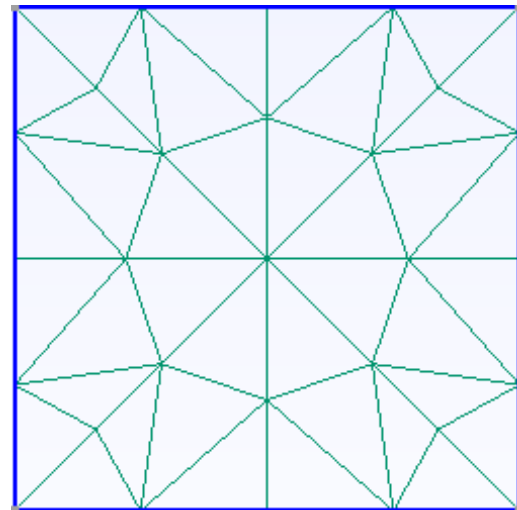
Por isso, não foi levado em consideração a espessura de ambas as paredes, restando apenas a região anular e também a região do tubo interno como partes do domínio, especificamente para o Chiller analisado.

O MEF se baseia na aproximação da solução da equação diferencial em cada elemento, que podem possuir diversas formas como triângulo ou quadriláteros em uma mesma malha. Uma malha estruturada caracteriza-se por possuir conectividade regular entre os elementos, enquanto malhas não estruturadas apresentam conectividade arbitrária, independentemente do tamanho dos elementos. Caso não possua distribuição uniforme, ela é considerada não-estruturada. Na figura abaixo, indicam-se duas malhas distintas, onde uma é considerada estruturada (a) e a outra é considerada não-estruturada (b).

A malha é gerada de forma contínua através da interface que separa o mosto (Ω_m) da água (Ω_a), ou seja, os nós e elementos são compartilhados entre os dois fluidos. Essa continuidade garante automaticamente a igualdade das temperaturas na interface ($T_m = T_a$). Do mesmo modo, como visto na formulação fraca (Equação 4.17), os termos de contorno sobre a interface se cancelam quando as contribuições dos dois domínios são somadas, desde que a condição de fluxo térmico contínuo seja respeitada. Assim, nenhuma condição especial precisa ser imposta numericamente na interface.



(a) Malha estruturada



(b) Malha não estruturada

Figura 4.1: Exemplo de Diferentes Malhas

Fonte: Elaboração Própria

A discretização da malha pode ser uma tarefa bastante complexa, especialmente em geometrias com contornos irregulares. Para facilitar esse processo, existem softwares gratuitos que geram malhas a partir de um modelo ou então a partir de programação. Neste trabalho, foi utilizado o software GMSH para a geração de todas as malhas dos casos de validação e também do chiller.

A escolha da malha pode ser feita livremente, conforme os objetivos da simulação e as características do domínio. No entanto, existem algumas recomendações para sua utilização. Deve-se evitar ao máximo a utilização de malha com formato de quadrilátero em domínios que possuam curvas, segundo Fish[23].

No caso do chiller, a malha selecionada foi uma malha triangular não estruturada com padrão regular, onde os vértices dos triângulos estão sobre uma determinada linha.

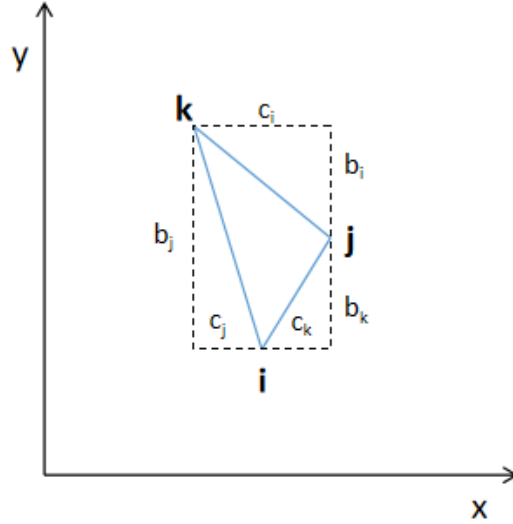


Figura 4.2: Exemplo de um Elemento Triangular

Fonte: Elaboração Própria

Cada elemento da malha triangular é definido por 3 nós i, j, k que possuem um sistema de coordenadas $(x_i, r_i), (x_j, r_j), (x_k, r_k)$. Um ponto importante é definir uma orientação consistente dos nós de cada elemento. Nesse caso, conforme indicado na Figura 4.2, está sendo definido o sentido anti-horário.

Além disso, na Figura 4.2, é possível observar também duas variáveis de forma essenciais para o método dos elementos finitos: b_i e c_i . Além delas, para cada elemento há também uma variável a_i . Essas variáveis são definidas como:

$$a_i = x_j r_k - x_k r_j, \quad b_i = r_j - r_k, \quad c_i = x_k - x_j, \quad (4.30)$$

$$a_j = x_k r_i - x_i r_k, \quad b_j = r_k - r_i, \quad c_j = x_i - x_k, \quad (4.31)$$

$$a_k = x_i r_j - x_j r_i, \quad b_k = r_i - r_j, \quad c_k = x_j - x_i, \quad (4.32)$$

Um outro fator importante para os cálculos oriundos do MEF é determinar a área de cada elemento. Para o caso da malha triangular, é possível obter essa área algebricamente através da Equação 4.33:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & r_i \\ 1 & x_j & r_j \\ 1 & x_k & r_k \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Conforme descrito por Perumal Nithiarasu[22], depois de escolhido o formato para o elemento da malha, é possível definir um vetor de funções de forma N , como indicado nas equações abaixo:

$$N(x, r) = [N_i N_j N_k] \quad (4.34)$$

onde cada elemento é definido de acordo com as equações abaixo:

$$N_i(x, r) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i r) \quad (4.35)$$

$$N_j(x, r) = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j r) \quad (4.36)$$

$$N_k(x, r) = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k r) \quad (4.37)$$

A seguir, apresentam-se as formulações necessárias para a construção das matrizes globais M , G e K do método dos elementos finitos. Conforme descrito por Perumal Nithiarasu[22], para cada elemento da malha, o gradiente das funções de forma, ∇N , é obtido através da relação:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

em que B é a matriz de derivadas das funções de forma.

Além disso, definem-se algumas matrizes elementares fundamentais: a matriz de massa m^e e as matrizes do gradiente g_x^e e g_r^e . Essas matrizes são calculadas com base nos coeficientes a_i , b_i , c_i , demonstrados na Figura 4.2 e na área A do elemento triangular, conforme as expressões a seguir:

$$\mathbf{m}^e = \rho c_p r_e \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{Matriz de massa})$$

$$\mathbf{g}_x^e = \rho c_p r_e \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_r^e = \rho c_p r_e \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (\text{Matrizes do Gradiente})$$

(4.39)

(4.40)

Por fim, a matriz \mathbf{c}^e é a matriz elementar de convecção, que pode ser reescrita como $\mathbf{c}^e = u_x \mathbf{g}_x^e + u_r \mathbf{g}_r^e$

Existe também a matriz do laplaciano k^e , que possui uma formulação mais complexa, dependendo das propriedades físicas do fluido em estudo. De forma geral, sua expressão é dada por:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega} B^{\top} D B r d\Omega, \quad (4.41)$$

a qual, para o caso de elementos triangulares lineares com propriedades constantes, pode ser simplificada para:

$$\mathbf{k}^e \approx r_e A B^{\top} D B = k_x \mathbf{k}_x^e + k_r \mathbf{k}_r^e \quad (4.42)$$

em que D representa a matriz de coeficientes do operador diferencial, A é a área do elemento, k_x e k_r são condutividade térmica do fluido ao longo dos eixos x e r , e k_x^e e k_r^e correspondem às contribuições elementares nas direções x e r , respectivamente e r_e corresponde ao raio médio do elemento A matriz D é definida como:

$$D = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_r \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

a matriz B é definida como:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

e as matriz elementares \mathbf{k}_x^e e \mathbf{k}_r^e finais são:

$$\mathbf{k}_x^e = r_e \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_r^e = r_e \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Como os fluidos são considerados isotrópicos, assume-se igualdade das propriedades térmicas em todas as direções, chegando em $k_x = k_r = k$ e resultando na equação final para a matriz Laplaciana elementar:

$$k^e = k (k_x^e + k_r^e) \quad (4.46)$$

4.2.4 Taylor-Galerkin

A formulação de Galerkin possui algumas limitações quando existe o termo convectivo. De acordo com Perumal Nithiarasu [22], o termo convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ pode gerar oscilações no método para regimes convectivos dominantes (números de Péclet maiores que 1). Como um chiller de contrafluxo possui o transporte de energia no fluido dominado pela convecção, o termo convectivo é dominante, o que pode gerar oscilações espúrias. Por isso, o método de Galerkin deve ser corrigido através da escolha de um método de estabilização. Algumas das possíveis técnicas são:

1. Método de Taylor-Galerkin (do inglês, "characteristic Galerkin")
2. Método SUPG (do inglês, "streamline upwind Petrov-Galerkin")
3. Método semi-lagrangiano
4. Método de Captura de Choque (do inglês, "shock-capturing")
5. Método CBS (do inglês, "characteristic-based split")

Para a elaboração deste trabalho, foi escolhido o método de Taylor-Galerkin, descrito por Donea [24]. O método introduz termos dissipativos através de expansões em série de Taylor da equação do calor ao longo das linhas características do escoamento. Para uma discretização de primeira ordem, é feita uma aproximação através de uma reta, representada na Figura 4.3.

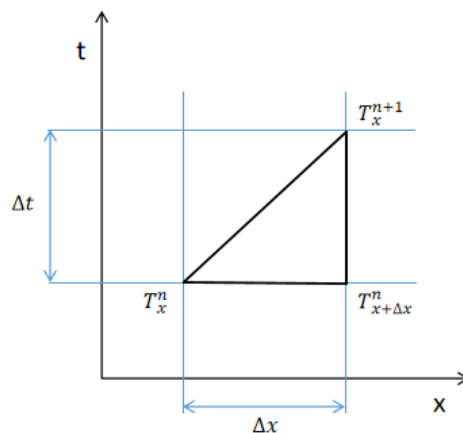


Figura 4.3: Esboço do método de Taylor-Galerkin

Fonte: Elaboração Própria

De acordo com Donea[24], o método faz expansões em séries de Taylor para os termos da equação do calor, da forma:

$$T_{x-\Delta x}^n = T_x^n - \frac{\partial T_x^n}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 T_x^n}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} - s \quad (4.47)$$

onde s indica os termos de ordem superior, que podem ser desconsiderados dependendo da precisão desejada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_x}{\partial x} \right)_{x-\Delta x}^n &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_x}{\partial x} \right)_x^n \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_x}{\partial x} \right)_x^n \right] \frac{\Delta x}{1!} \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T_x}{\partial x} \right)_x^n \right] \frac{\Delta x^2}{2!} - s \end{aligned} \quad (4.48)$$

Com o método de Taylor-Galerkin e sua discretização, dois termos de estabilização são adicionados à equação do calor resultante, sendo um para a direção x e outro para a direção r . Esses termos são conhecidos como operadores de suavização.

$$\rho c_p \left(\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right) = -\rho c_p (\mathbf{u} \cdot \nabla T^n) + k \nabla^2 T^n \quad (4.49)$$

$$+ \rho c_p u_x \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \right)^n \quad (4.50)$$

$$+ \rho c_p u_r \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \right)^n \quad (4.51)$$

Neste trabalho, os termos espaciais foram tratados em um esquema temporal implícito, enquanto a estabilização de Taylor-Galerkin foi incorporado implicitamente ao sistema linear global, contribuindo para o aumento da estabilidade numérica da solução.

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + C + K + K_{est} \right) T^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} T^n \quad (4.52)$$

onde a matriz de estabilização é construída a partir de uma nova matriz elemental k_{est}^e através do mesmo processo de assembling de matrizes. Para um elemento triangular, a matriz K_{est} é calculada da seguinte forma, considerando que $u_r = 0$:

$$\mathbf{k}_{est}^e = \rho c_p \bar{u}_x \frac{\Delta t}{2} [\bar{u}_x \mathbf{k}_x^e] \quad (4.53)$$

onde k_x^e é definida através da equação 4.43, \bar{u}_x é definido como a média da velocidade nos nós do elemento.

As propriedades termofísicas são consideradas constantes em cada subdomínio fluido, porém podem assumir valores distintos entre o domínio do mosto e o domínio da água. Dessa forma, durante a montagem das matrizes elementares, cada elemento utiliza o conjunto de propriedades correspondente à região do domínio à qual pertence.

O algoritmo usado para a resolução de um problema utilizando o método dos elementos finitos está resumido na lista a seguir:

1. Gerar a malha computacional, definindo os vetores de coordenadas nodais e o vetor de conectividade dos elementos (IEN) do Chiller
2. Inicializar os campos de velocidade u e temperatura T , bem como impor as condições de contorno da parede do tubo e da entrada dos fluidos
3. Montar as matrizes globais M , K , C do sistema, incluindo a matriz de estabilização K_{est} , que representam as contribuições difusiva, convectiva e estabilizante do problema
4. Realizar a integração temporal do problema, resolvendo o sistema linear resultante a cada passo de tempo Δt para obter a temperatura nodal.
5. Realizar o pós-processamento dos resultados, incluindo o cálculo da temperatura de saída de ambos os fluidos no chiller.

Capítulo 5

Verificações

Este capítulo apresenta os resultados das simulações térmicas resolvidas por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), aplicadas a problemas clássicos da literatura com o objetivo de verificar o modelo computacional proposto. São analisados três casos específicos: o escoamento de Hagen–Poiseuille (Seção 5.1), o trocador de calor bitubular (Seção 5.2), onde foi analisado o caso em que o fluido está paralelo e o caso onde ocorre contrafluxo.

Em todos os casos propostos, o escoamento é resolvido analiticamente e imposto como uma das condições de contorno do problema, conforme a solução analítica para os perfis de velocidade desenvolvida nas Seções 3.4.1 e 3.4.2.

Adicionalmente, é discutida a influência do refinamento de malha nos resultados das simulações no escoamento de Hagen-Poiseuille. De acordo com [25], uma das formas de avaliar a adequação de uma malha numérica consiste em realizar simulações com diferentes níveis de refinamento, comparando os resultados obtidos até que a variação relativa entre eles se torne inferior a uma tolerância pré-estabelecida. Esse procedimento garante a independência de malha e a confiabilidade dos resultados.

As simulações foram conduzidas até o regime estacionário, considerado atingido quando a variação máxima da temperatura entre duas iterações consecutivas for inferior a $0.001^{\circ}C$.

Em relação ao passo de tempo, é importante destacar que o método implícito utilizado para a discretização das matrizes é incondicionalmente estável para qualquer passo de tempo.

Dessa forma, diferentemente dos métodos explícitos, nos quais a estabilidade é

condicionada pelo número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), o método implícito não impõe restrições de estabilidade ao passo de tempo.

Além disso, a estabilidade incondicional proporcionada pelo esquema implícito não elimina os problemas associados à discretização espacial em regimes convectivos dominantes. O número de Péclet elementar indica a razão entre os efeitos convectivos e difusivos e está diretamente associado à possibilidade de surgimento de oscilações espaciais não físicas.

Por esse motivo, é necessária a utilização de uma malha adequadamente refinada e também técnicas numéricas apropriadas para o tratamento da convecção. Neste estudo, foi empregada a estabilização de Taylor–Galerkin na equação de energia para melhorar a estabilidade e a acurácia adequada para altos números de CFL.

Todas as simulações apresentadas neste capítulo foram executadas em um computador com as especificações descritas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Configuração do hardware utilizado nas simulações

Hardware	Descrição
Processador	AMD Ryzen™ 5 5600GT CPU @ 3.6GHz
Memória RAM	16 GB
Sistema Operacional	Windows 11 Pro
Armazenamento	1TB HDD & 512GB SSD

5.1 Escoamento de Hagen–Poiseuille

O problema consiste no escoamento de água a temperatura de $27^{\circ}C$ no interior de um tubo com parede aquecida mantida a $67^{\circ}C$. A água esco a uma vazão mássica de 0.05 kg/s , de forma a garantir regime laminar. Um exemplo prático desse tipo de situação ocorre quando água esco no interior de um tubo imerso em um banho térmico controlado.

Fisicamente, é difícil garantir que toda a parede do tubo permaneça exatamente a uma temperatura constante ao longo de todo o comprimento.

Entretanto, essa hipótese é amplamente utilizada na literatura para verificação de modelos numéricos, pois permite comparação com correlações clássicas conhecidas

para escoamentos internos com transferência de calor além de poder ser reproduzido em uma bancada experimental.

5.1.1 Configuração do Problema

O escoamento de Hagen-Poiseuille em regime laminar foi selecionado para verificação do código devido à existência de soluções analíticas e correlações empíricas bem estabelecidas na literatura. A geometria consiste em um tubo axissimétrico submetido a aquecimento uniforme na parede, com os seguintes parâmetros:

- Raio do tubo: $R = 0.025$ m
- Diâmetro: $D = 0.05$ m
- Comprimento: $L = 25,0$ m
- Vazão mássica: $\dot{m} = 0.05$ kg/s
- Temperatura de entrada: $T_{\text{entrada}} = 27,0$ °C
- Temperatura da parede: $T_{\text{parede}} = 67,0$ °C

A Figura 5.1 apresenta o esquema das condições de contorno aplicadas ao problema.

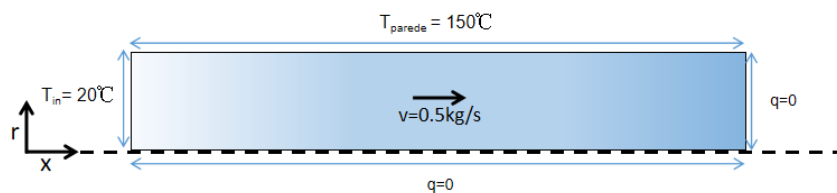


Figura 5.1: Condições de contorno para o caso do escoamento de Hagen–Poiseuille

As propriedades termofísicas da água foram avaliadas na temperatura média de filme,

$$T_f = \frac{T_{\text{entrada}} + T_{\text{parede}}}{2} = \frac{27 + 67}{2} = 47^\circ\text{C} \approx 320\text{ K},$$

conforme dados apresentados por Incropera [21]. As propriedades utilizadas são:

- Densidade: $\rho = 989,1$ kg/m³

- Calor específico: $c_p = 4180 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$
- Condutividade térmica: $k = 0.640 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
- Difusividade térmica: $\alpha = 8,466 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$
- Viscosidade dinâmica: $\mu = 5,77 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- Número de Prandtl: $Pr = 3,77$

Foi escolhido um caso com solução analítica descrita em Incropera [21], permitindo a comparação entre os resultados obtidos numericamente e os valores previstos pelas correlações clássicas para escoamentos internos laminares.

A vazão mássica é conhecida e possui valor de $0.05 \text{ kg}/\text{s}$. Para manter o paralelo com o programa proposto, foi realizado o cálculo analítico da velocidade média do fluido a partir da vazão mássica.

A vazão volumétrica é dada por:

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{0.05}{989,1} = 5,055 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}.$$

A área da seção transversal do tubo é:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(0.05)^2}{4} = 1,9635 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Logo, a velocidade média do escoamento é:

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{5,055 \times 10^{-5}}{1,9635 \times 10^{-3}} \approx 0.0257 \text{ m}/\text{s}.$$

A partir da velocidade média calculada, pode-se determinar o perfil analítico de velocidades em cada nó, conforme apresentado nas Seções 3.4.1 e 3.4.2, e resolver numericamente a equação da energia utilizando o Método dos Elementos Finitos. Em seguida, o resultado numérico obtido é comparado com o valor analítico.

5.1.2 Análise de Convergência Numérica

Para avaliar a convergência numérica da solução, foram utilizadas cinco malhas com diferentes níveis de refinamento. Em todos os casos, foi utilizado um intervalo de tempo de 0.5 s . A Tabela 5.2 apresenta a quantidade de elementos e nós, além dos principais parâmetros térmicos e numéricos utilizados nas simulações.

Tabela 5.2: Análise de convergência para as diferentes malhas

Caso	1	2	3	4	5
Elementos	420000	800000	1304942	2969912	4050000
Nós	225015	420021	675000	1518750	2070046
h_{\min} [m]	0.001667	0.001250	0.000862	0.000568	0.000556
Pe médio	275.528	199.531	158.790	105.427	88.725
Courant	15.385827	20.514436	29.745932	45.131758	46.157480
T_{sada} [°C]	53.07345	53.05259	53.04227	53.03703	53.036884

Mesmo para intervalos de tempo relativamente grandes, malhas mais grosseiras ou elevados números de Peclet e Courant, os artifícios numéricos empregados permitiram a obtenção de soluções estáveis.

Após o refinamento da malha, observou-se estabilização da solução térmica, com convergência da temperatura de saída para aproximadamente 53.036°C .

Observa-se também que, à medida que a malha é refinada, a temperatura média de saída aproxima-se de um valor assintótico. Embora refinamentos adicionais possam continuar reduzindo o erro numérico, o custo computacional cresce significativamente, tornando refinamentos excessivos inviáveis do ponto de vista prático para os hardwares e softwares utilizados neste trabalho.

Adotando-se como critério de convergência uma diferença inferior a 0.001°C entre malhas consecutivas, pode-se considerar que a independência de malha foi atingida no caso 5. Nesse caso, a diferença de temperatura entre as soluções consecutivas já é inferior ao critério adotado.

Com base nesse critério, verifica-se que a temperatura média de saída convergiu para aproximadamente:

$$T_{\text{saída}} \approx 53,037^{\circ}\text{C}.$$

A Figura 5.2 apresenta a evolução da temperatura de saída para os diferentes níveis de refinamento de malha.

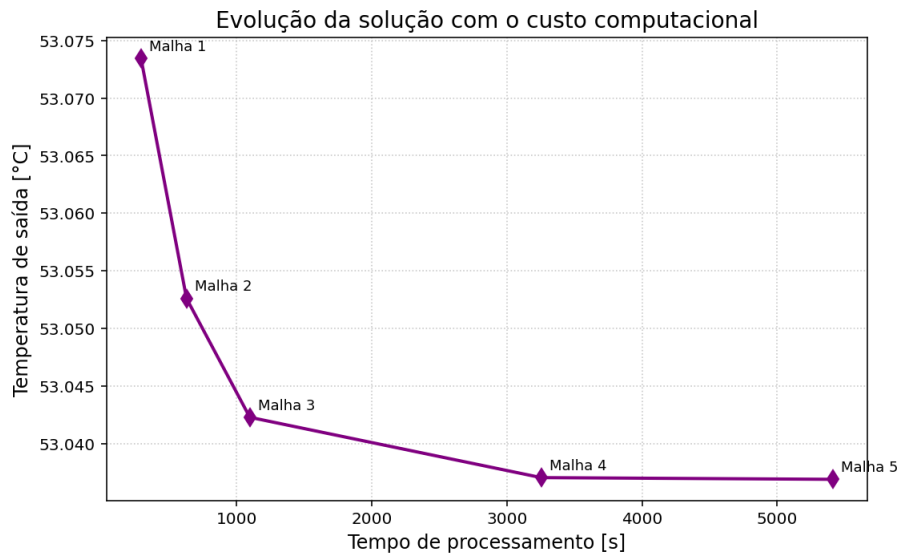


Figura 5.2: Evolução temporal da temperatura de saída do fluido para diferentes níveis de refinamento de malha

A Tabela 5.3 apresenta o custo computacional associado a cada malha, incluindo o tempo de processamento, o número de iterações necessárias para convergência e a temperatura final obtida.

Tabela 5.3: Custo computacional em função do refinamento de malha

Caso	1	2	3	4	5
Tempo de processamento [min]	4.90	10.52	18.32	54.24	90.21
Número de iterações	1719	1719	1719	1719	1719
Temperatura [°C]	53.073	53.053	53.042	53.037	53.037

O número de iterações necessário para atingir o critério de convergência foi semelhante em todos os casos. Entretanto, o aumento do refinamento da malha resultou em crescimento significativo do tempo de processamento.

Observa-se que a diferença entre os resultados obtidos para as malhas mais refinadas é inferior a $0.001^{\circ}C$, enquanto o custo computacional aumenta consideravelmente. Assim, refinamentos adicionais tenderiam a aumentar significativamente o custo computacional sem proporcionar melhorias relevantes na precisão da solução.

5.1.3 Solução Semi-Analítica de Hagen-Poiseuille

Nesta subsecção, o problema de transferência de calor em um escoamento laminar no interior de um tubo circular com temperatura de parede constante é resolvido a partir da correlação de Hausen..

Verificação dos comprimentos de entrada

O número de Reynolds é calculado por:

$$Re_D = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu} = \frac{989.1 \times 0.02576 \times 0.05}{5.77 \times 10^{-4}} \approx 2208.$$

Como $Re_D < 2300$, o escoamento pode ser considerado laminar.

O comprimento de entrada hidrodinâmica é estimado por:

$$L_{h,lam} \approx 0.05 Re_D D = 0.05 \times 2208 \times 0.05 \approx 5.52 \text{ m.}$$

Como:

$$L_{h,lam} < L = 25 \text{ m,}$$

o perfil de velocidade encontra-se plenamente desenvolvido na maior parte do domínio. Por isso, a hipótese de regime plenamente desenvolvido desde o início do tubo é uma aproximação aceitável.

O comprimento de entrada térmica é dado por:

$$L_{t,lam} \approx 0.05 Re_D Pr D = 0.05 \times 2208 \times 3.77 \times 0.05 \approx 20.8 \text{ m.}$$

Esse valor é ligeiramente inferior ao comprimento total do tubo, indicando que o perfil térmico só fica desenvolvido próximo da saída. Portanto, a maior parte do escoamento ainda se encontra em desenvolvimento térmico, justificando a utilização da correlação de Hausen.

Número de Graetz

O número de Graetz é dado por:

$$Gz_D = Re_D Pr \frac{D}{L} = 2208 \times 3.77 \times \frac{0.05}{25} \approx 16.65.$$

Número de Nusselt médio

Para escoamento laminar com temperatura de parede constante, utiliza-se a correlação de Hausen [26, 21]:

$$\overline{Nu}_D = 3.66 + \frac{0.0668 Gz_D}{1 + 0.04 Gz_D^{2/3}}.$$

Calculando:

$$Gz_D^{2/3} = (16.65)^{2/3} \approx 6.52.$$

Assim:

$$\overline{Nu}_D = 3.66 + \frac{0.0668 \times 16.65}{1 + 0.04 \times 6.52} = 4.542.$$

O coeficiente convectivo médio é:

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu}_D k}{D} = \frac{4.542 \times 0.640}{0.05} \approx 58.14 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}).$$

Temperatura de saída estimada

A temperatura de saída para parede com temperatura constante é estimada por:

$$\frac{T_{\text{saída}} - T_{\text{parede}}}{T_{\text{entrada}} - T_{\text{parede}}} = \exp\left(-\frac{P \bar{h} L}{\dot{m} c_p}\right),$$

onde:

$$P = \pi D = \pi \times 0.05 = 0.15708 \text{ m}.$$

Calculando o expoente:

$$\frac{P \bar{h} L}{\dot{m} c_p} = \frac{0.15708 \times 58.14 \times 25}{0.05 \times 4180} \approx 1.092.$$

Logo:

$$T_{\text{saída}} = 67 + (27 - 67)e^{-1.092} \approx 53.57^\circ\text{C}.$$

Esse valor semi-analítico será utilizado como referência para verificação dos resultados numéricos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos.

Observa-se que o número de Reynolds obtido ($Re_D = 2208$) encontra-se próximo do limite de transição entre regime laminar e turbulento. Dessa forma, pequenas discrepâncias entre o resultado numérico e o valor semi-analítico são esperadas.

5.1.4 Comparação com o Caso Estimado

Comparando-se o resultado numérico convergente,

$$T_{\text{saída,num}} = 53.037^{\circ}C,$$

com o valor semi-analítico obtido,

$$T_{\text{saída,calc}} = 53.57^{\circ}C,$$

obtém-se um erro absoluto de:

$$|53.57 - 53.037| = 0.533^{\circ}C.$$

O erro relativo é:

$$\frac{0.533}{53.57} \times 100 \approx 0.99\%.$$

Esse resultado pode ser considerado bastante satisfatório, principalmente devido às incertezas inerentes às correlações empíricas utilizadas.

Conforme indicado por Kays e Crawford [26], erros inferiores a 5% são considerados aceitáveis para correlações em regime de entrada térmica, especialmente para baixos números de Graetz, onde os efeitos de desenvolvimento térmico dominam o comportamento da transferência de calor.

5.2 Trocador de Calor Bitubular em Regime Laminar

5.2.1 Configuração do Problema

O problema analisado consiste em um trocador de calor bitubular axissimétrico, cujo comportamento térmico em regime permanente é obtido numericamente a partir da solução transiente até a estabilização do campo de temperaturas.

Foi escolhido um caso com solução analítica descrito em Incropera [21]. Os valores das propriedades do produto farmacêutico foram fornecidos no livro enquanto os valores da água foram retirados do livro, especificamente da Tabela A.6.

- Diâmetro do Tubo Interno: $d_i = 0.01$ m

- Diâmetro do Tubo Externo: $d_o = 0.02 \text{ m}$
- Comprimento do trocador: $L = 2.0 \text{ m}$
- Temperatura de entrada do produto farmacêutico: $T_{h,in} = 20^\circ\text{C}$
- Temperatura de entrada da água: $T_{c,in} = 60^\circ\text{C}$

A velocidade média dos fluidos são conhecidas e dadas por:

- Velocidade Média do Fluido Farmacêutico: $u_f = 0.10 \text{ m/s}$
- Velocidade Média da água: $u_a = 0.07 \text{ m/s}$

A escolha dessa velocidade média para a água é necessária para que o fluido escoe em regime laminar plenamente desenvolvido, que é o tipo de regime escolhido e que garante consistência com o escoamento de Hagen-Poiseuille.

As propriedades termofísicas da água foram avaliadas à temperatura de 50°C , enquanto as propriedades do produto farmacêutico foram fornecidas pelo exercício. Ambas as propriedades são consideradas constantes ao longo do comprimento. Os valores utilizados são apresentados a seguir:

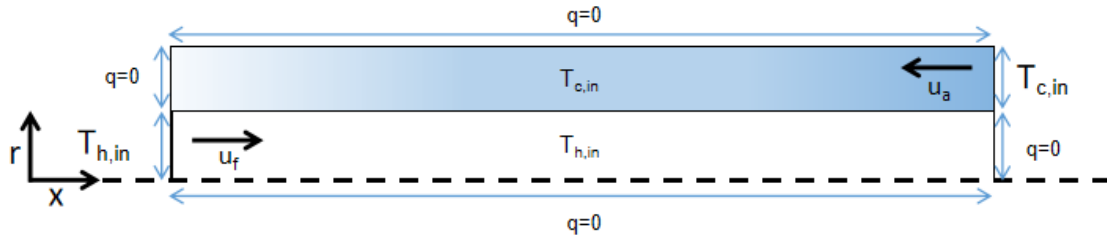
Água a (50°C):

- Densidade: $\rho_a = 987.9 \text{ kg/m}^3$
- Calor específico: $c_{p,a} = 4181 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
- Condutividade térmica: $k_a = 0.643 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
- Viscosidade cinemática: $\nu_a = 5.54 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

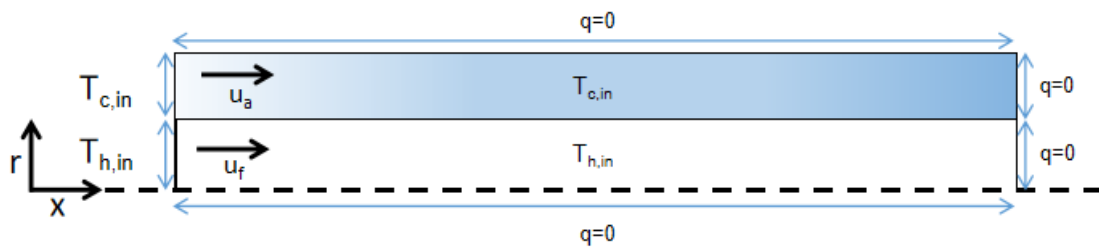
Produto farmacêutico:

- Densidade: $\rho_f = 2460 \text{ kg/m}^3$
- Calor específico: $c_{p,f} = 1100 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
- Condutividade térmica: $k_f = 0.25 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
- Viscosidade cinemática: $\nu_f = 10 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

A Figura 5.3 apresenta as condições de contorno utilizadas para o caso do trocador de calor de contrafluxo e também para o trocador de calor de corrente paralela, respectivamente.



(a) Condição de Contorno para o Caso de Contrafluxo



(b) Condição de Contorno para o Caso de Fluxo Paralelo

Figura 5.3: Condições de Contorno do Tubo Bitubular

5.2.2 Solução Analítica

A solução analítica é obtida a partir do método Efetividade-NTU, conforme apresentado pelo Incropera [21]. O cálculo dos coeficientes convectivos é uma etapa fundamental para a determinação da taxa de transferência de calor para, enfim, ser possível utilizar o método de Efetividade-NTU. A primeira etapa consiste em determinar as condições em que o tubo está operando. Para esse estudo, utiliza-se a condição de que o tubo interno submetido a temperatura constante, enquanto o tubo externo está isolado termicamente do ambiente no raio externo e temperatura variável na parede interna

Cabe destacar que a hipótese de temperatura constante na parede do tubo interno consiste numa aproximação utilizada para a obtenção de coeficientes convectivos médios. Embora em trocadores de calor reais o fluxo térmico varie localmente ao longo do comprimento em função do gradiente de temperatura entre os fluidos, essa hipótese permite o uso de correlações já conhecidas, como as apresentadas no VDI

Heat Atlas [27].

O erro introduzido por essa simplificação é, em geral, da mesma ordem do que incertezas inerentes às correlações empíricas. Geralmente, os erros dessas correlações variam entre 3% e 10% para regimes de baixo número de Reynolds e Graetz.

Além disso, no modelo numérico, a hipótese de temperatura variável não é necessária. O fluxo de calor na interface entre os fluidos é calculado localmente em função do campo de temperaturas, permitindo uma representação mais fiel do comportamento térmico do trocador.

Coefficiente Convectivo do Tubo Interno

Para o escoamento do produto farmacêutico no tubo interno, assume-se regime laminar com perfil hidrodinâmico totalmente desenvolvido e condição de temperatura constante na parede.

Idealmente, a temperatura da parede varia ao longo do comprimento devido ao acoplamento térmico com o fluido externo. Entretanto, uma estimativa inicial do coeficiente convectivo médio, a hipótese de parede com temperatura constante é uma é adequada para a análise.

Inicialmente, calculam-se os números adimensionais de Prandtl e Reynolds:

$$\text{Pr} = \frac{\nu \rho c_p}{k} = \frac{(10 \times 10^{-6}) \times 1100 \times 2460}{0.25} \approx 108.24$$

$$\text{Re} = \frac{u d_i}{\nu} = \frac{0.10 \times 0.01}{10 \times 10^{-6}} = 100$$

Como $\text{Re} < 2300$, confirma-se o regime laminar.

O comprimento de entrada térmica é estimado por:

$$x_t = 0.05 \text{ Re Pr } d_i \tag{5.1}$$

resultando em:

$$x_t = 0.05 \times 100 \times 108.24 \times 0.01 \approx 5.41 \text{ m}$$

Como o comprimento do tubo é $L = 2.0 \text{ m}$, conclui-se que o escoamento permanece termicamente em desenvolvimento em toda sua extensão.

Define-se então o número de Graetz:

$$Gz = \text{Re Pr} \frac{d_i}{L} = 100 \times 108.24 \times \frac{0.01}{2.0} \approx 54.12$$

Para escoamento laminar com temperatura constante na parede e entrada térmica, o número de Nusselt médio pode ser estimado pela correlação de Hausen[26, 21]:

$$\overline{\text{Nu}} = 3.66 + \frac{0.0668 Gz}{1 + 0.04 Gz^{2/3}} \quad (5.2)$$

Substituindo o valor calculado de Graetz:

$$\overline{\text{Nu}} = 3.66 + \frac{0.0668(54.12)}{1 + 0.04(54.12)^{2/3}} \approx 5.96$$

Finalmente, o coeficiente convectivo médio interno é dado por:

$$h_f = \frac{\overline{\text{Nu}} k}{d_i} \quad (5.3)$$

Logo,

$$h_f = \frac{5.96 \times 0.25}{0.01} \approx 149 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Esse valor representa o coeficiente médio de transferência de calor por convecção no interior do tubo para as condições operacionais analisadas.

Cálculo do Número de Nusselt para Região Anular com Temperatura Variável

O número de Nusselt médio para o escoamento da água na região anular foi determinado a partir da solução analítica proposta por Hatton e Quarmby [28], desenvolvida para escoamento laminar termicamente em desenvolvimento em dutos anulares com temperatura variável linearmente na parede interna e parede externa adiabática.

Essa aproximação apresenta um valor mais próximo da realidade para o cálculo do coeficiente convectivo, visto que apresenta o valor do Nusselt levando em consideração a variação de temperatura.

Considerando a razão geométrica do problema,

$$\frac{d_i}{d_o} = 0.5 \quad (5.4)$$

o caso corresponde à configuração $R_i = 1.0$ apresentada pelos autores. A partir das propriedades termofísicas do fluido e das condições operacionais adotadas, obteve-se um número de Reynolds de aproximadamente 1264 e número de Prandtl igual a 3.56, caracterizando regime laminar com desenvolvimento térmico ainda não completamente estabelecido ao longo do comprimento do domínio.

A avaliação da solução analítica forneceu um número de Nusselt médio igual a:

$$\overline{Nu} = 7.05 \quad (5.5)$$

valor superior ao limite assintótico de escoamento termicamente desenvolvido, indicando a influência dos efeitos de entrada térmica na intensificação da transferência de calor.

O coeficiente convectivo médio foi então obtido pela definição do número de Nusselt:

$$\overline{Nu} = \frac{h_a D_h}{k} \quad (5.6)$$

resultando em:

$$h_a \approx 452 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \quad (5.7)$$

5.2.3 Resistência térmica do tubo devido à espessura da parede

A resistência térmica associada exclusivamente à condução de calor através da parede do tubo, por unidade de comprimento, é dada por

$$R'_{\text{cond}} = \frac{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}{2\pi k}. \quad (5.8)$$

Para os valores geométricos e propriedades do material adotados neste estudo, obtém-se

$$R'_{cond} = 0.000809 \text{ mK/W}. \quad (5.9)$$

Esse termo representa a resistência térmica da espessura de parede do tubo.

5.2.4 Resistência térmica global

A resistência térmica global por unidade de comprimento do tubo é a soma das resistências convectivas do produto farmacêutico, resistência convectiva da água e da resistência condutiva da parede do tubo. Assim, pode ser expressa por

$$R'_{total} = R'_{conv,i} + R'_{cond} + R'_{conv,e}. \quad (5.10)$$

A resistência convectiva interna é dada por

$$R'_{conv,i} = \frac{1}{149 \cdot 2\pi \cdot 0.005} \approx 0.2136 \text{ m} \cdot \text{K/W}. \quad (5.11)$$

enquanto a resistência convectiva externa é

$$R'_{conv,e} = \frac{1}{452 \cdot 2\pi \cdot 0.01} \approx 0.0352 \text{ m} \cdot \text{K/W}, \quad (5.12)$$

Portanto, a resistência térmica global por unidade de comprimento resulta em

$$R'_{total} = 0.0352 + 0.000809 + 0.2136 = 0.249609 \text{ m} \cdot \text{K/W} \quad (5.13)$$

A resistência térmica associada à condução na parede do tubo representa apenas

$$\frac{R'_{cond}}{R'_{total}} = \frac{0.000809}{0.249609} \approx 0.00324 \quad (5.14)$$

ou seja, aproximadamente 0.324% da resistência térmica global. Dessa forma, a resistência térmica da parede pode ser desprezada sem prejuízo significativo na estimativa do coeficiente global de transferência de calor, pois sua variação é inferior a 1%, valor de incerteza típica associada às correlações utilizadas.

Coeficiente global de transferência de calor

Desprezando-se a resistência térmica da parede, o coeficiente global de transferência de calor é obtido a partir da soma das resistências convectivas:

$$\frac{1}{U_i} = \frac{1}{h_f} + \frac{A_i}{A_e} \cdot \frac{1}{h_a} \quad (5.15)$$

onde h_a e h_f são, respectivamente, os coeficientes convectivos da água e do fármaco. Para o caso do problema, os valores obtidos para os coeficientes h_a e h_f são, respectivamente, 452 e 149 W/(m²·K), resultando em $U = 127.9$ W/(m²·K).

Capacidades térmicas

As capacidades térmicas dos fluidos são definidas como

$$C_h = \dot{m}_h c_{p,h}, \quad C_c = \dot{m}_c c_{p,c}, \quad (5.16)$$

onde \dot{m} representa a vazão mássica e c_p o calor específico. Define-se ainda

$$C_{\min} = \min(C_h, C_c), \quad C_r = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}. \quad (5.17)$$

Número de Unidades de Transferência (NTU)

O número de unidades de transferência é calculado por

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}}, \quad (5.18)$$

sendo $A = 2\pi r_i L$ a área de troca térmica da superfície interna do tubo e L o comprimento do trocador, resultando em uma área de 0.06283 m².

Efetividade e taxa de transferência de calor

Assumindo escoamento em contracorrente, a efetividade do trocador é dada por

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-NTU(1 - C_r)]}. \quad (5.19)$$

A taxa de transferência de calor é, então, obtida por

$$\dot{Q} = \varepsilon C_{\min}(T_{h,in} - T_{c,in}), \quad (5.20)$$

onde $T_{h,in}$ e $T_{c,in}$ são as temperaturas de entrada do óleo e da água, respectivamente.

Já para o caso da corrente paralela, a efetividade do trocador é dada por:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 + C_r)]}{1 + C_r}. \quad (5.21)$$

A taxa de transferência de calor é, então, obtida por meio da mesma equação para o caso do escoamento de contracorrente, 5.20.

Temperaturas de saída

As temperaturas de saída dos fluidos em ambos os casos de escoamento são determinadas a partir de balanços de energia:

$$T_{c,out} = T_{c,in} + \frac{\dot{Q}}{C_c}, \quad (5.22)$$

$$T_{h,out} = T_{h,in} - \frac{\dot{Q}}{C_h}. \quad (5.23)$$

A tabela abaixo apresenta o valor numérico para ambos os casos:

Tabela 5.4: Comparação das temperaturas de saída e parâmetros de desempenho para os arranjos em contracorrente e corrente paralela.

Parâmetro	Contracorrente	Corrente Paralela
NTU	0.378	0.378
ε	0.302	0.298
\dot{Q} (W)	256	254
$T_{frio,out}$ (°C)	56.2	56.3
$T_{hot,out}$ (°C)	32.1	31.9

5.2.5 Comparação com o Modelo Numérico

5.2.6 Verificação do Modelo Numérico

Para verificar o modelo numérico baseado no método dos elementos finitos, os resultados computacionais foram comparados com a solução analítica obtida através do método da efetividade-NTU. A Tabela 5.5 apresenta os níveis de refinamento da malha utilizada.

Tabela 5.5: Configurações de malha utilizadas para ambas as análises

Nós Longitudinais	Nós Transversais	Nós Totais	Elementos
10001	101	2010201	4020406

O tempo total de simulação transiente foi definido a partir do critério de convergência para a temperatura, conforme citado na introdução do Capítulo 6.

A Tabela 5.6 compara as temperaturas de saída obtidas numericamente com os valores calculados por meio do método de efetividade-NTU para ambos os arranjos de escoamento.

Tabela 5.6: Desvios entre temperaturas numéricas e analíticas

Caso	Fluido	Temperatura Calculada [$^{\circ}C$]	Temperatura Numérica [$^{\circ}C$]	Erro [%]
Contracorrente	Fármaco	32.06	34.41	7.33
Corrente Paralela	Fármaco	31.92	29.12	8.77

Os resultados numéricos apresentam erros relativos de 7.33% para a temperatura de saída do produto farmacêutico no arranjo em contracorrente e de 8.77% no arranjo em corrente paralela, quando comparados aos resultados analíticos.

A discordância observada está associada principalmente à natureza média do método efetividade-NTU, que utiliza coeficientes globais constantes ao longo do comprimento do trocador. Em contraste, o modelo numérico resolve localmente a evolução espacial do campo térmico, capturando os efeitos de desenvolvimento térmico e a variação axial da taxa de transferência de calor.

Adicionalmente, as correlações utilizadas para estimativa dos números de Nusselt apresentam incertezas inerentes, o que também contribui para a discrepância observada.

Outro fator relevante está relacionado às hipóteses adotadas no modelo calculado, no qual se assume temperatura variável ao longo do comprimento do tubo. No modelo numérico, por sua vez, essa condição não é válida, uma vez que o fluxo de calor varia localmente em função do gradiente de temperatura entre os fluidos em contato.

Apesar da discrepância da ordem de 9% entre os resultados analíticos e numéricos, os modelos ainda podem ser considerados uma boa aproximação para a análise do trocador de calor estudado, tendo em vista as simplificações adotadas e as incertezas inerentes às correlações utilizadas.

Capítulo 6

Resultados e Discussão

A seguir, são discutidos os principais parâmetros utilizados para a realização do estudo do trocador de calor do tipo chiller de contrafluxo de 15 metros. Esse é um dos trocadores de calor mais utilizados do mercado na produção de cerveja caseira devido ao seu custo médio e praticidade.

6.1 Estudo de Caso

O estudo analisa a transferência de calor no Chiller considerando apenas o comportamento térmico dos fluidos, desprezando os efeitos das paredes devido à sua espessura reduzida. Essa hipótese é válida, pois a resistência térmica da parede é desprezível quando comparada às resistências convectivas dos fluidos, conforme citado no Incropera [21] e mostrado na Seção 5.2.3.

A análise abordará apenas a equação do calor e as características que influenciam a eficiência da troca térmica, que foram citadas na seção anterior, permitindo, assim, uma análise simplificada do comportamento térmico do trocador de calor. O escoamento usado para as análises foi imposto como condição de contorno e foi resolvido analiticamente conforme Seções 3.4.1 e 3.4.2.

O chiller de contrafluxo padrão disponível no mercado, para essa aplicação, é projetado com dois tubos concêntricos, apresentando um comprimento total de 15 metros. O tubo interno, que conduz o mosto, é fabricado de aço inox 306 e possui um diâmetro de 3/8" e espessura de parede de 1/32". O tubo externo é composto de borracha e tem um diâmetro interno de 3/4".

Abaixo, foram reunidas as condições utilizadas para a realização do estudo.

- Fluido Frio (Água a temperatura ambiente 30°C)
- Fluido Quente (Mosto a 80 °C)
- Propriedades da água a 30°C
- Propriedades do Mosto a 55 °C, correspondente à temperatura média (bulk) estimada ao longo do trocador
- Fluido frio com possíveis vazões equivalentes à de uma torneira convencional, no máximo 0.04l/s
- Fluido Quente a Vazão de 35l/h, que corresponde a 0.00972222 l/s
- Diâmetro do Tubo Externo de 3/4" = 19.05 mm
- Diâmetro do Tubo Interno de 3/8" = 9.525 mm
- Espessura de Parede do Tubo Interno = 0.79mm

6.2 Propriedades e Condições de Contorno

6.2.1 Propriedades do Mosto

O mosto, após o processo de fervura, é encontrado a uma temperatura de aproximadamente 80°C. Esse valor corresponde à condição térmica inicial do fluido na entrada do chiller, sendo adotado como condição de contorno de temperatura para a simulação.

A vazão máxima de mosto no processo foi estabelecida em 35 litros por hora (L/h). Este valor foi determinado para que não ocorra o transporte de proteínas e outras matérias secas durante o escoamento do mosto. Além disso, essa vazão ainda permite que a formação de DMS esteja em valores aceitáveis.

Para o presente estudo, propõe-se a utilização de um mosto com volume de matéria seca de aproximadamente 40.3%. A partir do volume de matéria seca, pode-se calcular as propriedades do mosto baseado nas equações fornecidas por Sorokin [29].

As propriedades térmicas do mosto são avaliadas a uma temperatura de 55°C , que corresponde a temperatura média entre a temperatura de entrada do mosto e a temperatura de saída esperada no trocador de calor.

A densidade, condutividade térmica e a difusividade podem ser calculadas a partir das seguintes formulas, respectivamente:

$$\rho = 1152 - 0.557T + 4.7n \quad (6.1)$$

$$k \times 10^{-4} = 2550 + 15.53T - 53.58n \quad (6.2)$$

$$\alpha = 0.09 \times 1.005^T * 0.981^n \quad (6.3)$$

onde T é a temperatura em K e n é o teor de matéria seca em % peso seco.

A tabela abaixo apresenta os valores da densidade, condutividade térmica, difusividade térmica e calor específico calculados a partir das fórmulas fornecidas por Sorokin [29].

Tabela 6.1: Propriedades físicas do mosto

Densidade (kg/m^3)	Condutividade Térmica ($\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$)	Difusividade Térmica (m^2/s)	Calor específico ($\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$)
1158.714	0.548	0.205×10^{-6}	2307.015

6.2.2 Propriedades da Água

Para a simulação, adotou-se como condição de contorno a temperatura de entrada da água igual a 30°C , representando a temperatura ambiente de uma região quente.

Essa condição foi adotada para simular um cenário realista de operação, onde a água de resfriamento disponível encontra-se próxima a temperatura ideal de saída do mosto na saída do chiller, representando um desafio maior para o resfriamento do mosto.

A vazão da água foi estabelecida como quatro valores possíveis: 0.01, 0.02, 0.03 e 0.04 l/s, o que corresponde a diferentes possíveis vazões de uma torneira de tanquinho, conforme em artigo publicado por Barreto Medeiros [30]. O valor máximo estabelecido não foi testado pois o mesmo já se encontra em regime turbulento, além do limite de aplicabilidade do código.

Todas as propriedades da água foram obtidas através da interpolação dos dados da tabela A.6 do Incropera [21] e são mostradas na tabela abaixo.

Tabela 6.2: Propriedades físicas da água a 30 °C

Densidade (kg/m ³)	Condutividade Térmica (W/(m·K))	Difusividade Térmica (m ² /s)	Calor específico (J/(kg·K))
995.7	0.615	0.148×10^{-6}	4178

6.2.3 Parâmetros da Simulação

Após a definição dos parâmetros dos fluidos e suas vazões, definiram-se os parâmetros característicos da simulação numérica. A Tabela 6.3 apresenta os parâmetros

Tabela 6.3: Parâmetros da simulação numérica

Parâmetro	Valor
Número de nós (n_p)	2745061
Número de elementos (n_e)	5400000
Passo de Tempo (dt)	0.05 (s)

A escolha do passo de tempo $\Delta t = 0.05$ s na simulação numérica justifica-se pela estabilidade incondicional do esquema implícito. Ele permite ignorar os efeitos restritivos dos elevados Números de Peclet e de Courant.

Já a escolha do número de nós e do número de elementos da malha foi realizada a partir do estudo de convergência realizado na Seção 5.1.2. Observou-se que, a partir de uma discretização contendo aproximadamente cinco milhões e meio de elementos, a variação máxima na temperatura calculada foi da ordem de 0.001 °C.

Do ponto de vista numérico, a pequena variação observada evidencia a convergência da solução em relação ao refino de malha, visto que refinamentos adicionais não resultaram em alterações significativas nos resultados. Sob a ótica física, uma diferença de 0.001 °C é considerada desprezível, sendo inferior à capacidade de percepção térmica humana e irrelevante para a análise do fenômeno de transferência de calor em estudo.

É importante destacar que métodos numéricos estão sujeitos a diferentes fontes de erro, tais como erros de discretização e de arredondamento. De maneira geral, a solução convergida representa a melhor aproximação numérica do problema dentro das hipóteses e da malha usadas, não correspondendo necessariamente à solução exata.

6.2.4 Condições de Contorno

As condições de contorno adotadas estão representadas esquematicamente na Fig. 6.1 e descritas a seguir:

- **Entradas:** temperatura prescrita ($T_{\text{água}}$ e T_{mosto}) nos respectivos perfis de entrada,
- **Saídas:** condição de fluxo de calor nulo ($\partial T/\partial x = 0$),
- **Parede externa:** adiabáticas ($q = 0$),
- **Eixo de simetria:** condição de simetria radial ($\partial T/\partial x = 0$),
- **Escoamento:** Plenamente Desenvolvido para ambos os Fluidos e Calculados Analiticamente Conforme Seções 3.4.1 e 3.4.2

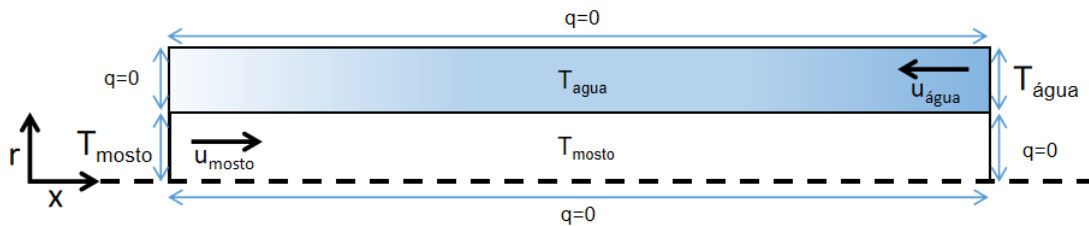


Figura 6.1: Condições de Contorno

6.3 Resultados

6.3.1 Perfil de Velocidade

Apesar de ter sido imposta como uma das condições de contorno, ainda é válido verificar se as regiões de entrada e saída do chiller apresentam escoamento ple-

namente desenvolvido hidrodinamicamente, para garantir a validade da correlação usada para o Número de Nusselt.

A Figura 6.2 apresenta o perfil de velocidades para ambos os tubos na seção de saída do chiller ($x = 15m$) para a vazão de água de $0.01l/s$. O mesmo gráfico foi obtido nos comprimentos $x = 0 m$ e $x = 7.5m$, indicando que a velocidade não varia de acordo com a posição.

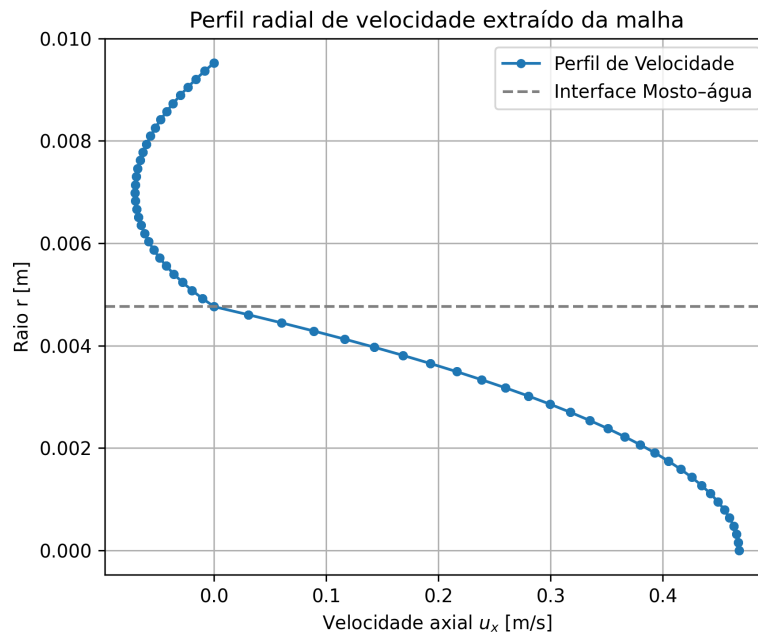


Figura 6.2: Exemplo de Perfil de Velocidade ao Longo da Seção Radial

Assim, podemos perceber que a velocidade do tubo na região do tubo interno é positiva e a velocidade do tubo na região anular é negativa, o que condiz com as velocidades esperadas para um trocador de calor de contracorrente.

Além disso, percebe-se graficamente que o perfil de velocidade é similar ao perfil de Hagen-Poiseuille. Esse perfil ocorre somente quando a velocidade está plenamente desenvolvida, o que condiz com a hipótese de que o fluido está hidrodinamicamente desenvolvido.

6.3.2 Perfil de Temperatura

A Figura 6.3 apresenta a evolução da temperatura, calculada numericamente na saída de ambos os fluidos no chiller ao longo do tempo, para uma vazão de $0.04L/s$. Vale destacar que a saída para o escoamento anular ocorre na região inicial do

domínio axial, enquanto a saída para o mosto ocorre no término do chiller. Essa configuração condiz com o sentido de escoamento mostrado na Figura 6.1.

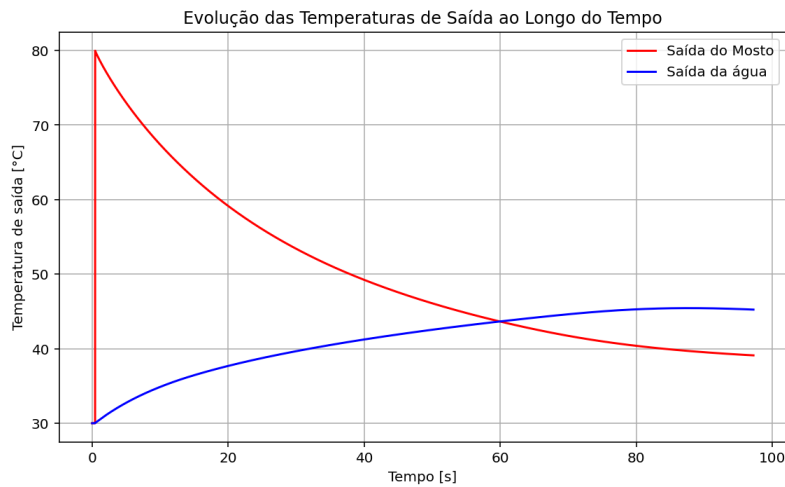


Figura 6.3: Temperatura nas Saídas do Mosto e da Água nas Respectivas Saídas

Para a determinação da temperatura final de saída do tubo a partir do regime transiente, foram realizadas iterações sucessivas, nas quais se calcula a temperatura de saída em cada tubo até que seis iterações consecutivas apresentem entre si uma variação inferior a uma tolerância estabelecida.

Para essa análise, o critério de parada da simulação foi baseado exclusivamente na temperatura do mosto. Caso 10 iterações seguidas possuam uma variação inferior a $0.0005^{\circ}C$ entre si, a temperatura é considerada convergente.

O gráfico 6.3 é útil para avaliar a convergência numérica de ambos os fluidos. Quando a temperatura está convergindo, ela tende a se manter constante ao longo do gráfico. A partir da 6.3, podemos perceber que o critério de $0.0005^{\circ}C$ para a convergência da análise é suficiente para garantir que não há mais mudança significativa na temperatura.

Além disso, vale destacar que ocorre o cruzamento de temperatura no gráfico pois a temperatura do mosto é avaliada no ponto $x = 15.0m$ e a temperatura da água é avaliada no ponto $x = 0.0m$.

O resultado do campo de temperatura para ambas as vazões de 0.01, 0.02, 0.03 e $0.04l/s$ são mostrados nas Figuras 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, respectivamente.

Pode-se notar que as maiores temperaturas concentram-se na região inicial do domínio, onde o mosto entra no Chiller a uma temperatura de $80^{\circ}C$. À medida

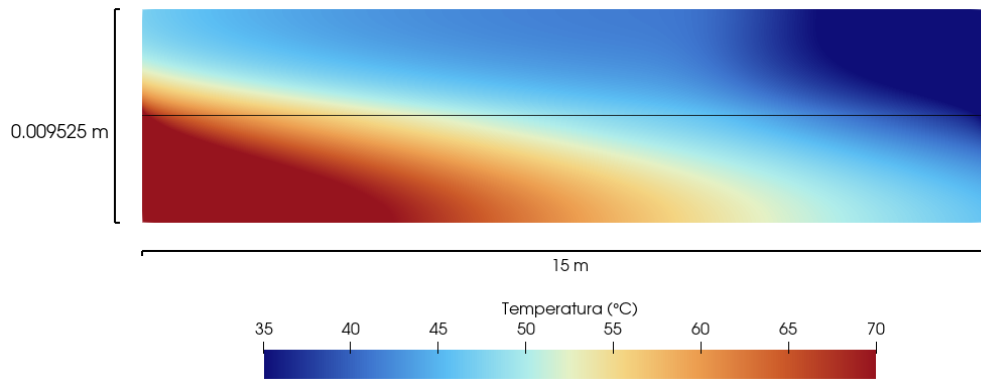


Figura 6.4: Campo de Temperatura para a Vazão da água de 0.01l/s

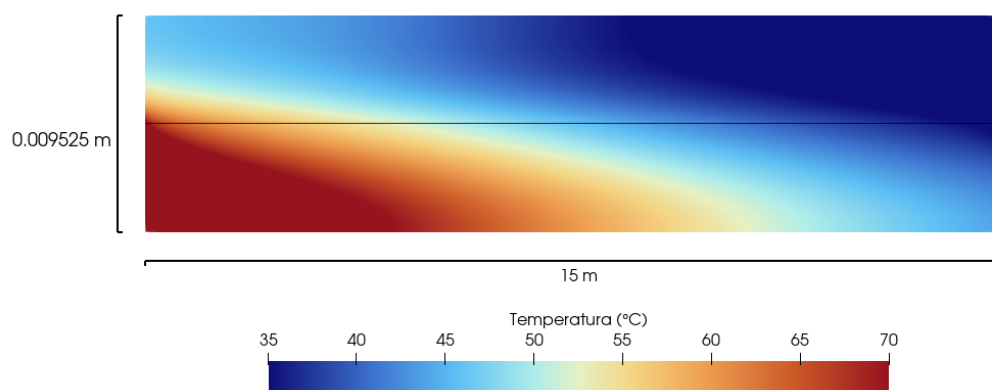


Figura 6.5: Campo de Temperatura para a Vazão da água de 0.02l/s

que o escoamento avança, ocorre uma redução progressiva da temperatura devido ao processo de transferência de calor entre a água e o mosto.

Além disso, o maior gradiente térmico ocorre próximo à entrada do mosto devido à diferença de temperatura elevada entre a água e o mosto, indicando que no início do tubo é onde ocorre a maior parcela da transferência de energia entre os fluidos. Nas regiões finais do domínio, a variação de temperatura torna-se mais suave pois a temperatura já está mais próxima a temperatura de equilíbrio.

6.3.3 Temperatura de Saída

A tabela abaixo apresenta a temperatura de saída do mosto e da água ao longo do comprimento, considerando as 4 vazões diferentes. Todos os resultados mostrados foram obtidos assim que a temperatura convergiu.

Além disso, A Figura 6.8 mostrada apresenta os gráficos transientes para ambos os fluidos, mostrando o valor da primeira iteração até o momento em que o regime

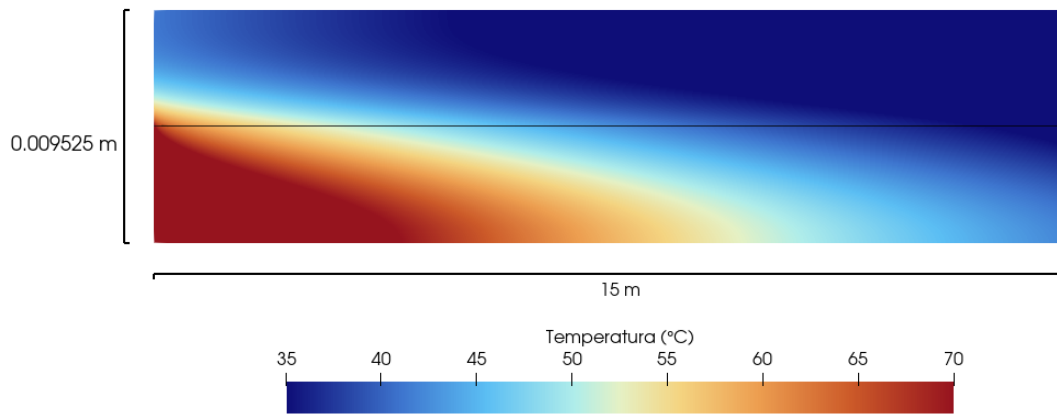


Figura 6.6: Campo de Temperatura para a Vazão da água de 0.03l/s

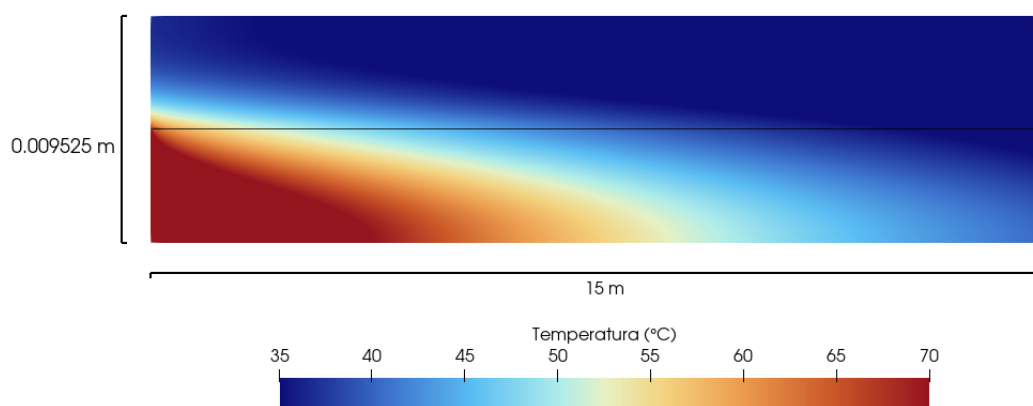


Figura 6.7: Campo de Temperatura para a Vazão da água de 0.04l/s

permanente é atingido, de acordo com o código.

Pode-se perceber um padrão dos gráficos em relação a temperatura de saída do mosto e da água. Quanto menor a vazão, maior o tempo de residência dos fluidos no trocador, favorecendo a transferência de calor entre eles por meio da difusão. O gráfico 6.9 mostra o comportamento do fluido de interesse em função da vazão de saída de água.

A maneira ideal de se medir a influência do tipo de transferência de calor é através do número de Peclet, que mostra a predominância de um em relação ao outro. Números de Peclet menores do que 1 indicam predominância difusiva. Para valores intermediários, tanto difusão quanto convecção contribuem significativamente. Já para números de Peclet elevados, a convecção se torna o principal método de troca de calor. Vale destacar que quanto maior a vazão, maior é a influência da convecção devido ao fato da vazão apresentar uma maior velocidade média para o fluido. A

Tabela 6.4: Temperaturas de Saída dos Fluidos para as Diferentes Vazões

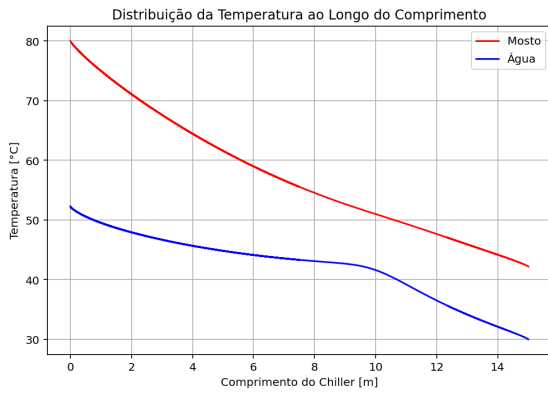
Vazão l/s	Temperatura do Mosto [$^{\circ}C$]	Temperatura da Água [$^{\circ}C$]
0.01	43.52	49.04
0.02	41.79	47.14
0.03	40.65	46.00
0.04	39.85	44.15

tabela abaixo apresenta o número de Peclet para cada vazão de água diferentes.

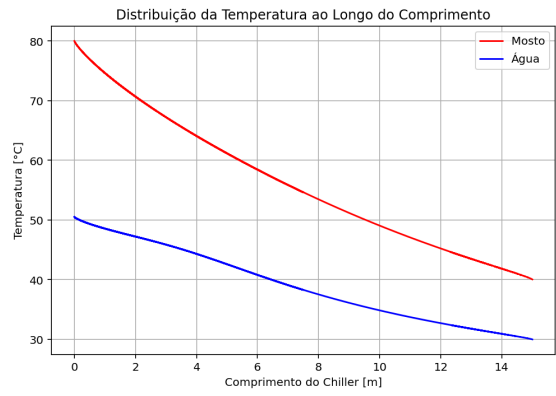
Tabela 6.5: Temperaturas de Saída a Diferentes Vazões

Vazão l/s	0.01	0.02	0.03	0.04
Numero de Péclet Médio	19.57	39.14	58.71	78.28

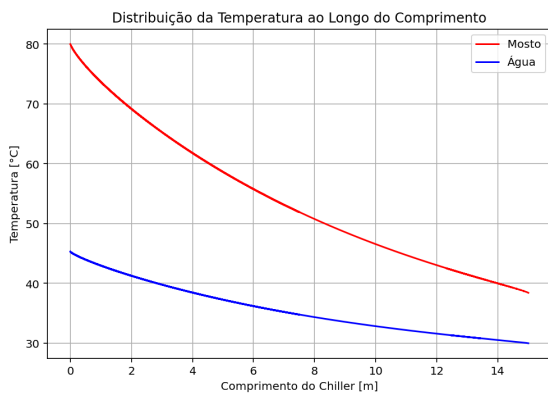
Além disso, o gráfico que mostra o comportamento da temperatura da água e do mosto em função da vazão da água são mostrados na Figuras 6.9. A partir dele, é possível estimar a temperatura de saída de ambos os fluidos, desde que ambas as vazões sejam conhecidas



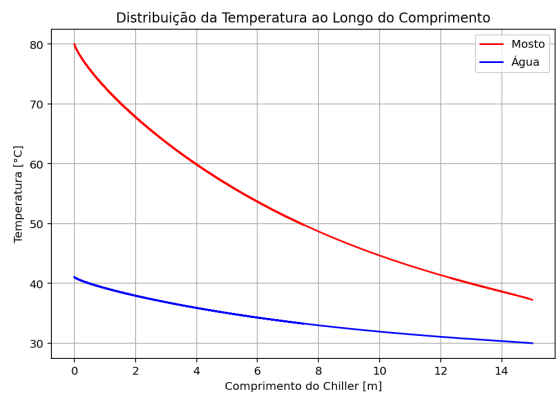
(a) Vazão de 0.01l/s



(b) Vazão de 0.02l/s



(c) Vazão de 0.03l/s



(d) Vazão de 0.04l/s

Figura 6.8: Temperatura dos Fluidos ao longo do Comprimento

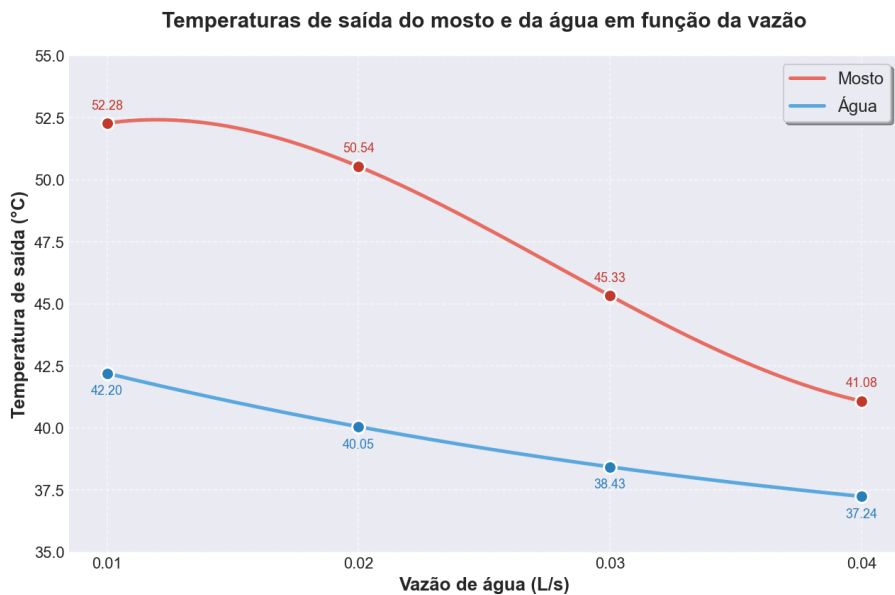


Figura 6.9: Temperatura dos Fluidos do Chiller em Função da Vazão

6.3.4 Comparação com efetividade-NTU

Para a realização do cálculo semi-analítico do chiller de contrafluxo, utilizou-se o método efetividade-NTU, conforme apresentado na Seção 5.2.2.

Entretanto, diferentemente do caso simplificado anteriormente estudado, o *chiller* analisado apresenta uma região de entrada térmica relativamente pequena quando comparada ao comprimento total do trocador.

A partir das propriedades calculadas para os fluidos, obteve-se um comprimento de entrada térmica aproximado de 3.0 m para o mosto e 4.3 m para a água no anular. Como o comprimento total do trocador é de 15 m, conclui-se que grande parte do equipamento opera em regime termicamente desenvolvido.

Dessa forma, para o cálculo semi-analítico, foram utilizadas correlações considerando escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido e predominantemente termicamente desenvolvido.

Para o mosto no tubo interno circular, utilizou-se a correlação de Hausen para o cálculo do número de Nusselt médio com efeitos de entrada térmica:

$$\overline{Nu}_i = 3.66 + \frac{0.0668 Gz_i}{1 + 0.04 Gz_i^{2/3}}$$

onde Gz_i representa o número de Graetz para o escoamento interno.

Já para a região anular, utilizou-se a solução de Hatton e Quarmby [?], específica para escoamento laminar em anulares com parede interna isotérmica e parede externa adiabática.

Para a obtenção do Nusselt, foi utilizado a razão entre os raios externo e interno para extrair o valor do Nusselt assintótico para o caso em que a temperatura da parede do tubo interna é constante e a parede do tubo externo é adiabática.

A partir da curva apresentada por Hatton e Quarmby para a razão geométrica $\frac{R_o}{R_i} = 2$, obteve-se um número de Nusselt assintótico:

$$\overline{Nu}_o \approx 5.6$$

A hipótese de utilizar o número assintótico é válida pois a maior parte do tubo encontra-se plenamente desenvolvido.

No caso da água, foi utilizada a correlação de Hausen, que leva em consideração parte do perfil termicamente em desenvolvimento, encontrando-se:

$$\overline{Nu}_i \approx 3.91$$

Os coeficientes convectivos médios obtidos foram aproximadamente:

$$h_i \approx 270 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

para o mosto e

$$h_o \approx 362 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

para a água.

Desprezando-se a resistência térmica da parede do tubo interno, o coeficiente global médio de troca térmica pode ser estimado por:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_o}$$

resultando em:

$$U \approx 166.4 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$$

A área de troca térmica do trocador foi calculada por:

$$A = \pi D_i L$$

resultando em:

$$A \approx 0.374 \text{ m}^2$$

A capacidade térmica mínima do sistema corresponde ao mosto, sendo dada por:

$$C_{min} = \dot{m}c_p = 25.98 \text{ W}/\text{K}$$

resultando em:

$$C_{min} \approx 26 \text{ W}/\text{K}$$

Assim, o número de unidades de transferência foi calculado por:

$$NTU = \frac{UA}{C_{min}}$$

resultando em:

$$NTU \approx 2.39$$

para todas as vazões analisadas.

A efetividade do trocador foi então obtida pela relação para trocadores de contracorrente:

$$\varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - C_r)]}{1 - C_r \exp[-NTU(1 - C_r)]}$$

Os resultados finais das temperaturas e dos parâmetros térmicos calculados analiticamente são apresentados na Tabela 6.6.

Tabela 6.6: Temperaturas de saída e parâmetros de desempenho para diferentes vazões de água em contracorrente

Vazão de água (L/s)	C_c (W/K)	C_r	NTU	ε	\dot{Q} (W)	$T_{h,out}$ (°C)	$T_{c,out}$ (°C)
0.01	41.60	0.625	2.39	0.795	1032	40.28	54.81
0.02	83.20	0.313	2.39	0.858	1114	37.13	43.39
0.03	124.80	0.208	2.39	0.876	1138	36.22	39.12
0.04	166.40	0.156	2.39	0.885	1150	35.76	36.91

A Tabela 6.7 apresenta a comparação entre os resultados numéricos e analíticos, bem como os erros absolutos e relativos para ambos os fluidos.

Comparando os resultados obtidos numericamente com os valores calculados pelo método efetividade-NTU, observa-se discordância de até 9% para o mosto e até 16% para a água.

Essas discordâncias observadas são esperadas, já que o modelo semi-analítico considera um série de simplificações que podem induzir pequenas incertezas no modelo, ilustradas:

Tabela 6.7: Resultados de temperatura e erro para diferentes vazões de água

Vazão água (L/s)	Fluido	T_{num} (°C)	T_{calc} (°C)	Erro abs. (°C)	Erro rel. (%)
0.01	Mosto	43.52	40.28	3.24	7.44
	Água	49.04	54.81	5.77	11.77
0.02	Mosto	41.79	37.13	4.66	11.15
	Água	47.14	43.39	3.75	7.95
0.03	Mosto	40.65	36.22	4.43	10.90
	Água	46.00	39.12	6.88	14.96
0.04	Mosto	39.85	35.76	4.09	10.26
	Água	44.15	36.91	7.24	16.40

- Valores do Coeficiente Convectivo Local: O valor utilizado no método NTU é obtido por correlações empíricas médias, enquanto o modelo numérico resolve diretamente o campo bidimensional de temperatura, capturando localmente os gradientes térmicos e os efeitos de entrada térmica ao longo do domínio.
 - Além disso, o método semi-analítico assume condições idealizadas para obtenção do número de Nusselt, como parede interna isotérmica no anular, hipótese que não é rigorosamente satisfeita no problema físico real.
- Bidimensionalidade: O modelo numérico bidimensional captura os efeitos da condução axial e dos gradientes radiais de temperatura nos fluidos, contribuindo para uma troca térmica menos idealizada do que a prevista pelo modelo unidimensional de efetividade-NTU.
- Condições de contorno: A correlação utilizada para o escoamento anular assume parede interna isotérmica e parede externa adiabática, condições idealizadas que diferem do comportamento térmico do modelo numérico.
- Efeitos da Entrada Térmica: Em ambos os fluidos, os efeitos da entrada térmica são capturados pelo modelo bidimensional. No caso do cálculo semi-analítico, esses efeitos são desprezados, quando utilizado o valor assintótico.

Capítulo 7

Conclusão

Este trabalho teve como objetivo principal desenvolver e verificar um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a simulação de trocadores de calor concêntricos (bitubulares) operando em regime laminar. O modelo resolve a equação bidimensional transiente da energia, acoplada a perfis de velocidade analíticos (Hagen–Poiseuille) para os fluidos interno e externo. A verificação foi realizada comparando as temperaturas de saída simuladas com valores obtidos a partir de correlações empíricas consolidadas.

Os resultados mostram que o código desenvolvido em *Python* é capaz de reproduzir o comportamento térmico do trocador com erro relativo médio de aproximadamente 10% para o mosto e de 13% para a água. A Tabela 7.1 resume os erros absolutos e relativos obtidos.

Tabela 7.1: Resumo dos erros absolutos e relativos máximos e médios obtidos na comparação entre resultados calculados e numéricos.

Fluido	Erro abs. médio (°C)	Erro abs. máx. (°C)	Erro rel. médio (%)
Mosto	4,11	4,66	9,94
Água	5,91	7,24	12,77

Esses valores confirmam que o modelo numérico é uma alternativa viável para a análise térmica inicial de trocadores de calor concêntricos, especialmente em situações de convecção dominante e desenvolvimento térmico, desde de que seja obedecida a hipótese de que o regime é laminar e hidrodinamicamente desenvolvido.

Do ponto de vista prático, as simulações realizadas para diferentes vazões indicam que um trocador de calor bitubular com 15 m de comprimento é capaz de resfriar o mosto cervejeiro a temperaturas que inibem a formação de dimetilsulfeto (DMS). Entretanto, deve-se atentar ao fato de que vazões elevadas podem provocar a sucção de matérias secas indesejadas (proteínas, levedura e lúpulo desativados). Além disso, o resfriamento obtido pode não ser suficiente para atingir a temperatura de inoculação da levedura, sendo necessário um estágio adicional de resfriamento. Portanto, a escolha da vazão deve equilibrar a eficiência térmica e a qualidade do produto final.

7.1 Sugestões para desenvolvimentos futuros

Com base nas limitações do presente estudo, sugerem-se as seguintes melhorias:

- Realizar análise com acoplamento termo-hidráulico.
- Implementar propriedades termofísicas dependentes da temperatura, principalmente, a viscosidade, que pode alterar o tipo de regime.
- Generalizar o código para todos os regimes de escoamento para ambos os fluidos.
- Validar com modelos experimentais
- Simular cenários em que possa ocorrer *fouling*.
- Realizar análise paramétrica do Chiller para otimização de Chillers caseiros.
- Incluir a espessura das paredes dos tubos e a resistência térmica de contato.

Referências Bibliográficas

- [1] KIRIN HOLDINGS COMPANY, LIMITED, “Global Beer Consumption Report”, https://www.kirinholdings.com/en/newsroom/2024/0125_01.html, 2024, Acesso:: 2025-05-03.
- [2] MINISTÉRIO DA AGRICULTURA E PECUÁRIA, “Com 1.847 cervejarias registradas no Brasil, setor cresce 6,8% em 2023”, 2024, Acesso:: 09 maio 2025.
- [3] HORNSEY, I. S., *A History of Beer and Brewing*. Royal Society of Chemistry: Cambridge, 2003.
- [4] NELSON, M., *The Barbarian’s Beverage: A History of Beer in Ancient Europe*. Routledge: London, 2005.
- [5] MEUSSDOERFFER, F. G., “A Comprehensive History of Beer Brewing”, In: *Handbook of Brewing: Processes, Technology, Markets*, pp. 1–42, Wiley-VCH: Weinheim, 2009.
- [6] BARNETT, J. A., “A history of research on yeasts 2: Louis Pasteur and his contemporaries, 1850–1880”, *Yeast*, v. 16, n. 8, pp. 755–771, 2000.
- [7] BOULTON, C., QUAIN, D., *Brewing Yeast and Fermentation*. Blackwell Science: Oxford, 2001.
- [8] PALMER, J. J., *How to Brew: Everything You Need to Know to Brew Beer Right the First Time*. Brewers Publications: Boulder, CO, 2006.
- [9] CERVEJA EM MALTE, “Moagem correta do malte”, <https://cervejaemalte.com.br/blog/moagem-correta-do-malte/>, 2025, Acesso:: 2025-12-07.

- [10] SILVA, J. P., SANTOS, M. A., “Figura 1: Representação básica do processo produtivo da cerveja artesanal caseira”, .
- [11] MACEDO, F. G., “Dimensionamento de um trocador de calor duplo tubo para resfriamento do mosto na fabricação de cerveja artesanal”, 2012.
- [12] SANTANA, A. L. M., “Modelagem, simulação e análise do fenômeno de transferência de calor do resfriador de mosto de uma microcervejaria”, *Revista de Engenharia e Tecnologia*, 2020.
- [13] SANTOS, D. C., “O impacto da temperatura no sensorial da cerveja durante o seu processo de produção”, 2017.
- [14] BALAJI, V., PADALA, S., JOSH, S. K., et al., “Finite element analysis of double pipe heat exchanger using nanofluids”. In: *E3S Web of Conferences*, v. 563, p. 01004, 2024.
- [15] LUCCA, R. K., “Projeto, construção e ensaio de um trocador de calor de placas paralelas polimérico para pasteurização de mosto de cerveja”, 2013.
- [16] VALBIER, “Chiller de Contra Fluxo em Alumínio - 15 metros”, <https://valbier.com.br/chiller-de-contra-fluxo-em-aluminio-15-metros-valbier>, Acesso em: 26 de fevereiro de 2026.
- [17] GUAYANAZ, G. D. A., “Análise de viabilidade técnica-econômica entre trocadores de calor do tipo casco e tubos e placas aplicados em chiller de 100TR”, 2024, Artigo. Disponível no repositório institucional da PUCRS.
- [18] FÁBRICA DO CERVEJEIRO, “Chiller de 30 Placas”, <https://www.fabricadocervejeiro.com.br/chiller-de-placas-40-rm-3/4-inox-trocador-de>, 2026, Acesso:: 2026-01-09.
- [19] INVERSA INOX, “Chiller de imersão em inox para 65 litros”, <https://www.inversainox.com/equipamentos/chiller-trocador-de-calor/imersao-contra-fluxo/chiller-imersao-em-inox-para-65-litros>, 2024, Acesso:: 2026-01-09.

- [20] FOX, R. W., MCDONALD, A. T., PRITCHARD, P. J., et al., *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 9th ed. LTC: Rio de Janeiro, RJ, 2023.
- [21] INCROPERA, B., *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2014.
- [22] PERUMAL NITHIARASU; LEWIS, R. W.; SEETHARAMU, K. N., *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley and Sons, 2004.
- [23] FISH, J., *A First Course in Finite Elements*. John Wiley & Sons: Chichester, England; Hoboken, NJ, 2007.
- [24] DONEA, J., “A Taylor-Galerkin method for convective transport problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, n. 1, pp. 101–119, Jan. 1984.
- [25] ANJOS, G., “Computação Científica para Engenheiros”, https://drive.google.com/file/d/1Vvw0MQztD-sbMidH6-sV1wKXZ5fztw_x/view, May 2024, Notas de aula, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [26] KAYS, W. M., CRAWFORD, M. E., *Convective Heat and Mass Transfer*. 3rd ed. McGraw–Hill: New York, 1993.
- [27] VDI-GESELLSCHAFT VERFAHRENSTECHNIK UND CHEMIEINGENIEURWESEN, (ed), *VDI Heat Atlas*. 2nd ed. Springer: Berlin, 2010.
- [28] HATTON, A. P., QUARMBY, A., “Heat Transfer in the Thermal Entry Length with Laminar Flow in an Annulus”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 5, pp. 973–980, 1962.
- [29] SOROKIN, S. A., NOVOSELOV, A. G., KUZNETSOV, A. Y., et al., “Comprehensive studies of the physical and thermophysical properties of wort”, *BIO Web of Conferences*, v. 103, pp. 00037, 2024, Artigo de conferência.
- [30] BARRETO, D., MEDEIROS, O., “Caracterização da vazão e frequência de uso de aparelhos sanitários”, *Ambiente Construído*, v. 8, n. 4, pp. 137–149, out./dez. 2008, Submetido em 08/01/2008, Aceito em 20/12/2008.

- [31] OZIŞIK, M. N., *Heat transfer : a basic approach*. Mcgraw-Hill, 1985.
- [32] G.HUGHES, *Cerveja Feita em Casa: Tudo sobre os ingredientes, os equipamentos e as técnicas para produzir a cerveja em vários estilos*. Publifolha, 1985.
- [33] PRIEST, F. G., STEWART, G. G., (eds), *Handbook of Brewing*. 2nd ed. CRC Press: Boca Raton, 2006.
- [34] SHA, W. T., LONDON, A. L., *Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data*. Academic Press: New York, 1978, Supplement 1 to Advances in Heat Transfer Series.
- [35] LUNDBERG, R. E., REYNOLDS, W. C., KAYS, W. M., *Heat Transfer with Laminar Flow in Concentric Annuli with Constant and Variable Wall Temperature and Heat Flux*, NASA Technical Note D-1972, National Aeronautics and Space Administration (NASA), Washington, D.C., 1964, Prepared under Grant NsG-52-60 by Stanford University, Stanford, California.
- [36] VALBIER BREWSHOP E ESCOLA, “Chiller de contra fluxo em alumínio para cerveja artesanal”, <https://valbier.com.br/chiller-de-contra-fluxo-em-aluminio-15-metros-valbier>, 2026, Acesso:: 2026-01-09.

Apêndice A

Código-Fonte para Trocador de Calor

Este apêndice apresenta o código-fonte desenvolvido e utilizado para a validação numérica de trocadores de calor tubulares operando em regime de corrente paralela, contracorrente e para a simulação do chiller aplicado ao resfriamento de mosto. O modelo computacional foi implementado por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando os efeitos de condução e convecção térmica em regime transiente.

As propriedades termofísicas dos fluidos, bem como as dimensões geométricas do domínio, foram ajustadas de acordo com cada estudo de caso analisado ao longo do trabalho, permitindo a reprodução dos diferentes cenários de operação.

O código apresentado a seguir foi empregado tanto na etapa de validação do modelo numérico, por meio da comparação com soluções clássicas da literatura, quanto na análise do desempenho térmico do chiller proposto.

```
import meshio
import numpy as np
from scipy.sparse import lil_matrix, csr_matrix
from scipy.sparse.linalg import spsolve
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.sparse.linalg import factorized
import time

# parametros da agua
t_init_agua = 30
```

```

rho_agua = 995.7
cp_agua = 4178
kx_agua = 0.615
alpha_agua = kx_agua/(rho_agua*cp_agua)

# parametros do mosto
t_init_mosto = 80.0
rho_mosto = 1158.714
cp_mosto = 2307.0
kx_mosto = 0.548
alpha_mosto = kx_mosto/(rho_mosto*cp_mosto)

#parametros do contorno e tempo
beta = 1
dt = 0.01
nIter = 100001
raio_int = 25.4*3/8/1000/2
raio_ext = 25.4*3/4/1000/2
l = 15.0

msh = meshio.read('untitled.msh')
X = msh.points[:,0]
Y = msh.points[:,1]
IEN = msh.cells[1].data
IENbound = msh.cells[0].data
IENboundTypeElem = list(msh.cell_data["gmsh:physical"][0] - 1)
boundNames = list(msh.field_data.keys())
IENboundElem = [boundNames[elem] for elem in IENboundTypeElem]
npoints = len(X)
ne = IEN.shape[0]

# cria lista de nos do contorno
cc = np.unique(IENbound.reshape(IENbound.size))

```

```

ccName = [[] for i in range( len(X) )]
for elem in range(0,len(IENbound)):
    ccName[ IENbound[elem][0] ] = IENboundElem[elem]
    ccName[ IENbound[elem][1] ] = IENboundElem[elem]

nos_saida = []
nos_agua = []

tabela_agua = (0.04, 0.03, 0.02, 0.01)

for index, vazao in enumerate(tabela_agua):

    Co_mosto = []
    Co_agua = []
    Pe_mosto = []
    Pe_agua = []

    start_time = time.time()

    print(f"===== Vazao = {vazao:.3f} =====")
    fase = 1 # 1 = so agua, 2 = agua + mosto

    #calculo velocidade maxima do mosto
    vazao_mosto = 35
    vazao_m3s = vazao_mosto/3600000
    vel_media = vazao_m3s/(np.pi*raio_int*raio_int)
    vel_max_mosto = 2 * vel_media

    #vel do escoamento anular (agua)
    vazao_m3s_agua = vazao/1000
    vel_med_agua = vazao_m3s_agua/(np.pi* ((raio_ext*raio_ext) -
        (raio_int*raio_int)))

    #iniciando matrizes

```

```

Vel_x = np.zeros((npoints), dtype = 'float')
Vel_y = np.zeros((npoints), dtype = 'float')
M_triang = lil_matrix((npoints,npoints), dtype='float')
K_triang = lil_matrix((npoints,npoints), dtype='float')
G_triang = lil_matrix((npoints,npoints), dtype='float')
K_estab = lil_matrix((npoints, npoints), dtype = 'float')
Pe_mosto = []
Pe_agua = []

#calculo da velocidade em x
def v_quente(Y, raio_int, vel_max_mosto):
    return (vel_max_mosto * (1 - (Y/raio_int)**2))

def v_frio(Y, raio_int, raio_ext, vel_med_agua):
    termo_log = np.log(raio_ext / raio_int)

    denominador = np.pi * (raio_ext**4 - raio_int**4 - (raio_ext**2 -
        raio_int**2)**2 / termo_log)

    # area da secao anular
    area = np.pi * (raio_ext**2 - raio_int**2)

    # Substituicao da vazao pela velocidade media
    fator = 2 * vel_med_agua * area / denominador

    termo1 = Y**2 - raio_int**2
    termo2 = (raio_ext**2 - raio_int**2) * np.log(Y / raio_int) /
        termo_log

    return fator * (termo1 - termo2)

for i, ri in enumerate(Y):
    r_abs = abs(ri)

```

```

if r_abs <= raio_int:
    if fase == 1:
        Vel_x[i] = 0.0
    else:
        Vel_x[i] = v_quente(r_abs, raio_int, vel_max_mosto)

elif raio_int < r_abs <= raio_ext:
    Vel_x[i] = v_frio(r_abs, raio_int, raio_ext, vel_med_agua)

else:
    Vel_x[i] = 0.0

# ----- # Montagem das matrizes #
-----

for e in range(0,ne):
    vi, vj, vk = IEN[e]
    area = abs(0.5 * np.linalg.det([[1.0, X[vi], Y[vi]],
                                   [1.0, X[vj], Y[vj]],
                                   [1.0, X[vk], Y[vk]]]))

    bi = Y[vj] - Y[vk]
    bj = Y[vk] - Y[vi]
    bk = Y[vi] - Y[vj]
    ci = X[vk] - X[vj]
    cj = X[vi] - X[vk]
    ck = X[vj] - X[vi]

# ----- # Velocidade #
-----

v_elem_x = (Vel_x[vi] + Vel_x[vj] + Vel_x[vk]) / 3.0
v_elem_y = (Vel_y[vi] + Vel_y[vj] + Vel_y[vk]) / 3.0
r_elem = abs((Y[vi] + Y[vj] + Y[vk]) / 3.0)

```

```

# ----- Numero de Peclet do elemento -----

# peremetro do elemento
x1, y1 = X[vi], Y[vi]
x2, y2 = X[vj], Y[vj]
x3, y3 = X[vk], Y[vk]

P_elem = (np.sqrt((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2) +
          np.sqrt((x3-x2)**2 + (y3-y2)**2) +
          np.sqrt((x1-x3)**2 + (y1-y3)**2))

# comprimento caracterestico FEM
Lc = 2.0 * area / P_elem

# velocidade caracterestica
u_elem = np.sqrt(v_elem_x**2 + v_elem_y**2)

# separacao por fluido
if r_elem <= raio_int:
    Pe = u_elem * Lc / alpha_mosto
    Pe_mosto.append(Pe)
else:
    Pe = u_elem * Lc / alpha_agua
    Pe_agua.append(Pe)

Co = u_elem * dt / Lc

if r_elem <= raio_int:
    Co_mosto.append(Co)
else:
    Co_agua.append(Co)

# ----- # Matrices Elementares #
-----

```

```

# Matrizes de Rigidez
kxelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ bi*bi, bi*bj, bi*bk],
                                   [ bj*bi, bj*bj, bj*bk],
                                   [ bk*bi, bk*bj, bk*bk]])

kyelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ ci*ci, ci*cj, ci*ck],
                                   [ cj*ci, cj*cj, cj*ck],
                                   [ ck*ci, ck*cj, ck*ck]])

kxyelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ bi*ci, bi*cj, bi*ck],
                                   [ bj*ci, bj*cj, bj*ck],
                                   [ bk*ci, bk*cj, bk*ck]])

if r_elem <= raio_int:
    kelem = alpha_mosto * r_elem * (kxelem + kyelem)
else:
    kelem = alpha_agua * r_elem * (kxelem + kyelem)

#Matriz de Massa
melem = r_elem * (area/12)*np.array([[2.0, 1.0, 1.0],
                                   [1.0, 2.0, 1.0],
                                   [1.0, 1.0, 2.0]])

# Matrizes de Conveccao
g_ex = (1.0/6.0) * np.array([[bi, bj, bk],
                             [bi, bj, bk],
                             [bi, bj, bk]])

g_ey = (1.0/6.0) * np.array([[ci, cj, ck],
                             [ci, cj, ck],
                             [ci, cj, ck]])

gelem = r_elem * (v_elem_x * g_ex + v_elem_y * g_ey)

```

```

# Matriz de Estabilizacao
k_estab_elem = r_elem * ((v_elem_x * dt)/2.0 * (v_elem_x*kxelem +
    v_elem_y*kxyelem) \
    + (v_elem_y * dt)/2.0 * (v_elem_x *
    kxyelem + v_elem_y * kyelem))

# Assembly
for ilocal in range(3):
    iglobal = IEN[e, ilocal]
    for jlocal in range(3):
        jglobal = IEN[e, jlocal]
        K_triang[iglobal, jglobal] += kelem[ilocal, jlocal]
        M_triang[iglobal, jglobal] += melem[ilocal, jlocal]
        G_triang[iglobal, jglobal] += gelem[ilocal, jlocal]
        K_estab[iglobal, jglobal] += k_estab_elem[ilocal, jlocal]

Pe_agua = np.array(Pe_agua)

print("\n===== Peclet da agua =====")

print(f"agua : Pe_min = {Pe_agua.min():.2f}, "
      f"Pe_med = {Pe_agua.mean():.2f}, "
      f"Pe_max = {Pe_agua.max():.2f}")

# System matrix WITH STABILIZATION (Step 2)
M_triang = M_triang.tocsr()
K_triang = K_triang.tocsr()
G_triang = G_triang.tocsr()
K_estab = K_estab.tocsr()

M_calc = (M_triang/dt)
A = M_calc + K_triang - beta * G_triang + K_estab
A = A.tolil()

```

```

b = np.zeros(npoints, dtype = 'float')

# ----- # Inicializa temperatura #
-----

Co_agua = np.array(Co_agua)

print("\n==== Courant da agua ====")

print(f"agua : Co_min = {Co_agua.min():.3f}, "
      f"Co_med = {Co_agua.mean():.3f}, "
      f"Co_max = {Co_agua.max():.3f}")

T = np.zeros(npoints)

for p in range(npoints):
    T[p] = t_init_agua

for a in cc:
    if ccName[a] in ['agua']:
        A[a,:] = 0
        A[a,a] = 1.0

A = A.tocsc()
solver = factorized(A)

print("Nomes dos contornos:", set([str(name) for name in ccName if
    name != []]))

# ----- # Nos de Saida e variaveis do grafico#
-----

```

```

tempos = []
T_mistura_hist = []
T_media_hist = []

T_mistura_mosto_final = None
T_mistura_agua_final = None
T_mistura_mosto = None
T_mistura_agua = None

contador_conv = 0

contador_conv_agua = 0
contador_conv_mosto = 0
T_mistura_agua_old = None
T_mistura_mosto_old = None

# ----- # Pre-CaLCULO DOS NoS DE SAIDA # -----

tol = 1e-3
mask_saida_mosto = np.isclose(X, 1, atol=tol)
mask_saida_agua = np.isclose(X, 0, atol=tol)

nos_saida_mosto = np.where(mask_saida_mosto & (np.abs(Y) <=
    raio_int))[0]
nos_saida_agua = np.where(mask_saida_agua & (np.abs(Y) > raio_int))[0]

# Ordenacao radial (fixa!)
ordem_mosto = np.argsort(np.abs(Y[nos_saida_mosto]))
ordem_agua = np.argsort(np.abs(Y[nos_saida_agua]))

nos_saida_mosto = nos_saida_mosto[ordem_mosto]
nos_saida_agua = nos_saida_agua[ordem_agua]

# raios ja ordenados

```

```

r_mosto = np.abs(Y[nos_saida_mosto])
r_agua = np.abs(Y[nos_saida_agua])

# ----- # PRe-CaLCULO DOS PESOS (FORA DO LOOP) #
-----

w_mosto = np.zeros(len(r_mosto) - 1)
for i in range(len(r_mosto) - 1):
    r1, r2 = r_mosto[i], r_mosto[i+1]
    r_med = 0.5 * (r1 + r2)

    u_med = abs(v_quente(r_med, raio_int, vel_max_mosto))
    dA = np.pi * (r2**2 - r1**2)

    w_mosto[i] = rho_mosto * u_med * dA

w_mosto /= np.sum(w_mosto)

w_agua = np.zeros(len(r_agua) - 1)
for i in range(len(r_agua) - 1):
    r1, r2 = r_agua[i], r_agua[i+1]
    r_med = 0.5 * (r1 + r2)

    u_med = abs(v_frio(r_med, raio_int, raio_ext, vel_med_agua))
    dA = np.pi * (r2**2 - r1**2)

    w_agua[i] = rho_agua * u_med * dA

w_agua /= np.sum(w_agua)

# ===== PRe-PROCESSAMENTO AXIAL (UMA uNICA VEZ)

```

```

=====

tol = 1e-4

# arredonda x para evitar problemas numericos
x_round = np.round(X, 6)

unique_x, inv = np.unique(x_round, return_inverse=True)
nsec = len(unique_x)

idx_mosto_por_x = [[] for _ in range(nsec)]
idx_agua_por_x = [[] for _ in range(nsec)]

for i in range(len(X)):
    g = inv[i]

    if abs(Y[i]) <= raio_int:
        idx_mosto_por_x[g].append(i)
    else:
        idx_agua_por_x[g].append(i)

# ----- # Loop Temporal # -----

for n in range(nIter):
    T_old = T.copy()
    b = M_calc.dot(T_old) + (1 - beta) * G_triangu.dot(T_old)

    # Aplicar condicues de contorno
    for i in cc:
        if fase == 1:
            if ccName[i] == 'agua':
                b[i] = t_init_agua
        else:
            if ccName[i] == 'agua':

```

```

        b[i] = t_init_agua
    if ccName[i] == 'mosto':
        b[i] = t_init_mosto

T = solver(b)

'''
# salvar VTK
point_data = {'temperatura': T}
arquivo_vtk = f"solucao-{n:06d}.vtk"
meshio.write_points_cells(
    arquivo_vtk,
    msh.points,
    msh.cells,
    point_data=point_data
)
'''

T_mosto = T[nos_saida_mosto]
T_agua = T[nos_saida_agua]

T_mistura_mosto = np.dot(w_mosto, 0.5 * (T_mosto[:-1] +
    T_mosto[1:]))
T_mistura_agua = np.dot(w_agua, 0.5 * (T_agua[:-1] + T_agua[1:]))

T_mistura_mosto_final = T_mistura_mosto
T_mistura_agua_final = T_mistura_agua

# salva historicos
tempos.append(n * dt)
T_mistura_hist.append((T_mistura_mosto, T_mistura_agua))
T_media_hist.append((np.mean(T_mosto), np.mean(T_agua)))

```

```

# ----- CONTROLE DE FASE -----

if fase == 1:

    if T_mistura_agua_old is not None:

        delta = abs(T_mistura_agua - T_mistura_agua_old)

        if delta < 1e-4:
            contador_conv_agua += 1
        else:
            contador_conv_agua = 0

        if contador_conv_agua >= 10:

            print("\nagua estabilizada. Iniciando escoamento do
                mosto.")

            fase = 2

            # -----
            # recalcula velocidades (agora com mosto)
            # -----

            for i, ri in enumerate(Y):
                r_abs = abs(ri)

                if r_abs <= raio_int:
                    Vel_x[i] = v_quente(r_abs, raio_int,
                        vel_max_mosto)

                elif raio_int < r_abs <= raio_ext:
                    Vel_x[i] = v_frio(r_abs, raio_int, raio_ext,
                        vel_med_agua)

```

```

else:
    Vel_x[i] = 0.0

# -----
# zera apenas matrizes convectivas
# -----
G_triang = lil_matrix((npoints, npoints), dtype='float')
K_estab = lil_matrix((npoints, npoints), dtype='float')

# -----
# remonta G e K_estab
# (mesmo loop de elementos)
# -----
for e in range(0,ne):

    vi, vj, vk = IEN[e]

    area = abs(0.5 * np.linalg.det([[1.0, X[vi], Y[vi]],
                                    [1.0, X[vj], Y[vj]],
                                    [1.0, X[vk], Y[vk]]]))

    bi = Y[vj] - Y[vk]
    bj = Y[vk] - Y[vi]
    bk = Y[vi] - Y[vj]
    ci = X[vk] - X[vj]
    cj = X[vi] - X[vk]
    ck = X[vj] - X[vi]

    v_elem_x = (Vel_x[vi] + Vel_x[vj] + Vel_x[vk]) / 3.0
    v_elem_y = 0.0

    r_elem = abs((Y[vi] + Y[vj] + Y[vk]) / 3.0)

    g_ex = (1.0/6.0) * np.array([[bi, bj, bk],

```

```

        [bi, bj, bk],
        [bi, bj, bk]])

g_ey = (1.0/6.0) * np.array([[ci, cj, ck],
                            [ci, cj, ck],
                            [ci, cj, ck]])

gelem = r_elem * (v_elem_x * g_ex + v_elem_y * g_ey)

kxelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ bi*bi, bi*bj,
                                     bi*bk],
                                    [ bj*bi, bj*bj,
                                     bj*bk],
                                    [ bk*bi, bk*bj,
                                     bk*bk]])

kyelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ ci*ci, ci*cj,
                                     ci*ck],
                                    [ cj*ci, cj*cj,
                                     cj*ck],
                                    [ ck*ci, ck*cj,
                                     ck*ck]])

kxyelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ bi*ci, bi*cj,
                                     bi*ck],
                                    [ bj*ci, bj*cj,
                                     bj*ck],
                                    [ bk*ci, bk*cj,
                                     bk*ck]])

k_estab_elem = r_elem * ((v_elem_x * dt)/2.0 *
                          (v_elem_x*kxelem + v_elem_y*kxyelem) \
                          + (v_elem_y * dt)/2.0 * (v_elem_x
                          * kxyelem + v_elem_y * kyelem))

```

```

for ilocal in range(3):
    iglobal = IEN[e, ilocal]
    for jlocal in range(3):
        jglobal = IEN[e, jlocal]
        G_triang[iglobal, jglobal] += gelem[ilocal,
            jlocal]
        K_estab[iglobal, jglobal] +=
            k_estab_elem[ilocal, jlocal]

G_triang = G_triang.tocsr()
K_estab = K_estab.tocsr()

# -----
# remonta sistema
# -----

A = M_calc + K_triang - beta * G_triang + K_estab
A = A.tolil()

for a in cc:
    if ccName[a] in ['agua', 'mosto']:
        A[a,:] = 0
        A[a,a] = 1.0

A = A.tocsc()
solver = factorized(A)

contador_conv_mosto = 0
T_mistura_mosto_old = None

for p in range(npoints):
    if abs(Y[p]) <= raio_int:
        T[p] = t_init_mosto

```

```

T_mistura_agua_old = T_mistura_agua

# ----- FASE 2 MOSTO -----

elif fase == 2:

    if T_mistura_mosto_old is not None:

        delta = abs(T_mistura_mosto - T_mistura_mosto_old)

        if delta < 5e-4:
            contador_conv_mosto += 1
        else:
            contador_conv_mosto = 0

        if contador_conv_mosto >= 10:

            print("\nConvergencia do mosto atingida!")
            print(f"Iteracao: {n}")
            print(f"| T mistura mosto | = {delta:.6e} C")

            point_data = {'temperatura': T}
            meshio.write_points_cells(
                "solucao_convergida.vtk",
                msh.points,
                msh.cells,
                point_data=point_data
            )
            break

T_mistura_mosto_old = T_mistura_mosto

```

```

end_time = time.time()
tempo_total = end_time - start_time
print(f"Tempo total do bloco transiente: {tempo_total:.3f} segundos")
print("\nResumo termico final:")
print(f"T Farmaco = {t_init_mosto - T_mistura_mosto_final:.3f} C")
print(f"T Farmaco = {T_mistura_mosto_final:.2f} C")
print(f"T agua = {T_mistura_agua_final - t_init_agua:.3f} C")
print(f"T agua = {T_mistura_agua_final:.2f} C")

# ----- # Grafico T mistura #
# -----

T_misto = [t[0] for t in T_mistura_hist]
T_agua = [t[1] for t in T_mistura_hist]

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(tempos, T_misto, '-r', label='Saida do Mosto')
plt.plot(tempos, T_agua, '-b', label='Saida da agua')
plt.xlabel("Tempo [s]")
plt.ylabel("Temperatura de saida [C]")
plt.title("Evolucao das Temperaturas de Saida ao Longo do Tempo")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig("T_mistura_saida.png", dpi=300)
plt.show()

# ----- Definicao da secao de extracao do raio #
# -----

x_secao = 1
tol = 1e-3
mask = np.isclose(X, x_secao, atol=tol)
r_nodes = np.abs(Y[mask])
u_nodes = Vel_x[mask]

```

```

x_secao_agua = 0
tol = 1e-3
mask1 = np.isclose(X, x_secao_agua, atol=tol)
r_nodes = np.abs(Y[mask1])
u_nodes = Vel_x[mask1]

# ----- Ordenacao da velocidade em funcao do raio #
# -----

ordem = np.argsort(r_nodes)
r_sorted = r_nodes[ordem]
u_sorted = u_nodes[ordem]

plt.figure(figsize=(6,5))
plt.plot(u_sorted, r_sorted, '-', linewidth=2, label='Perfil de
    Velocidade')
# interface entre os fluidos
plt.axhline(raio_int, linestyle='--', color='gray',
    label='Interface Mostoagua')
plt.xlabel("Velocidade axial $u_x$ [m/s]")
plt.ylabel("Raio r [m]")
plt.title("Perfil radial de velocidade extraido da malha")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.savefig("perfil_velocidade_malha.png", dpi=300)
plt.show()

# ----- EXTRAcao DA TEMPERATURA EM x = 1 -----

# ===== MOSTO (x = L) =====
mask_mosto = np.isclose(X, 1, atol=tol) & (np.abs(Y) <= raio_int)

```

```

r_mosto_secao = np.abs(Y[mask_mosto])
T_mosto_secao = T[mask_mosto]

ordem_mosto = np.argsort(r_mosto_secao)
r_mosto_secao = r_mosto_secao[ordem_mosto]
T_mosto_secao = T_mosto_secao[ordem_mosto]

# ===== aGUA (x = 0) =====
mask_agua = np.isclose(X, 0, atol=tol) & (np.abs(Y) > raio_int)

r_agua_secao = np.abs(Y[mask_agua])
T_agua_secao = T[mask_agua]

ordem_agua = np.argsort(r_agua_secao)
r_agua_secao = r_agua_secao[ordem_agua]
T_agua_secao = T_agua_secao[ordem_agua]

# ----- GRaFICO -----

plt.figure(figsize=(6,5))

plt.plot(T_mosto_secao, r_mosto_secao, 'r-', linewidth=2,
         label='Mosto')
plt.plot(T_agua_secao, r_agua_secao, 'b-', linewidth=2, label='agua')

plt.axhline(raio_int, linestyle='--', color='k',
            label='Interface mostoagua')

plt.xlabel("Temperatura [C]")
plt.ylabel("Raio r [m]")
plt.title("Perfil Radial de Temperatura")
plt.grid(True)

```

```

plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.savefig("Perfil de Temperatura.png", dpi=300)
plt.show()

# ===== PERFIL AXIAL TEMPERATURA DE MISTURA (RaPIDO +
CORRETO) =====

T_mosto_axial = []
T_agua_axial = []
x_plot = []

absY = np.abs(Y)

for g, xk in enumerate(unique_x):

    # ----- MOSTO -----
    idx_m = idx_mosto_por_x[g]

    if len(idx_m) == 0:
        continue

    r_m = absY[idx_m]
    u_m = Vel_x[idx_m]
    T_m = T[idx_m]

    u_m = np.maximum(u_m, 0.0)

    # pesos fisicos nodais
    # ordena por raio
    ordem = np.argsort(r_m)

    r = r_m[ordem]
    u = u_m[ordem]

```

```

Tloc = T_m[ordem]

w = []
Tbar = []

for i in range(len(r)-1):
    r1, r2 = r[i], r[i+1]
    rmed = 0.5*(r1+r2)

    umed = 0.5*(u[i]+u[i+1])
    Tmed = 0.5*(Tloc[i]+Tloc[i+1])

    dA = np.pi*(r2**2 - r1**2)

    w.append(rho_mosto*umed*dA)
    Tbar.append(Tmed)

w = np.array(w)

Tm = np.sum(w*np.array(Tbar))/np.sum(w)

# ----- aGUA -----

idx_a = idx_agua_por_x[g]

if len(idx_a) < 2:
    continue

r_a = absY[idx_a]
u_a = np.abs(Vel_x[idx_a])
T_a = T[idx_a]

ordem = np.argsort(r_a)

```

```

r = r_a[ordem]
u = u_a[ordem]
Tloc = T_a[ordem]

w = []
Tbar = []

for i in range(len(r)-1):
    r1, r2 = r[i], r[i+1]

    umed = 0.5*(u[i]+u[i+1])
    Tmed = 0.5*(Tloc[i]+Tloc[i+1])

    dA = np.pi*(r2**2 - r1**2)

    w.append(rho_agua*umed*dA)
    Tbar.append(Tmed)

w = np.array(w)

if np.sum(w) == 0.0:
    continue

Ta = np.sum(w*np.array(Tbar)) / np.sum(w)

T_mosto_axial.append(Tm)
T_agua_axial.append(Ta)
x_plot.append(xk)

T_mosto_axial = np.array(T_mosto_axial)
T_agua_axial = np.array(T_agua_axial)
x_plot = np.array(x_plot)

```

```
# ordena
ordem = np.argsort(x_plot)
x_plot = x_plot[ordem]
T_mosto_axial = T_mosto_axial[ordem]
T_agua_axial = T_agua_axial[ordem]

s = x_plot.copy()

# realinha a agua no sentido do mosto
s_agua = x_plot.copy()

plt.figure(figsize=(7,5))

plt.plot(x_plot, T_mosto_axial, 'r-', label='Mosto')
plt.plot(s_agua, T_agua_axial, 'b-', label='agua')

plt.xlabel("Comprimento do Chiller [m]")
plt.ylabel("Temperatura [C]")
plt.title("Distribuicao da Temperatura ao Longo do Comprimento")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Apêndice B

Codigo-Fonte para Escoamento Interno

Este apêndice apresenta o código-fonte desenvolvido e utilizado para a validação numérica do escoamento interno com parede aquecida. O modelo computacional foi implementado por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando os mecanismos de condução e convecção térmica em regime transiente.

O código apresentado a seguir foi empregado na etapa de validação do modelo numérico, por meio da comparação dos resultados obtidos com soluções clássicas disponíveis na literatura. Adicionalmente, foi realizada a verificação da convergência de malha para o domínio analisado, avaliando-se a influência do refinamento espacial sobre a solução térmica e assegurando a consistência e a confiabilidade dos resultados numéricos.

```
import meshio
import numpy as np
from scipy.sparse import lil_matrix
from scipy.sparse.linalg import factorized
import matplotlib.pyplot as plt
import time
import os

# ----- # Parametros da simulacao #
```

```

-----
t_init_agua = 27.0
t_constante = 67.0
q = 0

# ----- # Parametros da Geometria #
-----

raio_ext = 0.025
l = 25.0
vazao = 0.05

# ----- # Propriedades Termicas #
-----

k = 0.628
cp = 4178
rho = 1000/1.007
alpha = k/(rho*cp)

# ----- # Velocidade de Poiseuille #
-----

vel_media = vazao / (rho * np.pi * raio_ext * raio_ext)
vel_max = vel_media * 2

#----- # Parametros temporais
#-----

nIter = 500000
dt = 0.5
beta = 0.5
tempos_all = []
T_mistura_all = []
gradiente_total = []

```

```

y_sorted_all = []
tol_stop = 1e-3
malhas_geradas = 6

for a in range(1, malhas_geradas):

    tempos = []
    T_mistura_hist = []
    T_mistura_old = None
    start_time = time.time()
    caminho_msh = f"F:/Escoamento Interno/Caso {a}/teste.msh"
    pasta_msh = os.path.dirname(caminho_msh)

    print(f"\n=== Processando malha {a} ===")
    # ----- # Importando geometria #
    # -----
    msh = meshio.read(f"F:/Escoamento Interno/Caso {a}/teste.msh")
    X = msh.points[:,0]
    Y = msh.points[:,1]
    IEN = msh.cells[1].data
    IENbound = msh.cells[0].data
    IENboundTypeElem = list(msh.cell_data["gmsh:physical"][0] - 1)
    boundNames = list(msh.field_data.keys())
    IENboundElem = [boundNames[elem] for elem in IENboundTypeElem]
    npoints = len(X)
    ne = IEN.shape[0]

    # Lista de nos do contorno
    cc = np.unique(IENbound.reshape(IENbound.size))
    ccName = [[] for _ in range(npoints)]
    for elem in range(len(IENbound)):
        ccName[ IENbound[elem][0] ] = IENboundElem[elem]
        ccName[ IENbound[elem][1] ] = IENboundElem[elem]

```

```

# ----- # Inicializando matrizes e vetores #
-----
Vel_y = np.zeros((npoints),dtype = 'float')
Vel_x = np.zeros((npoints),dtype = 'float')
M_triang = lil_matrix((npoints,npoints), dtype='float')
K_triang = lil_matrix((npoints,npoints), dtype='float')
G_triang = lil_matrix((npoints,npoints), dtype='float')
K_estab = lil_matrix((npoints, npoints), dtype = 'float')
Pe_elements = np.zeros(ne)

# ----- # Calculo da Velocidade #
-----
def vel_x(Y, raio_ext, vel_max):
    return vel_max * (1 - (Y/raio_ext)**2)

for i, ri in enumerate(Y):
    r_abs = abs(ri)
    Vel_x[i] = vel_x(r_abs, raio_ext, vel_max)

# ----- # Montagem das matrizes #
-----
for e in range(0,ne):
    vi, vj, vk = IEN[e]

    area = abs(0.5*np.linalg.det([[1.0, X[vi], Y[vi]],
                                  [1.0, X[vj], Y[vj]],
                                  [1.0, X[vk], Y[vk]]]))

    bi = Y[vj] - Y[vk]
    bj = Y[vk] - Y[vi]
    bk = Y[vi] - Y[vj]
    ci = X[vk] - X[vj]

```

```

cj = X[vi] - X[vk]
ck = X[vj] - X[vi]

# ----- # Velocidade #
-----

v_elem_x = (Vel_x[vi] + Vel_x[vj] + Vel_x[vk]) / 3.0
v_elem_y = (Vel_y[vi] + Vel_y[vj] + Vel_y[vk]) / 3.0
r_elem = abs(Y[vi] + Y[vj] + Y[vk]) / 3.0

# ----- # Calculo de Peclet #
-----

l01 = np.hypot(X[vi]-X[vj], Y[vi]-Y[vj])
l12 = np.hypot(X[vj]-X[vk], Y[vj]-Y[vk])
l20 = np.hypot(X[vk]-X[vi], Y[vk]-Y[vi])
h_elem = max(l01, l12, l20) # <-- h_max por elemento (substitui
    diametro equivalente)

# --- Numero de Peclet elementar (com h_max) ---
Pe_elem = (np.sqrt(v_elem_x**2 + v_elem_y**2) * h_elem) / (2.0 *
    alpha)
Pe_elements[e] = Pe_elem

# ----- # Matrices Elementares #
-----

# Matrices de Rigidez
kxelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ bi*bi, bi*bj, bi*bk],
    [ bj*bi, bj*bj, bj*bk],
    [ bk*bi, bk*bj, bk*bk]])

kyelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ ci*ci, ci*cj, ci*ck],
    [ cj*ci, cj*cj, cj*ck],
    [ ck*ci, ck*cj, ck*ck]])

```

```

kxyelem = (1.0/(4.0*area))*np.array([[ bi*ci, bi*cj, bi*ck],
                                     [ bj*ci, bj*cj, bj*ck],
                                     [ bk*ci, bk*cj, bk*ck]])

kelem = alpha * r_elem * (kxelem + kyelem)

#Matriz de Massa
melem = r_elem * (area/12) * np.array([[2.0, 1.0, 1.0],
                                       [1.0, 2.0, 1.0],
                                       [1.0, 1.0, 2.0]])

# Matrices de Conveccao
g_ex = (1.0/6.0) * np.array([[bi, bj, bk],
                             [bi, bj, bk],
                             [bi, bj, bk]])

g_ey = (1.0/6.0) * np.array([[ci, cj, ck],
                             [ci, cj, ck],
                             [ci, cj, ck]])

gelem = r_elem * (v_elem_x * g_ex + v_elem_y * g_ey)

# Matriz de Estabilizacao
k_estab = r_elem * ((v_elem_x * dt)/2.0 * (v_elem_x*kxelem +
      v_elem_y*kxyelem) \
      + (v_elem_y * dt)/2.0 * (v_elem_x *
      kxyelem + v_elem_y * kyelem))

# Assembly
for ilocal in range(3):
    iglobal = IEN[e, ilocal]
    for jlocal in range(3):

```

```

        jglobal = IEN[e, jlocal]
        K_triang[iglobal, jglobal] += kelem[ilocal, jlocal]
        M_triang[iglobal, jglobal] += melem[ilocal, jlocal]
        G_triang[iglobal, jglobal] += gelem[ilocal, jlocal]
        K_estab[iglobal, jglobal] += k_estab[ilocal, jlocal]

# apos terminar a montagem dos elementos:
Pe_min = Pe_elements.min()
Pe_max = Pe_elements.max()
Pe_mean = Pe_elements.mean()
print(f"Pe min: {Pe_min:.3f}, Pe max: {Pe_max:.3f}, Pe medio:
      {Pe_mean:.3f}")

# calculo de CFL / Courant aproximado (usando h_min para seguranca)
# Courant = v_max * dt / h_min_element
edge_lengths = []
for e in range(ne):
    vi, vj, vk = IEN[e]
    l01 = np.hypot(X[vi]-X[vj], Y[vi]-Y[vj])
    l12 = np.hypot(X[vj]-X[vk], Y[vj]-Y[vk])
    l20 = np.hypot(X[vk]-X[vi], Y[vk]-Y[vi])
    edge_lengths.append(min(l01, l12, l20)) # h_min por elemento (usado
      p/ CFL)
h_min = min(edge_lengths)
v_max_elem = np.max(np.sqrt(Vel_x**2 + Vel_y**2))
courant = v_max_elem * dt / h_min
print(f"h_min ~ {h_min:.6f}, v_max ~ {v_max_elem:.6f}, Courant
      {courant:.6f}")

print('numero de elementos e ', len(IEN)) # numero de elementos
print('numero de nos e ', len(Y)) # numero de nos

M_triang = M_triang.tocsr()

```

```

K_triang = K_triang.tocsr()
G_triang = G_triang.tocsr()
K_estab = K_estab.tocsr()

# ----- # Matrices do sistema #
# -----

M_calc = (M_triang/dt)
A = M_calc - beta * G_triang + K_estab + K_triang
A = A.tolil()
b = np.zeros(npoints, dtype = 'float')

# ----- # Inicializa temperatura #
# -----

T = t_init_agua * np.ones(npoints)

for p in range(npoints):
    if ccName[p]=='parede':
        b[p] = t_constante
    if ccName[p]=='entrada':
        b[p] = t_init_agua

for node in cc:
    if ccName[node] in ['entrada', 'parede']:
        A[node,:] = 0
        A[node,node] = 1.0

A = A.tocsc()
solve = factorized(A)

print("Nomes dos contornos:", set([str(name) for name in ccName if
    name != []]))

```

```

# ===== NOS DA SAiDA =====

tol = 5e-3

# saida em x = L
mask_saida = np.isclose(X, 1, atol=tol)

nos_saida = np.where(mask_saida)[0]

# ordenacao radial
ordem_saida = np.argsort(np.abs(Y[nos_saida]))

nos_saida = nos_saida[ordem_saida]

# coordenada radial
r_saida = np.abs(Y[nos_saida])

entrada_nodes = [i for i, name in enumerate(ccName) if name ==
                 'entrada']
parede_nodes = [i for i, name in enumerate(ccName) if name == 'parede']

# ===== PESOS =====

w_saida = np.zeros(len(r_saida) - 1)

for i in range(len(r_saida) - 1):

    r1, r2 = r_saida[i], r_saida[i+1]

    r_med = 0.5 * (r1 + r2)

    u_med = abs(vel_x(r_med, raio_ext, vel_max))

    dA = np.pi * (r2**2 - r1**2)

```

```

w_saida[i] = rho * u_med * dA

w_saida /= np.sum(w_saida)

# ----- # Loop temporal #
# -----

for n in range(nIter):

    T_old = T.copy()

    b = M_calc.dot(T_old) + (1-beta) * G_triang.dot(T_old)

    # Condições de contorno
    b[entrada_nodes] = t_init_agua
    b[parede_nodes] = t_constante

    T = solve(b)

    # ===== Temperatura de mistura =====

    T_saida = T[nos_saida]

    T_mistura = np.dot(
        w_saida,
        0.5 * (T_saida[:-1] + T_saida[1:])
    )

    # salvar historico
    T_mistura_hist.append(T_mistura)
    tempos.append((n+1)*dt)

    # ===== Critério de parada =====

```

```

if T_mistura_old is not None:

    erro = abs(T_mistura - T_mistura_old)

    if erro < tol_stop:

        print(f"Convergencia atingida no passo {n+1}")
        print(f"Tempo = {(n+1)*dt:.4f} s")
        print(f"T = {erro:.6e} C")

        break

    T_mistura_old = T_mistura

tempos_all.append(tempos.copy())
T_mistura_all.append(T_mistura_hist.copy())

print(f"Malha {a}: Temperatura de saida = {T_mistura_hist[-1]}")
end_time = time.time()
tempo_total = end_time - start_time
print(f"Tempo total: {tempo_total:.2f} segundos")

# ----- # Grafico 1 T mistura #
# -----

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(tempos, T_mistura_hist, '-r', label='Saida do Fluido')
plt.xlabel("Tempo [s]")
plt.ylabel("Temperatura de saida [C]")
plt.title("Evolucao da Temperatura de Saida ao Longo do Tempo")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig(f"T_mistura_saida_Caso_{a}.png", dpi=300)

```

```
plt.show()

# ----- # Grafico 1 T mistura dos 4 casos juntos #
# -----

plt.figure(figsize=(8,5))
for i in range(len(tempos_all)):
    plt.plot(tempos_all[i], T_mistura_all[i], linewidth=1, label=f'Case
        {i+1}')
plt.xlabel("Tempo [s]")
plt.ylabel("Temperatura ponderada de saida [C]")
plt.title("Evolucao da temperatura ponderada de saida - Comparativo entre
    os 5 casos")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.tight_layout()
plt.savefig("T_mistura_saida_todos_os_casos.png", dpi=300)
plt.show()
```
