



ANÁLISE DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR ESCOAMENTO NO INTERIOR
DE TUBOS BIAPOIADOS UTILIZANDO MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS

Victor Rieger Queiroz Gonçalves

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro

Julho de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO



Departamento de Engenharia Mecânica

DEM/POLI/UFRJ

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR ESCOAMENTO NO INTERIOR
DE TUBOS BIAPOIADOS UTILIZANDO MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS

Victor Rieger Queiroz Gonçalves

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, PhD.

Prof. , D.Sc.

Prof. , Ph.D.

Prof. , D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2022

Rieger Queiroz Gonçalves, Victor

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR
ESCOAMENTO NO INTERIOR DE TUBOS
BIAPOIADOS UTILIZANDO MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS/ Victor Rieger Queiroz
Gonçalves. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica,
2022.

XVI, 103 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/
Curso de Engenharia Mecânica, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 70 – 72.

1. Vibrações. 2. Mecânica dos Fluidos. 3. Interação
fluido-estrutura. I. Rabello dos Anjos, Gustavo. II.
Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de
Engenharia Mecânica. III. ANÁLISE DE VIBRAÇÕES
INDUZIDAS POR ESCOAMENTO NO INTERIOR DE
TUBOS BIAPOIADOS UTILIZANDO MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS.

Dedico este trabalho à minha família, em especial à Renata, Marcelo e Arthur. Também aos meus amigos da graduação, à Minerva Baja e à todos que me ajudaram na graduação na UFRJ.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me ajudaram e estiveram presentes na minha graduação na UFRJ.

Deixo aqui um agradecimento especial à minha família destinado ao Marcelo, à Renata e ao Arthur, que sempre zelaram por mim e me incentivaram em todos os momentos da minha vida.

Agradeço também aos amigos que fiz durante a graduação e que foram muito importantes até esse momento final de encerramento de ciclo, em especial à equipe Minerva Baja por ter proporcionado a minha primeira experiência na Engenharia Mecânica com uma abordagem mais profissional de projetos, simulações, testes, fabricações mecânica, etc.

Por fim, quero agradecer ao meu orientador Gustavo Rabello por ter me auxiliado com o tema de simulações computacionais e por ser uma referência nas questões de técnica e didática.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR ESCOAMENTO NO INTERIOR
DE TUBOS BIAPOIADOS UTILIZANDO MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS

Victor Rieger Queiroz Gonçalves

Julho/2022

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Programa: Engenharia Mecânica

O presente projeto de graduação consiste no desenvolvimento de um código numérico em linguagem *Python* que utiliza o Método de Elementos Finitos para analisar as vibrações induzidas pela escoamento interno em tubos biapoiados. Esse trabalho é de grande relevância para a indústrias do petróleo e gás, nuclear e aeroespacial, pois são sistemas que operam com velocidades escoamento elevadas por períodos relativamente longos e isso contribui para a diminuição das frequências naturais dos sistemas de tubulações podendo acarretar em amplitudes de vibrações catastróficas. De início, é estudado um modelo estático mais simples da viga de Euler-Bernoulli, levando em consideração apenas a rigidez tubo e o peso do sistema, para validar modelo numérico que utiliza polinômios Hermites nas funções de forma, 2 graus de liberdade (deslocamento vertical e rotação) por nó e 2 nós por elemento. Esse modelo é comparado com as soluções analíticas para verificar as semelhanças entre os resultados e ordem de decaimento do erro com o aumento do número de elementos. Em seguida, é construído um modelo baseado na viga de Euler-Bernoulli que leva em consideração a inércia do sistema (massa do fluido e do tubo), rigidez do tubo, rigidez da força centrífuga e dissipação da força de Coriolis, os quais esses dois

últimos termos estão relacionados com o movimento do fluido. Além disso, também é considerado um modelo modificado da fundação de Winkler que é constituído de rigidez e dissipação. Como isso é possível analisar o comportamento das frequências naturais com a variação da velocidade de escoamento e entender como a rigidez e dissipação da fundação, comprimento do tubo e densidade do fluido afetam a faixa de estabilidade do sistema.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

ANALYSIS OF VIBRATION INDUCED BY INTERNAL FLOW IN A
BI-SUPPORTED PIPE USING FINITE ELEMENT METHOD

Victor Rieger Queiroz Gonçalves

July/2022

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

The present graduation thesis consists in the development of a numerical code in Python language that uses the Finite Element Method to analyze the vibrations induced by the internal flow in bisupported tubes. This work is of great relevance for the oil and gas industry, nuclear power plants and aerospace applications, since those systems operate with high flow velocities for relatively long periods and this contributes to the decrease of the natural frequencies of the piping systems, which can lead to catastrophic vibration amplitudes. At first, a simpler static model of the Euler-Bernoulli beam is studied, taking into account the tube stiffness and the weight of the system with a uniform load, to validate a numerical model that uses Hermite polynomials in the shape functions, 2 degrees of freedom (vertical displacement and rotation) per node and 2 nodes per element. Which is compared with the analytical solutions to verify the similarity in behavior and order of error decay related with the increase of the number of elements. Then, an Euler-Bernoulli model is built that takes into account the system inertia (fluid and pipe mass), pipe stiffness, centrifugal force stiffness and Coriolis force dissipation, in which these last two terms are related to fluid motion. In addition, it is also considered a modified model of the Winkler foundation that is constituted of stiffness and dissipation. As a

result, it is possible to analyze the behavior of natural frequencies with the variation of flow velocity and how the stiffness and dissipation of the foundation, length and density of the fluid affect the stability range of the system.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
Lista de Abreviaturas	xvi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Organização da tese	2
2 Revisão Bibliográfica	3
2.1 Tubos de transporte de fluidos	3
2.2 Interação Fluido-Estrutura	14
2.3 Método de Elementos Finitos	15
3 Metodologia	22
3.1 Modelo Teórico	22
3.1.1 Equação de movimento sem a fundação	22
3.1.2 Equação de movimento com a fundação Winkler	25
3.2 Modelo Numérico	27
3.2.1 Função de forma	27
3.2.2 Classificação e derivação das energias do sistema no domínio elementar	28
3.2.3 Matrizes elementares	34
3.2.4 Matrizes globais	39
3.2.5 Condições de contorno	39
3.3 Análise Modal	41

3.4	Análise Transiente & Permanente	43
3.4.1	Amplitudes de vibrações em regime transiente	43
3.4.2	Amplitudes de vibrações em regime permanente no domínio da frequência	44
4	Resultados e Discussões	47
4.1	Validação dos elementos e funções de forma através de um sistema de carregamento uniformemente distribuído	47
4.2	Influência da velocidade de escoamento e outros parâmetros no com- portamento das frequências naturais do sistema	54
4.2.1	Velocidade de escoamento vs Frequências naturais - 3 primei- ros modos fundamentais de vibração	54
4.2.2	Influência de parâmetros do sistema na frequência natural	56
4.3	Resultados das análises transiente & permanente	62
4.3.1	Resultados da análise transiente	62
4.3.2	Resultados da análise permanente	66
5	Conclusões	68
	Referências Bibliográficas	70
A	Código Fonte - Carregamento uniformemente distribuído	73
B	Código Fonte - Análise das frequências naturais, velocidades críticas e estabilidade do sistema	84

Lista de Figuras

2.1	Lançamento de um foguete	6
2.2	Injetor de combustível básico	7
2.3	Propulsor de foguetes	8
2.4	Tubulações das turbinas	8
2.5	Plataforma de petróleo e gás off-shore	9
2.6	Mangueiras de abastecimento de petroleiros numa plataforma off-shore	9
2.7	Mangueiras com hidrocarbonetos em solo	10
2.8	Mangueiras de transição poço-oleoduto	10
2.9	Refinaria de petróleo	11
2.10	Tubulações numa refinaria	11
2.11	Usina nuclear	12
2.12	Conexões entre as máquinas numa usina nuclear	12
2.13	Reator de fusão	13
2.14	Tubulações de alguns dispositivos	13
2.15	Elementos triangulares (a) e quadriláteros (b) genéricos [1]	16
2.16	Malha estruturada (a) e não estruturada (b) genéricas [2]	17
2.17	Funções de forma em bloco genéricas [2]	18
2.18	Elemento de viga de Euler-Bernoulli de 2 nós [3]	19
2.19	Funções de forma Hermite C^1 para uma viga de 2 nós [3]	20
2.20	Montagem das matrizes globais [2]	21
3.1	Tubo condutor de fluido simplesmente apoiado [4]	23
3.2	Forças e Momentos atuantes no sistema reduzido [4] (a)Fluido (b)Tubo	23
3.3	Representação do modelo de fundação Winkler modificado [5]	26

3.4	Deslocamentos nodais do elemento de viga mostrados em sentido positivo	27
3.5	Deslocamentos da viga submetida à flexão	29
3.6	Fluido escoando numa curvatura qualquer	31
3.7	Matriz global de inércia para n elementos (sem redução)	39
3.8	Tipos de apoio	40
3.9	Matriz global de inércia de n elementos de uma viga biapoiada	40
4.1	Carregamento uniformemente distribuído num tubo biapoiado	47
4.2	Deflexão ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica	49
4.3	Rotação ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica	50
4.4	Força cortante ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica . . .	50
4.5	Momento fletor ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica . . .	51
4.6	Convergência do erro absoluto do deslocamento	52
4.7	Convergência do erro percentual do deslocamento	52
4.8	Ordem de decaimento do erro - convergência do erro absoluto do deslocamento na escala Log-Log	53
4.9	Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - 3 primeiros modos fundamentais de vibração	54
4.10	Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência da rigidez da fundação	56
4.11	Verificação com a referência [5] - influência da rigidez da fundação . .	57
4.12	Dados da análise da influência da viscosidade da fundação na frequência natural e velocidade crítica	58
4.13	Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência da viscosidade da fundação	58
4.14	Verificação com a referência [5] - influência da viscosidade da fundação	59
4.15	Dados da análise da influência do comprimento do tubo na frequência natural e velocidade crítica	60
4.16	Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência do comprimento do tubo	60
4.17	Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência da densidade do fluido	61

4.18	Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 0.0 m/s . .	63
4.19	Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 20.0 m/s .	63
4.20	Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 40.0 m/s .	64
4.21	Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 50.0 m/s .	64
4.22	Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 60.0 m/s .	65
4.23	Respostas em frequência para velocidade de 0.0 <i>m/s</i>	66
4.24	Resposta em frequência para velocidade de 50.0 <i>m/s</i>	67

Lista de Tabelas

4.1	Dados do modelo simplificado sob carregamento uniformemente distribuído	53
4.2	Dados da análise da frequência natural para diferentes modos de vibração	55
4.3	Dados da análise da influência da rigidez da fundação na frequência natural e velocidade crítica	57
4.4	Dados da análise da influência da densidade do fluido na frequência natural e velocidade crítica	62
4.5	Dados utilizados na análise da resposta transiente para diferentes velocidades de escoamento	65
4.6	Dados utilizados na análise da resposta permanente no domínio da frequência	67

Lista de Abreviaturas

FSI	Interação fluido-estrutura (Fluid-structure interaction), p. 2
GDLs	Graus de liberdade, p. 40
MEF	Método dos elementos finitos, p. 2

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Os tubos de transporte de fluido tem um papel vital nas áreas de engenharia, particularmente em sua aplicação na engenharia naval, indústria de petróleo e gás, transporte de petróleo e abastecimento de água municipal [6, 7]. No entanto, a interação entre o fluido e a estrutura muitas vezes causa problemas de vibração nas tubulações, o que resulta em quebra de máquinas, danos nas tubulações, falhas por fadiga e incêndios e explosões em plantas petroquímicas. Conseqüentemente, uma enorme perda econômica devido à vibrações em dutos é sofrida até mesmo em países desenvolvidos a cada ano. Os danos são estimados em até US\$ 10 bilhões por ano [7]. Portanto, as pesquisas sobre as características de vibração de dutos considerando o efeito da interação fluido-estrutura, como a frequência natural, têm despertado o interesse de pesquisadores devido a sua grande importância de engenharia e econômica. Os tubos de transporte de fluido também são considerados como um dos sistemas mais simples dos problemas de interação fluido-estrutura, sendo capaz de descrever satisfatoriamente o comportamento dinâmico do duto [8].

Nesse trabalho, tem-se com propósito a investigação das vibrações em tubo de extremidades apoiadas causadas por escoamento de fluido no seu interior. Para isso, é feito um modelo numérico capaz de simular o comportamento dinâmico desse sistema de transporte.

1.2 Organização da tese

Este trabalho possui uma estrutura desenvolvida de modo que no capítulo 2 são feitas as revisões bibliográficas sobre a visão geral dos tubos de transporte de fluidos, a base da interação fluido-estrutura (FSI) e a história do desenvolvimento do Método de Elementos Finitos (MEF) e suas formulações dirigidas para esse trabalho.

No capítulo 3, é feita a fundamentação teórica do problema e a metodologia do MEF, a partir da modelagem das equações de governos através do balanço de forças e conservação das energias. Ainda dentro desse capítulo, essas equações serão utilizadas como a base para construir os mecanismos de obtenção das frequências naturais, modos de vibração, respostas transientes e repostas permanentes no domínio da frequência. Os códigos em Python desenvolvidos para tal função estão nos anexos A e B.

O capítulo 4 utiliza os mecanismos desenvolvidos no capítulo anterior para plotar a evolução das frequências naturais e amplitudes de oscilação a partir da variação de parâmetros do sistema e forçamentos externos. Alguns desses gráficos são comparados com outros textos acadêmicos para validar os resultados obtidos.

Por fim, no capítulo 5 os resultados obtidos para diferentes variações dos parâmetros do sistema são agrupados e avaliados criticamente. Também é averiguado que todos as análises possuem coerência entre si. Por fim é comentado sobre a importância desses estudos para as aplicação da indústria e a continuação do desenvolvimento de estudos para esse tema de FSI em tubo com escoamento interno.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Tubos de transporte de fluidos

Um tubo é uma seção tubular ou cilindro oco, geralmente, mas não necessariamente, de seção transversal circular, usado principalmente para transportar substâncias que podem fluir – líquidos e gases (fluidos), lamas, pós e massas de pequenos sólidos. Também pode ser usado para aplicações estruturais; o tubo oco é muito mais rígido por unidade de peso do que os membros sólidos.

Os tubos são feitos de muitos tipos de materiais, incluindo cerâmica, vidro, fibra de vidro, muitos metais, concreto e plástico. No passado, madeira e chumbo eram comumente usados.

Normalmente, a tubulação metálica é feita de aço ou ferro, como aço preto, aço carbono, aço inoxidável, aço galvanizado, latão e ferro dúctil. A tubulação à base de ferro está sujeita à corrosão se usada em um fluxo de água altamente oxigenado. Tubos de alumínio podem ser utilizados onde o ferro é incompatível com o fluido de serviço ou onde o peso é uma preocupação; o alumínio também é usado para tubos de transferência de calor, como em sistemas de refrigeração. A tubulação de cobre é popular para sistemas de encanamento de água doméstica (potável); cobre pode ser usado onde a transferência de calor é desejável (ou seja, radiadores ou trocadores de calor). As ligas de aço inonel, cromo molibdênio e titânio são usadas em tubulações de alta temperatura e pressão em instalações de processo e energia. Ao especificar ligas para novos processos, os problemas conhecidos de fluência e efeito de sensibilização devem ser levados em consideração. A tubulação de chumbo ainda

é encontrada em antigos sistemas de distribuição de água doméstica e outros, mas não é mais permitida para novas instalações de tubulação de água potável devido à sua toxicidade.

A tubulação de plástico é amplamente utilizada por seu peso leve, resistência química, propriedades não corrosivas e facilidade de fazer conexões. Em muitos países, os tubos de PVC representam a maioria dos materiais de tubos usados em aplicações municipais enterradas para distribuição de água potável e redes de esgoto [9]. A tubulação pode ser feita de concreto ou cerâmica, geralmente para aplicações de baixa pressão, como escoamento por gravidade ou drenagem. As tubulações para esgoto e águas pluviais são predominantemente feitas de concreto, concreto armado ou argila vitrificada.

A instalação do tubo geralmente é mais cara do que o material e uma variedade de ferramentas, técnicas e peças especializadas foram desenvolvidas para ajudar nisso. O tubo é geralmente entregue a um cliente ou local de trabalho como "varas" ou comprimentos de tubo (normalmente 20 pés (6,1 m), chamados de comprimento aleatório único) ou são pré-fabricados com cotovelos, tês e válvulas em um carretel de tubo pré-fabricado.

Os tubos geralmente são apoiados por baixo ou pendurados por cima (mas também podem ser apoiados pela lateral), usando dispositivos chamados suportes de tubo. Os suportes podem ser tão simples como um calço de tubo que é semelhante a metade de uma viga em I soldada ao fundo do tubo; eles podem ser "pendurados" usando uma manilha, ou com dispositivos do tipo trapézio chamados cabides de tubos. Suportes de tubos de qualquer tipo podem incorporar molas, amortecedores, amortecedores ou combinações desses dispositivos para compensar a expansão térmica ou para fornecer isolamento de vibração, controle de choque ou excitação de vibração reduzida do tubo devido ao movimento do terremoto. Alguns amortecedores são simplesmente amortecedores de fluido, mas outros amortecedores podem ser dispositivos hidráulicos ativos que possuem sistemas sofisticados que agem para amortecer deslocamentos de pico devido a vibrações impostas externamente ou choques mecânicos.

Os tubos são comumente unidos por soldagem, usando tubos e conexões rosqueadas; vedando a conexão com um composto de rosca de tubo, fita de vedação de

rosca de politetrafluoretileno (PTFE), oakum ou corda de PTFE, ou usando um acoplamento mecânico. Se a desconexão frequente for necessária, flanges de tubo com gaxeta ou conexões de união fornecem melhor confiabilidade do que roscas. Alguns tubos de paredes finas de material dúctil, como os tubos de água menores de cobre ou plástico flexível encontrados em residências para fabricantes de gelo e umidificadores, por exemplo, podem ser unidos com conexões de compressão.

Algumas das principais aplicações de tubos que transportam fluidos a uma variada gama de velocidades de escoamento estão relacionadas com as indústrias aeroespacial, nuclear, de óleo e gás, etc. Para aplicações aeroespaciais, a Figura 2.1 representa um lançamento de um foguete e para que isso ocorra corretamente diversos sistemas e componentes devem funcionar dentro dos parâmetros dinâmicos e estruturais projetados, como por exemplo as mangueiras de um injetor de combustível básico mostrado na Figuras 2.2 e as tubulações presentes nos propulsores e nas turbinas que estão ilustradas nas Figuras 2.3 e 2.4. Da mesma forma semelhante, para aplicações da indústria de óleo e gás, as plataformas de extração off-shore (Figura 2.5) e refinarias (Figura 2.9) exigem um controle rigoroso de suas mangueiras e tubos, os quais são exemplificados pelas mangueiras de: abastecimento de navios petroleiros nas plataformas off-shore (Figura 2.6), transporte de hidrocarbonetos em solo (Figura 2.7) e conexão entre poço de extração e o oleoduto (Figura 2.8). Por fim, para plantas nucleares (Figura 2.11) existem diversos tubos que conectando diferentes máquinas, mostrados na representação esquemática da Figura 2.12, no reator de fusão da Figura 2.13 e mais no detalhes na Figura 2.14. Conforme as indústrias anteriores, é necessário ter o controle de todas as variáveis dinâmicas do sistema para assegurar uma produção eficiente e segura.

- Linhas de alimentação de foguetes



Figura 2.1: Lançamento de um foguete



Figura 2.2: Injetor de combustível básico

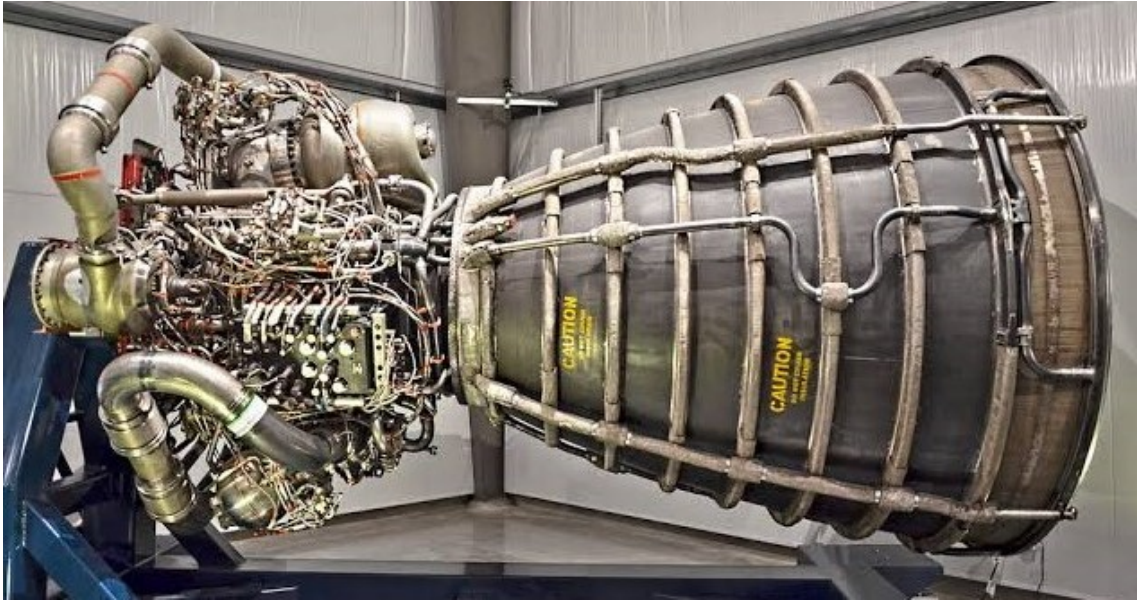


Figura 2.3: Propulsor de foguetes



Figura 2.4: Tubulações das turbinas

- Mangueiras e tubos em plataformas e refinarias de petróleo e gás



Figura 2.5: Plataforma de petróleo e gás off-shore



Figura 2.6: Mangueiras de abastecimento de petroleiros numa plataforma off-shore



Figura 2.7: Mangueiras com hidrocarbonetos em solo



Figura 2.8: Mangueiras de transição poço-oleoduto



Figura 2.9: Refinaria de petróleo



Figura 2.10: Tubulações numa refinaria

- Tubulações para processos de nucleares



Figura 2.11: Usina nuclear

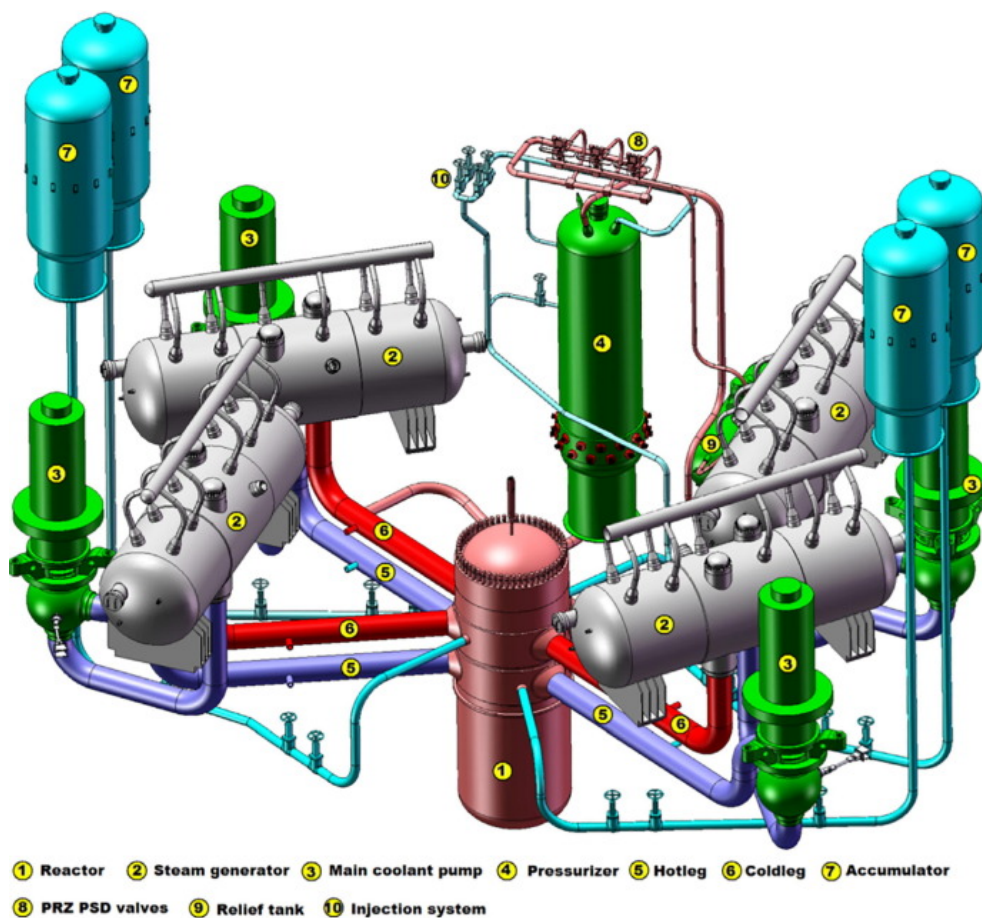


Figura 2.12: Conexões entre as máquinas numa usina nuclear

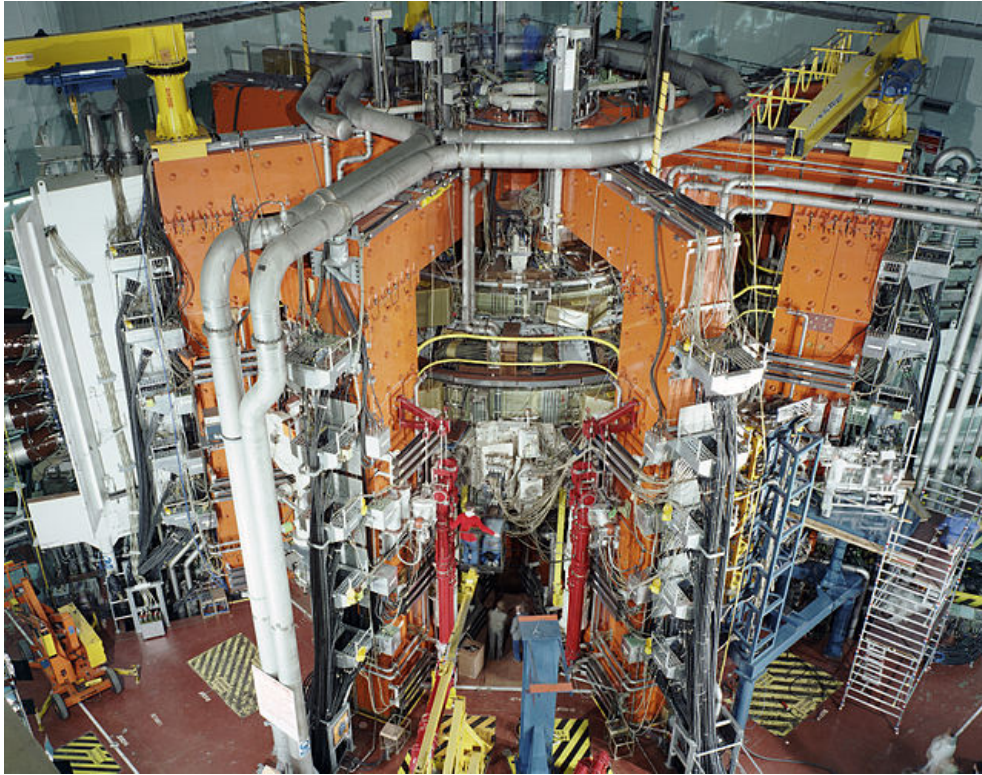


Figura 2.13: Reator de fusão



Figura 2.14: Tubulações de alguns dispositivos

2.2 Interação Fluido-Estrutura

A interação fluido-estrutura (FSI) é a interação de alguma estrutura móvel ou deformável com um fluxo de fluido interno ou circundante [10]. As FSIs podem ser estáveis ou oscilatórias. Nas interações oscilatórias, a deformação induzida na estrutura sólida faz com que ela se mova de tal forma que a fonte de deformação seja reduzida, e a estrutura retorna ao seu estado anterior unicamente para que o processo se repita.

A consideração de FSIs são cruciais nos projetos de muitos sistemas de engenharia, por exemplo, automóveis, aeronaves, naves espaciais, motores e pontes. Deixar de considerar os efeitos das interações oscilatórias pode ser catastrófico, especialmente em estruturas compostas por materiais suscetíveis à fadiga. Tacoma Narrows Bridge (1940), a primeira Tacoma Narrows Bridge, é provavelmente um dos exemplos mais infames de falha em grande escala. Outro exemplo são asas de aeronaves e lâminas de turbina podem quebrar devido a oscilações do FSI.

Há cerca de um século atrás, os estudos direcionados a FSI de transporte de fluido por tubos, focavam apenas na equação clássica do golpe de aríete (*water hammer equations*) [11]. No entanto, problemas complexos de tubos de transporte de fluido foram frequentemente encontrados em vários campos da engenharia. Portanto, é necessário considerar o efeito da interação fluido-estrutura na obra devido ao seu alto desenvolvimento e demanda no campo da engenharia.

Dentro dos estudos pioneiros, uma importante investigação na análise da vibração foi feita por Ashley e Haviland [12] que explicou a vibração do gasoduto Trans-Arabian. O trabalho envolveu uma análise dinâmica de um vão de tubulação simplesmente apoiado usando uma solução de séries de potências aproximadas. No entanto, a força inercial governante não foi descrita adequadamente no estudo, conforme mencionado por Feodos'ev [13]. Portanto, Feodos'ev formulou uma equação mais completa considerando a força inercial governante no estudo. A equação foi então resolvida pelo método de Galerkin. Housner [14] desenvolveu uma equação mais realista considerando a vibração transversal do fluido de transporte da tubulação Euler-Bernoulli. O trabalho apresentou vários fatores importantes como força restauradora elástica, força centrífuga, força de Coriolis e força de inércia que afetam o comportamento vibratório do fluido de transporte de dutos. Mais tarde,

Paidoussis e Issid [15], Lesmez [16] e Wiggert [17, 18] consideraram o movimento transversal da tubulação na equação de movimento da tubulação. No entanto, a equação não continha nenhum termo relacionado ao fluido, exceto o trabalho de Paidoussis e Issid.

Nos últimos anos, uma formulação de elementos finitos foi desenvolvida por Sreejith [19] para equações dinâmicas de movimentos totalmente acopladas para estudar o comportamento da tubulação cheia de líquido submetida à excitação do fechamento da válvula. O estudo mostrou uma redução significativa nas velocidades estruturais quando considerado o efeito da interação fluido-estrutura. Chellapilla e Simha [20] apresentaram as características de vibração e estabilidade do fluido de transporte de dutos com base no efeito do modelo de fundação de dois parâmetros (*two-parameter foundation model*).

Para esse estudo, velocidade crítica da tubulação foi obtida usando o método de Galerkin, sendo baseado nos modelos de vibração transversal que foram apresentados por Huang [6] e Mosatfa [5]. Esse desenvolvimento foi feito para sistemas com condição de contorno apoio-apoio, para obtenção da evolução das frequências naturais com variação da velocidade. Uma observação relevante encontrada pelas referências, é que o efeito Coriolis pode ser negligenciado se a precisão necessária da frequência natural for inferior a 95%. Huang [11] mostrou isso quando resolveu analiticamente o mesmo modelo de fluido de transporte de dutos para frequência natural via método de separação de variáveis e método de Ferrari.

2.3 Método de Elementos Finitos

O Método de Elementos Finitos tem sido largamente aplicado em áreas estruturais e não estruturais da engenharia e da física matemática para encontrar soluções de problemas diferenciais da mecânica do contínuo. Segundo Logan [9] o desenvolvimento moderno do método dos elementos finitos começou na década de 1940 no campo da engenharia estrutural com o trabalho de Hrennikoff em 1941 e McHenry em 1943, que usou uma rede de elementos de linha (barras e vigas) para a solução de tensões em sólidos contínuos. Em um artigo publicado em 1943, mas não amplamente reconhecido por muitos anos, Courant propôs configurar a solução de tensões

em uma forma variacional em um domínio discretizado por elementos triangulares.

Posteriormente, Galerkin utiliza o Método do Resíduo Ponderado na determinação das constantes da formulação variacional onde as mesmas funções bases foram utilizadas nas funções peso. Este procedimento fica conhecido como Formulação de Galerkin e é largamente utilizado até hoje.

Após a formulação de Galerkin, o método de elementos finitos começou a ser aplicado nos problemas envolvendo dinâmica de fluidos e transferência de calor, principalmente em problemas envolvendo geometrias, carregamentos e propriedades complexas na qual uma solução analítica proveniente da resolução de equações diferenciais são difíceis de serem obtidas.

O Método de Elementos Finitos é um método numérico cujo conceito é particionar o domínio do meio contínuo em inúmeros subdomínios finitos discretos denominados elementos conectados por pontos denominados pontos nodais (ou nós), e obter uma solução aproximada aplicando a equação em cada elemento e resolvendo sistemas lineares simples [10]. Esse domínio discreto é conhecido como malha, na qual a sua geração pode ser realizada em qualquer geometria. Há uma variedade de elementos que podem ser utilizadas na discretização do domínio, como ilustrado na Figura 2.1, não necessitando de malha estruturada (número de vizinhos por nó é constante) e uniforme (espaçamentos constantes), o que caracteriza uma vantagem do método em relação à outros.

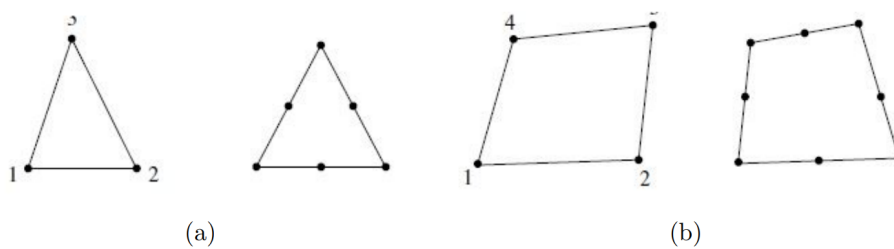


Figura 2.15: Elementos triangulares (a) e quadriláteros (b) genéricos [1]

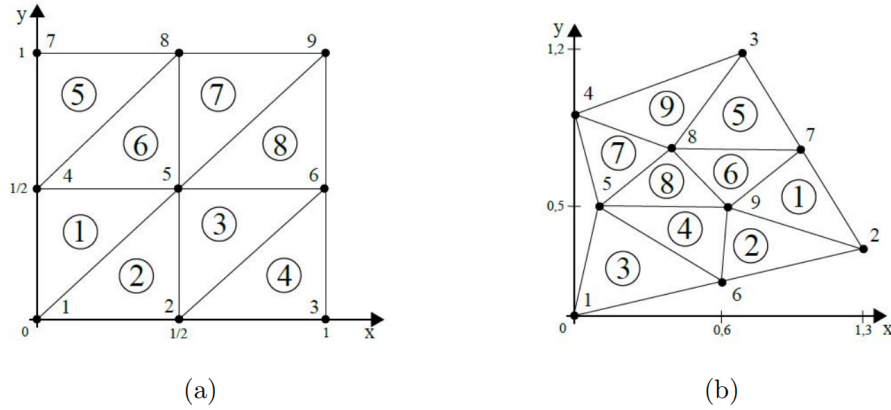


Figura 2.16: Malha estruturada (a) e não estruturada (b) genéricas [2]

A processo de aplicação do método de elementos finitos, em síntese, se inicia com a transformação da equação diferencial original (forma forte) para a sua forma fraca ou variacional em seu domínio. Essa primeira etapa consiste na utilização do Método do Resíduo Ponderado, no qual é necessário encontrar uma solução aproximada que satisfaça a seguinte relação:

$$EI \int_{\Omega} w(x) f''(x) d\Omega = 0 \quad (2.1)$$

onde $w(x)$ é denominado função peso, $f''(x)$ é a equação diferencial original genérica de segunda ordem e Ω é o domínio do problema. Nessa etapa utiliza-se a integração por partes pelo Teorema de Green para redução dos termos de ordens superiores.

A segunda etapa consiste na discretização do domínio Ω e da escolha da aproximação para as funções teste e peso. A aproximação mais utilizada e adotada nesse trabalho foi a aproximação de Galerkin, que busca aproximar as funções $w(x)$ e $f(x)$ como:

$$w^e(x) = \sum_{i=1}^n w_i N_i^e(x) \quad (2.2)$$

$$f^e(x) = \sum_{j=1}^n f_j N_j^e(x) \quad (2.3)$$

onde w_i e f_j são constantes a serem determinadas e no Método de Galerkin, as

funções de forma que interpolam a função peso ($N_i(x)$) e a função teste ($N_j(x)$) são iguais. A aproximação ocorre em cada elemento da malha, composta por n_p pontos nodais, n_e elementos e n graus de liberdade por elemento.

A Figura 2.3 ilustra dois tipos de funções de forma para discretização do problema, diferindo-se entre si por meio do grau do polinômio interpolador. Segundo Anjos [10] uma função de forma de ordem mais alta não necessariamente irá fornecer resultados mais precisos, pois pode trazer instabilidades numéricas e aumento significativo dos recursos computacionais. Para esse trabalho, devido à natureza do problema em análise, é necessário utilizar polinômios de 3^a ordem.

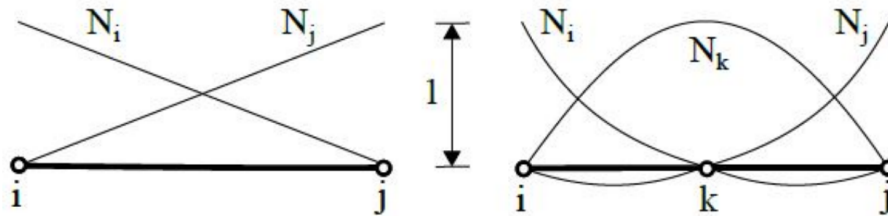


Figura 2.17: Funções de forma em bloco genéricas [2]

Para elementos de viga, é obrigatório que as derivadas primeiras das funções teste e peso sejam contínuas, portanto as funções teste e peso são do tipo C^1 . Conforme [3], o polinômio escolhido para a discretização é do tipo Hermite; pois ele mantém a continuidade C^1 entre os elementos, no qual tanto o deslocamento quando a derivada do deslocamento no nós tem que ser os graus de liberdade. As derivadas do campo de deslocamento podem ser vistas como uma rotação do deslocamento da linha média, logo a matriz de deslocamento do elemento é:

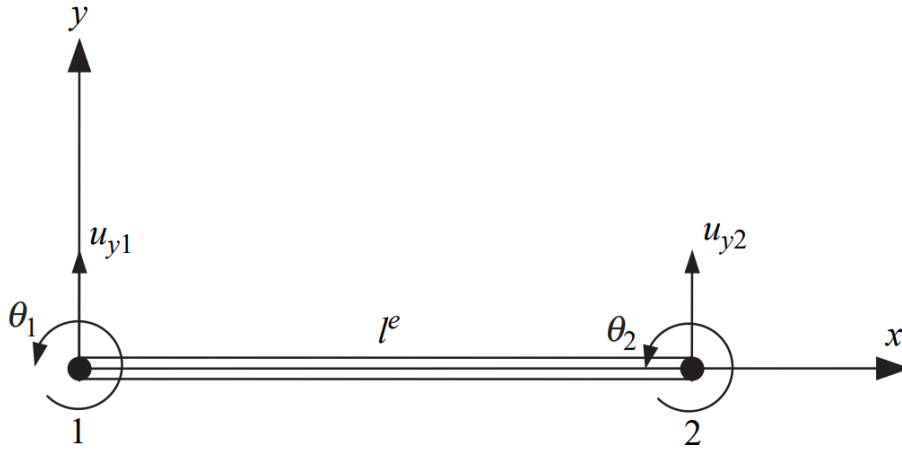


Figura 2.18: Elemento de viga de Euler-Bernoulli de 2 nós [3]

$$q^e(x) = \begin{bmatrix} u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

As forças nodais possuem a seguinte forma:

$$f^e(x) = \begin{bmatrix} f_{y1} \\ m_1 \\ f_{y2} \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Os polinômios de Hermite para um elemento de comprimento l são dados por:

$$\begin{aligned} N_{u1}(x) &= \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi) \\ N_{\theta1}(x) &= \frac{l^e}{8}(1 - \xi)^2(1 + \xi) \\ N_{u2}(x) &= \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi) \\ N_{\theta2}(x) &= \frac{l^e}{8}(1 + \xi)^2(1 - \xi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde

$$\xi = \frac{2x}{l^e} - 1$$

$$-1 \leq \xi \leq 1$$
(2.7)

Pode-se verificar que essas funções de forma possuem propriedades delta de Kronecker peculiares, para que as funções de forma Hermite possam interpolar a função desejada e sua derivada mutuamente, como se pode ver abaixo:

$$N_{ui}(x_i) = \delta_{ij}$$

$$\frac{dN_{\theta i}}{dx}(x_i) = \delta_{ij}$$
(2.8)

As quatro funções de forma são mostradas na Figura 2.19. Pode-se ver que as equações anteriores são atendidas.

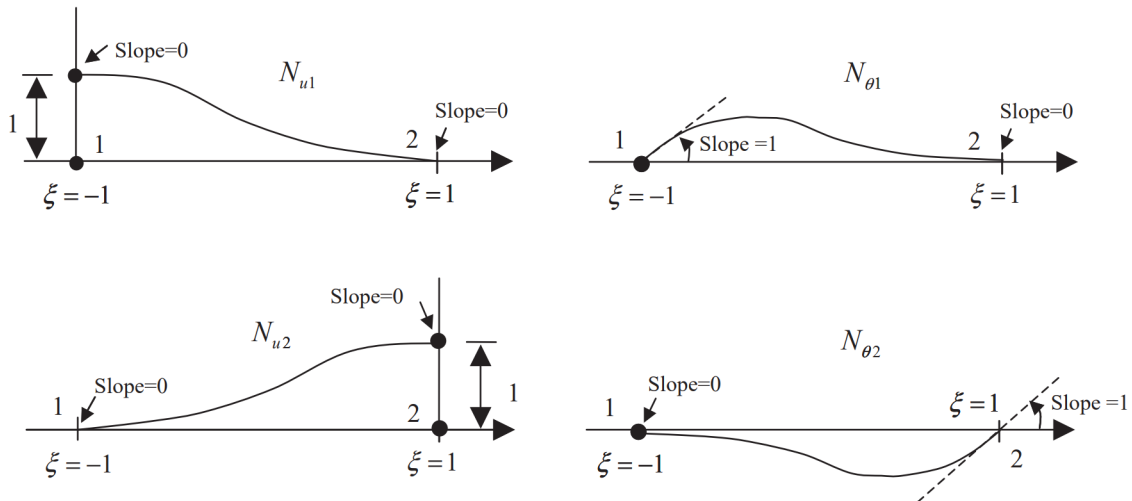


Figura 2.19: Funções de forma Hermite C^1 para uma viga de 2 nós [3]

Em seguida, as funções de aproximação são aplicadas na formulação fraca da equação que, por sua vez, são aplicadas a cada elemento da malha para obter as matrizes elementares (sistema local). Posteriormente, realiza-se a superposição das matrizes do sistema local para obter as matrizes do sistema global representativa do domínio Ω , como mostrado na figura abaixo.

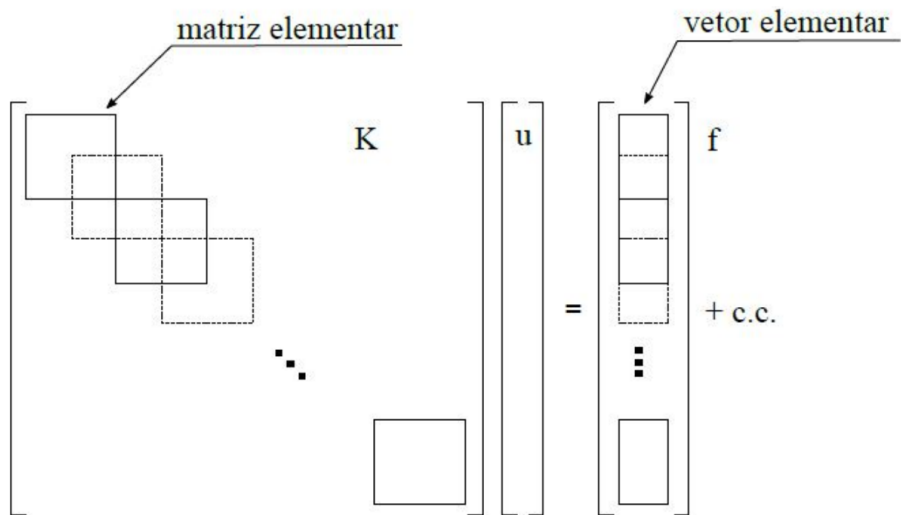


Figura 2.20: Montagem das matrizes globais [2]

Com o sistema montado, aplica-se as condições de contorno e resolve-se o sistema linear através de algum método de solução de sistemas lineares. O procedimento de construção e aplicação dessas matrizes está detalhado no Capítulo 3.

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Modelo Teórico

3.1.1 Equação de movimento sem a fundação

A análise detalhada da dinâmica de um tubo reto de transporte de fluido é descrita pelos livros [21, 22]. Nesta seção, será introduzida a modelagem matemática e os métodos de cálculo baseados nessas referências.

O sistema físico analisado é mostrado na Figura 3.1. As forças e momentos que atuam nos elementos fluido e tubo são mostrados na Figura 3.2. O tubo é considerado esbelto, e seus movimentos laterais, $Y(x, t)$, são pequenos e de comprimento de onda longo comparado ao diâmetro. O sistema consiste em um tubo uniforme de comprimento L , massa do tubo por unidade de comprimento m_t , rigidez à flexão EI , transporta um fluido de massa por unidade de comprimento $\rho_f A_f$ e que escoam axialmente com velocidade v . A área de escoamento da seção transversal é A_f , o perímetro interno é S e a pressão do fluido é p .

Considerando os elementos δx do fluido e da tubulação, conforme mostrado na Figura 3.2. O elemento fluido da Figura 3.2 (b) é submetido à: (i) forças de pressão, onde a pressão $p = p(x, t)$ é medida acima da pressão ambiente e t é o tempo; (ii) forças de reação do tubo sobre o fluido normal ao elemento fluido $F\delta x$ e tangencial a ele $\varphi S\delta x$, associadas à tensão de cisalhamento na parede φ (será utilizado esse símbolo para evitar futuras interpretações equivocadas, contudo na figura esquemática a tensão de cisalhamento na parede é representada por q). As forças de

gravidade na direção Y atuantes no fluido e no tubo não afetam o comportamento dinâmico do sistema, apenas o desloca através de deflexões estáticas ao longo do tubo e por isso essas grandezas não entram nas próximas equações.

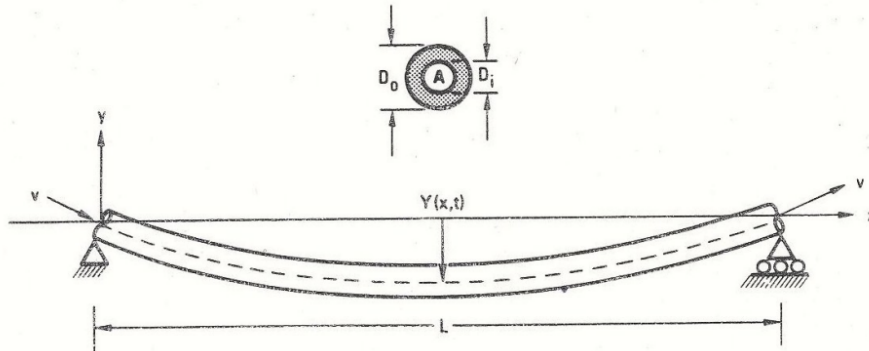


Figura 3.1: Tubo condutor de fluido simplesmente apoiado [4]

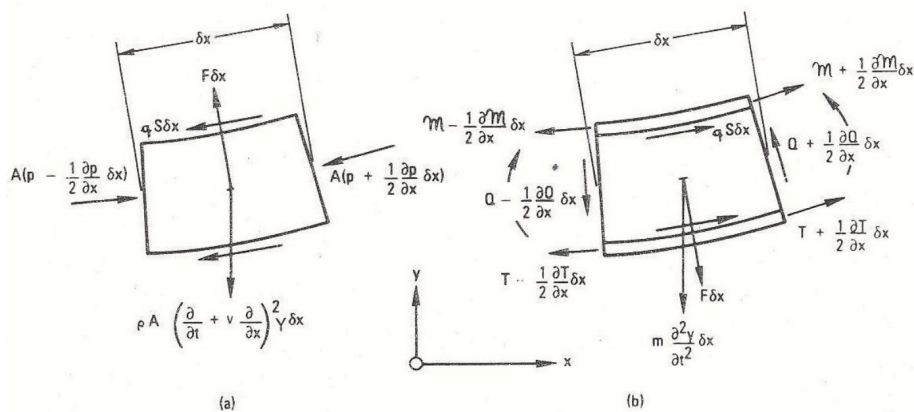


Figura 3.2: Forças e Momentos atuantes no sistema reduzido [4]

(a)Fluido (b)Tubo

Equilibrando as forças na direção Y do elemento fluido e utilizando a aproximação de pequenas deflexões, encontra-se:

$$F - \rho_f A_f \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \rho_f A_f \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 Y \quad (3.1)$$

O gradiente de pressão no fluido ao longo do comprimento do tubo é oposto pela tensão de cisalhamento do atrito do fluido contra as paredes do tubo. A soma das forças paralelas ao eixo do tubo para um velocidade constante de escoamento gera:

$$A_f \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi S = 0 \quad (3.2)$$

Sabendo que T é a tensão longitudinal no tubo, de forma similar para o elemento tubo, obtêm-se:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \varphi S = 0 \quad (3.3)$$

Sendo Q a força de cisalhamento transversal (ou força cortante), no equilíbrio das forças normais em relação ao eixo tubo, para pequenas deformações, encontra-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + F = m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

Sabendo que M_{mo} é momento fletor no tubo, a força de cisalhamento transversal Q e a deformação do tubo estão relacionados pela equação:

$$Q = -m_t \frac{\partial M_{mo}}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \quad (3.5)$$

A partir das equações 3.2 e 3.3 a tensão de cisalhamento na parede pode ser eliminada, resultando em:

$$\frac{\partial(\rho_f A_f - T)}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

Na extremidade $x = L$ do tubo, a tensão T no tubo é nula e a pressão no fluido é igual a pressão ambiente, portanto $p = T = 0$ em $x = L$, logo:

$$\rho_f A_f - T = 0 \quad (3.7)$$

Combinando todas as equações acima produz-se a seguinte equação de governo (ou equação de movimento):

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho_f A_f v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\rho_f A_f v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8)$$

Onde a massa por unidade de comprimento do tubo e do fluido no tubo é dada por:

$$M = m_t + \rho_f A_f \quad (3.9)$$

O primeiro termo ($EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4}$) representa a componente de força atuante no tubo decorrente da flexão do tubo. O segundo termo ($\rho_f A_f v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$) é a componente de força atuante no tubo decorrente do escoamento do fluido através do tubo defletido, ou seja, é uma força centrífuga gerada por um fluxo numa curvatura. O terceiro termo ($2\rho_f A_f v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t}$) representa a força inercial associada com a aceleração de Coriolis que surge devido ao escoamento do fluido com velocidade v relativa ao tubo. Além disso,

essa expressão é a chamada amortecimento de redemoinho antissimétrico. Por causa desse efeito, a interação fluido-estrutura vira um problema de autovalores complexos. O quarto e último termo ($M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$) é a força atuante no tubo decorrente da inércia da tubo e do fluido que está relacionado com o movimento.

Uma característica notável da equação 3.8 é a total ausência de efeitos fricção do fluido, que à primeira vista pode parecer uma idealização. No entanto, no contexto das outras aproximações implícitas nesta equação linearizada, pode-se demonstrar rigorosamente que os efeitos de atrito do fluido não desempenham nenhum papel na dinâmica do sistema, um fato mostrado pela referência [23].

3.1.2 Equação de movimento com a fundação Winkler

Baseado no texto acadêmico [5], uma análise da flexão de vigas em uma fundação viscoelástica, se baseada no modelo de Winkler, é derivada da suposição de que as forças de reação da fundação são proporcionais em cada ponto à deflexão da viga naquele ponto. A equação diferencial da linha elástica é baseada na suposição de que uma viga reta é suportada ao longo de todo o seu comprimento por um meio viscoelástico e submetida a forças verticais que atuam no plano principal do eixo da seção transversal simétrica, conforme Figura 3.3.

Nestas condições, a viga irá defletir e, conseqüentemente, produzir forças de reação continuamente distribuídas no meio que a suporta. Pode-se fazer a suposição fundamental de que a intensidade p das forças de reação em qualquer ponto é proporcional à deflexão da viga naquele ponto. As forças de reação são assumidas como atuando verticalmente e em oposição à deflexão da viga. Assim, onde a deflexão é direcionada para baixo (sentido positivo), o meio de suporte será comprimido. No entanto, onde a deflexão é negativa, uma tração é produzida; para os propósitos desta pesquisa, supõe-se que o meio de suporte seja capaz de suportar tais forças de tração.

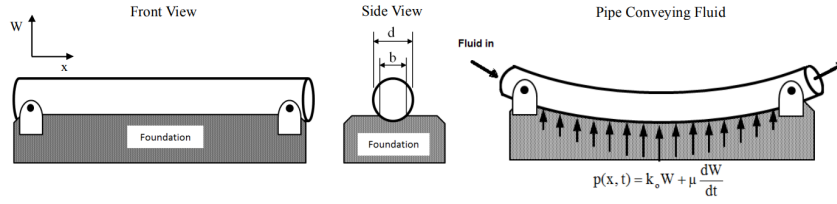


Figura 3.3: Representação do modelo de fundação Winkler modificado [5]

Se uma viga tem seção transversal uniforme, então uma unidade de deflexão dessa viga causará reação na fundação; conseqüentemente, em um ponto onde a deflexão é $Y(x, t)$, a intensidade da reação distribuída, por unidade de comprimento da viga, será:

$$p(x, t) = k_0 W + \mu \frac{dW}{dt} \quad (3.10)$$

Onde k_0 e μ são os coeficientes de rigidez e amortecimento (viscoso) da fundação por unidade de comprimento, respectivamente. A suposição $p(x, t)$ implica que o meio de suporte é viscoelástico. Seu material, então, age de acordo com o modelo Kelvin-Voigt. Sua viscoelasticidade, portanto, pode ser caracterizada pela força que, distribuída sobre uma unidade de área, causará uma deflexão igual àquela unidade. Os valores constantes do meio de suporte, k_v e μ_v , são chamados de módulos de rigidez e fundação viscosa, respectivamente. Onde,

$$\begin{aligned} k_0 &= b k_v \\ \mu &= b \mu_v \end{aligned} \quad (3.11)$$

As unidades dos módulos k_v e μ_v estão em $[\text{N}/\text{m}^3]$ e $[\text{N s}/\text{m}^3]$, respectivamente. Enquanto b é a largura da viga em contato com a fundação de base (Figura 3.3). No entanto, deve-se lembrar que o k e μ incluem o efeito da largura da viga e serão numericamente iguais a k_v e μ_v somente se a viga tiver uma largura unitária.

Para incluir as reações da fundação na equação de movimento do tubo basta fazer a superposição dos efeitos, já que o tubo se comporta como uma viga. A equação de movimento com fundação Winkler é escrita como:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho_f A_f v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\rho_f A_f v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + M \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + k_0 W + \mu \frac{dW}{dt} = 0 \quad (3.12)$$

3.2 Modelo Numérico

3.2.1 Função de forma

A equação 3.8 é uma equação diferencial parcial de 4ª ordem em 2 variáveis independentes sujeitas a várias condições de contorno. É bastante difícil conseguir sua solução analítica, contudo pode-se usar o método de elemento finitos para se obter a solução numérica. A equação de deflexão do elemento de viga reto bidimensional, segundo [24], possui forma:

$$Y(x, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x) q_i(t) \quad (3.13)$$

Essa equação é representada na forma matricial como:

$$Y(x, t) = \mathbf{Nq} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Onde q_i são as coordenadas generalizadas (deslocamentos e rotações), mostradas na Figura 3.4. N_i ($i=1,2,\dots,n_p$) são as funções de forma de flexão e $Y(x)$ é a função polinomial cúbica de deformação a qual define os deslocamentos e rotações nos nós.

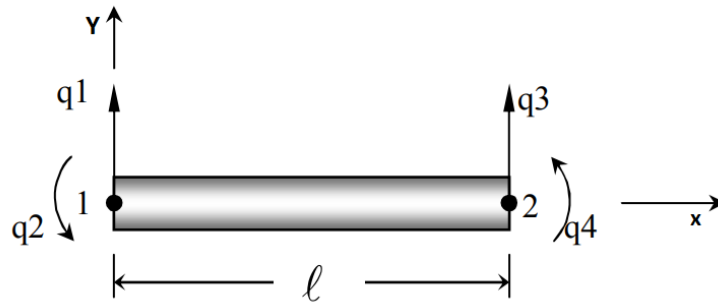


Figura 3.4: Deslocamentos nodais do elemento de viga mostrados em sentido positivo

A determinação da equação 3.13, usando o método encontrado em muitos textos de elementos finitos, ocorre descrevendo $Y(x)$ como um polinômio de n termos com coeficientes desconhecidos, sendo n o número de graus de liberdade no elemento. A escolha de uma função cúbica para descrever o deslocamento não é arbitrária. Claramente, com a especificação de quatro condições de contorno, não podemos determinar mais do que quatro constantes na função de deslocamento assumida.

Sendo l o comprimento do elemento, as funções de forma N_i são iguais a:

$$N_1(x) = N_{y1}(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{l}\right) \quad (3.15)$$

$$N_2(x) = N_{\theta1}(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l} \quad (3.16)$$

$$N_3(x) = N_{y2}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(3 - \frac{2x}{l}\right) \quad (3.17)$$

$$N_4(x) = N_{\theta2}(x) = -\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l} \quad (3.18)$$

As funções de forma acima N_i , são usadas para descrever os elementos de viga bidimensionais que possuem 2 graus de liberdade por nó: um de deslocamento lateral e outro de rotação.

3.2.2 Classificação e derivação das energias do sistema no domínio elementar

Para serem encontradas as matrizes que descrevem o comportamento dinâmico dessa interação fluido-estrutura, é utilizada a análise das energias do sistema pelo Princípio do Trabalho Virtual, onde:

$$T_t + \Pi_t + T_f = \delta W \quad (3.19)$$

Onde δW é ao trabalho virtual feito pelo somatório das forças externas. Para esse modelo, esse termo é igual a soma energia cinética do tubo T_t , energia cinética do fluido T_f e energia potencial do tubo Π_t . Devido ao escoamento incompressível,

velocidade constante do fluido e as pequenas deformações, a energia potencial do fluido Π_f pode ser negligenciada.

Para uma modelagem de flexão em um elemento estrutural esbelto, a energia cinética do tubo é descrita como:

$$T_t = \frac{1}{2} \int_V (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) dV \quad (3.20)$$

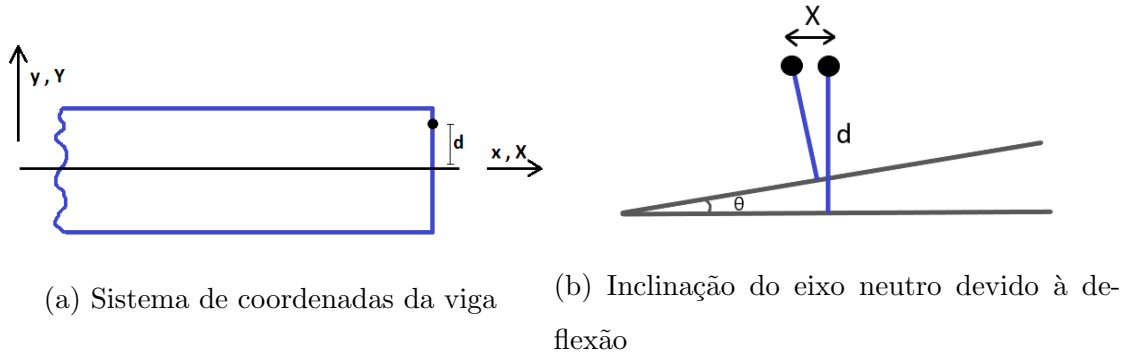


Figura 3.5: Deslocamentos da viga submetida à flexão

Conforme mostrado na Figura 3.5, X e Y são, respectivamente, os deslocamentos horizontal e vertical em relação ao ponto qualquer em destaque na figura. d é a distância desse ponto qualquer em relação a linha neutra e θ é a inclinação dessa linha que é descrito como:

$$\theta = \frac{dY}{dx} \quad (3.21)$$

Para pequenas deformações, encontra-se:

$$X = -\frac{dY}{dx} d \approx -Y_x d \quad (3.22)$$

Substituindo a equação 3.22 na equação 3.20 e separando a integral no volume em integrais na área transversal e no comprimento, tem-se:

$$T_t = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho_t (d^2 \dot{Y}_x^2 + \dot{Y}^2) dA dx \quad (3.23)$$

Momento de inércia de área é definido por:

$$I = \int_A d^2 dA dx \quad (3.24)$$

Substituindo a equação 3.20 na equação 3.24, encontra-se

$$T_t = \frac{1}{2} \int_0^l \rho_t A_t \dot{Y}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho_t I \dot{Y}_x^2 dx \quad (3.25)$$

onde o primeiro e segundo termo representam, respectivamente, a energia cinética translacional e a energia cinética rotacional do tubo. Para o modelo de viga de Euler-Bernoulli, a energia rotacional pode ser ignorada quando comparada com a energia translacional, portanto reescrevendo a equação com a simplificação:

$$T_t \approx \frac{1}{2} \rho_t A_t \int_0^l \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 dx \quad (3.26)$$

Para o caso de estudo desse trabalho, um tubo de transporte de fluido biapoiado sem ação de forças externas, a energia potencial do tubo Π_t é igual a energia interna de deformação U . Para membro estrutural em flexão, U é descrito por:

$$U = \int_V \int_{\epsilon} (\sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{12} d\epsilon_{12}) dV \quad (3.27)$$

onde σ_{11} é a tensão normal na direção x e σ_{12} é a tensão de cisalhamento. Utilizando a Lei de Hooke e fazendo a integral na deformação, encontra-se:

$$U = \int_V \left(\frac{\sigma_{11}^2}{2E} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G} \right) dV \quad (3.28)$$

As tensões σ_{11} e σ_{12} são descritas por:

$$\sigma_{11} = -\frac{My}{I} \quad (3.29)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{V_c Q}{Ib} \quad (3.30)$$

onde M é o momento fletor de uma seção, y é a posição vertical em relação linha neutra, V_c é a força cortante, Q é o momento estático de área e b é a largura da viga. O momento fletor pode ser descrito como:

$$M = EI \frac{d^2 Y}{dx^2} \quad (3.31)$$

Substituindo a equação 3.29 e 3.30 na equação 3.28 e modificando a integral, encontra-se:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx + \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \cdot \int_0^l \frac{V^2}{2GI^2} dx \quad (3.32)$$

onde o primeiro e segundo termo representam, respectivamente, a energia de deformação de flexão e a energia de deformação de cisalhamento. Para o modelo de viga esbelta de Euler-Bernoulli, a energia de cisalhamento pode ser desprezada. Caso a viga fosse curta e grossa e/ou de material anisotrópico (ex: compósitos) seria necessário levar esse termo em consideração, mas para esse trabalho só foram utilizados metais. A partir da relação do momento fletor com a deflexão e da simplificação que da modelagem desse projeto, a equação 3.32 pode ser reescrita como:

$$\Pi_t = U = \frac{1}{2}EI \int_0^l \left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)^2 dx \quad (3.33)$$

Para encontrar a energia cinética do fluido é feita uma modelagem genérica utilizando coordenadas cartesianas e polares de um fluido num tubo defletido.

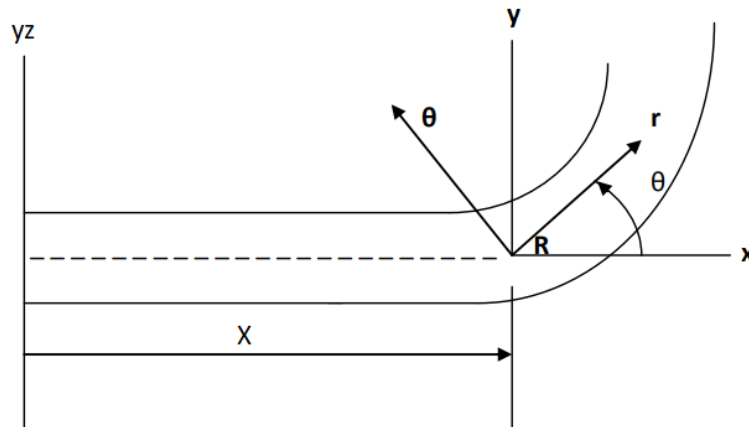


Figura 3.6: Fluido escoando numa curvatura qualquer

Considerando um ponto qualquer R a uma distância X do plano de referência yz , como mostrado Figura 3.6. Devido ao escoamento do fluido, uma força é introduzida no tubo fazendo com que ele dobre. Esta força também é exercida no fluido, fazendo com que ele assuma diferentes formas conforme as paredes do tubo. Seja Y a deflexão transversal do tubo e θ o ângulo formado pelo tubo devido ao escoamento do fluido com a linha neutra. \hat{i} e \hat{j} representam os vetores unitários ao longo dos eixos x e y e \hat{r} e $\hat{\theta}$ representam os vetores de dois componentes no ponto R ao longo dos eixos

r e θ . No ponto R , os versores \hat{r} e $\hat{\theta}$ podem ser expressos como:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (3.34)$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (3.35)$$

A expressão da inclinação no ponto R é dada por:

$$\tan \theta = \frac{dY}{dx} \quad (3.36)$$

Como o tubo sofre uma pequena deflexão, portanto, θ é muito pequeno. Sendo assim é conveniente usar a aproximação:

$$\tan \theta \approx \theta \quad (3.37)$$

logo:

$$\theta \approx \frac{dY}{dx} \quad (3.38)$$

O deslocamento do ponto R a uma distância x do plano de referência pode ser expresso como:

$$\hat{R} = Y \hat{j} + r \hat{r} \quad (3.39)$$

Diferenciando a equação acima para obter a velocidade do fluido no ponto R

$$\hat{R} = \dot{Y} \hat{j} + \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} \quad (3.40)$$

$$\dot{r} = v \quad (3.41)$$

onde v é a velocidade de escoamento do fluido. Também derivando no tempo t :

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{dt} \quad (3.42)$$

logo:

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \hat{\theta} \quad (3.43)$$

Substituindo o valor de \hat{r} e $\hat{\theta}$ das equações 3.34 e 3.35 na equação 3.43, encontra-se:

$$\dot{\hat{R}} = \dot{Y} \hat{j} + \dot{r} [\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}] + r \dot{\theta} [-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}] \quad (3.44)$$

A velocidade no ponto R é expressa por:

$$\hat{R} = \dot{R}_x \hat{i} + \dot{R}_y \hat{j} \quad (3.45)$$

$$\hat{R} = (\dot{r} - r\dot{\theta})\hat{i} + (\dot{Y} + \dot{r}\theta + r\dot{\theta})\hat{j} \quad (3.46)$$

Sabendo que a componente Y do deslocamento faz o tubo se curvar e o movimento em X é limitado pela geometria do problema, portantoo:

$$T_{fp} = \frac{1}{2}\rho_f A_f \hat{R}_y \hat{R}_y \quad (3.47)$$

onde T_{fp} é a energia cinética do fluido na seção do ponto R e R_y é a componente y da velocidade, ρ_f é a densidade do fluido, A_f é a área da seção transversal do fluido. Substituindo o valor de R_y da equação 3.46 na equação 3.47 resulta em:

$$T_{fp} = \frac{1}{2}\rho_f A_f (\dot{Y}^2 + \dot{r}^2 \theta^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{Y}\dot{r}\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta}) \quad (3.48)$$

A partir da hipótese de pequenas deformações, assume-se que $\dot{\theta} \ll \theta$ em magnitude e que θ é pequeno, portantoo os termos da equação que possuem $\dot{\theta}$ podem ser desconsiderados. Dessa forma, fazendo também a substituição de \dot{r} por v , reescreve-se T_{fp} como:

$$T_{fp} = \frac{1}{2}\rho_f A_f (\dot{Y}^2 + v^2 \theta^2 + 2\dot{Y}v\theta) \quad (3.49)$$

Substituindo θ da equação 3.35 na equação 3.46, encontra-se:

$$T_{fp} = \frac{1}{2}\rho_f A_f \left[\left(\frac{dY}{dt} \right)^2 + v^2 \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 + 2v \left(\frac{dY}{dt} \right) \left(\frac{dY}{dx} \right) \right] \quad (3.50)$$

Expandindo a energia cinética para todo o fluido, é feita a integral no comprimento:

$$T_f = \frac{1}{2}\rho_f A_f \int_0^l \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2}\rho_f A_f v^2 \int_0^l \left(\frac{dY}{dx} \right)^2 dx + \rho_f A_f v \int_0^l \left(\frac{dY}{dt} \right) \left(\frac{dY}{dx} \right) dx \quad (3.51)$$

onde o primeiro, segundo e terceiro termo são relacionados, respectivamente, com a inércia do fluido, a força centrífuga e o efeito de Coriolis.

3.2.3 Matrizes elementares

A partir dos resultados encontrados na subseção anterior, as matrizes dos elementos podem ser montadas. Para a construção das matrizes de rigidez são utilizadas a energia de deformação da viga e a energia cinética do fluido relacionada com a força centrífuga. Da equação 3.33 e utilizando a função de forma expressa por matrizes na equação 3.14, encontra-se:

$$\Pi_t = EI \int_0^l \begin{bmatrix} y_1 & \theta_1 & y_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N''_{y1} \\ N''_{\theta1} \\ N''_{y2} \\ N''_{\theta2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N''_{y1} & N''_{\theta1} & N''_{y2} & N''_{\theta2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} dx \quad (3.52)$$

Lembrando-se que se A e B são duas matrizes, aplicando as propriedades de matriz transposta na multiplicação de A e B, tem-se:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (3.53)$$

E para expressar o termo da segunda derivada de Y ao quadrado através de funções de forma, é necessário utilizar o seguinte artifício matemático:

$$Y''^2 = (Y'')^T (Y'') = \mathbf{q}^T \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' \mathbf{q} \quad (3.54)$$

Fazendo multiplicação das matrizes função de forma, chega-se na expressão:

$$\Pi_t = EI \int_0^l \begin{bmatrix} y_1 & \theta_1 & y_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (N''_{y1})^2 & N''_{y1} N''_{\theta1} & N''_{y1} N''_{y2} & N''_{y1} N''_{\theta2} \\ N''_{\theta1} N''_{y1} & (N''_{\theta1})^2 & N''_{\theta1} N''_{y2} & N''_{\theta1} N''_{\theta2} \\ N''_{y2} N''_{y1} & N''_{y2} N''_{\theta1} & (N''_{y2})^2 & N''_{y2} N''_{\theta2} \\ N''_{\theta2} N''_{y1} & N''_{\theta2} N''_{\theta1} & N''_{\theta2} N''_{y2} & (N''_{\theta2})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} dx \quad (3.55)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_1 = EI \int_0^l \begin{bmatrix} (N''_{y1})^2 & N''_{y1}N''_{\theta1} & N''_{y1}N''_{y2} & N''_{y1}N''_{\theta2} \\ N''_{\theta1}N''_{y1} & (N''_{\theta1})^2 & N''_{\theta1}N''_{y2} & N''_{\theta1}N''_{\theta2} \\ N''_{y2}N''_{y1} & N''_{y2}N''_{\theta1} & (N''_{y2})^2 & N''_{y2}N''_{\theta2} \\ N''_{\theta2}N''_{y1} & N''_{\theta2}N''_{\theta1} & N''_{\theta2}N''_{y2} & (N''_{\theta2})^2 \end{bmatrix} dx \quad (3.56)$$

Substituindo na equação 3.56 as funções de forma definidas nas equações 3.15 até 3.18 e integrando em cada elemento no comprimento L , chega-se na matriz simétrica de rigidez de flexão do tubo \mathbf{k}_1 :

$$\mathbf{k}_1 = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 3 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Para a matriz de rigidez relacionada com força centrífuga do escoamento, o desenvolvimento é similar.

$$T_{f2} = \frac{1}{2}\rho_f A_f v^2 \int_0^l \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}' \mathbf{q} dx \quad (3.58)$$

Onde:

$$\mathbf{k}_2 = \frac{1}{2}\rho_f A_f v^2 \int_0^l \begin{bmatrix} (N'_{y1})^2 & N'_{y1}N'_{\theta1} & N'_{y1}N'_{y2} & N'_{y1}N'_{\theta2} \\ N'_{\theta1}N'_{y1} & (N'_{\theta1})^2 & N'_{\theta1}N'_{y2} & N'_{\theta1}N'_{\theta2} \\ N'_{y2}N'_{y1} & N'_{y2}N'_{\theta1} & (N'_{y2})^2 & N'_{y2}N'_{\theta2} \\ N'_{\theta2}N'_{y1} & N'_{\theta2}N'_{\theta1} & N'_{\theta2}N'_{y2} & (N'_{\theta2})^2 \end{bmatrix} dx \quad (3.59)$$

Substituindo na equação 3.56 as funções de forma definidas nas equações 3.15 até 3.18 e integrando em cada elemento no comprimento L , chega-se na matriz simétrica de rigidez relacionada com o efeito centífugo \mathbf{k}_2 :

$$\mathbf{k}_2 = \frac{\rho_f A_f v^2}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

A matriz de dissipação do sistema é construída através do termo da energia cinética do fluido relacionado com o efeito de Coriolis.

$$T_{f3} = \rho_f A_f v^2 \int_0^l \mathbf{q}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} dx \quad (3.61)$$

Onde:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2} \rho_f A_f v^2 \int_0^l \begin{bmatrix} N'_{y1} N_{y1} & N'_{y1} N_{\theta1} & N'_{y1} N_{y2} & N'_{y1} N_{\theta2} \\ N'_{\theta1} N_{y1} & N'_{\theta1} N_{\theta1} & N'_{\theta1} N_{y2} & N'_{\theta1} N_{\theta2} \\ N'_{y2} N_{y1} & N'_{y2} N_{\theta1} & N'_{y2} N_{y2} & N'_{y2} N_{\theta2} \\ N'_{\theta2} N_{y1} & N'_{\theta2} N_{\theta1} & N'_{\theta2} N_{y2} & N'_{\theta2} N_{\theta2} \end{bmatrix} dx \quad (3.62)$$

Substituindo na equação 3.59 as funções de forma definidas nas equações 3.15 até 3.18 e integrando em cada elemento no comprimento L , chega-se na matriz antissimétrica de dissipação relacionada com o efeito Coriolis \mathbf{c} :

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\rho_f A_f v^2}{30l} \begin{bmatrix} -30 & -6l & -30 & 6l \\ 6l & 0 & -6l & l^2 \\ 30 & 6l & 30 & -6l \\ -6l & -l^2 & 6l & 0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

A matriz de inércia do sistema é construída através da energia cinética do tubo e do termo da energia cinética do fluido relacionado com a inércia, encontra-se:

$$T_t + T_{f1} = (\rho_t A_t + \rho_f A_t) \frac{1}{2} \int_0^l \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} dx \quad (3.64)$$

Onde:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \rho_f A_f v^2 \int_0^l \begin{bmatrix} N_{y1} N_{y1} & N_{y1} N_{\theta1} & N_{y1} N_{y2} & N_{y1} N_{\theta2} \\ N_{\theta1} N_{y1} & N_{\theta1} N_{\theta1} & N_{\theta1} N_{y2} & N_{\theta1} N_{\theta2} \\ N_{y2} N_{y1} & N_{y2} N_{\theta1} & N_{y2} N_{y2} & N_{y2} N_{\theta2} \\ N_{\theta2} N_{y1} & N_{\theta2} N_{\theta1} & N_{\theta2} N_{y2} & N_{\theta2} N_{\theta2} \end{bmatrix} dx \quad (3.65)$$

Substituindo na equação 3.62 as funções de forma definidas nas equações 3.15 até 3.18 e integrando em cada elemento no comprimento L , chega-se na matriz simétrica de inércia \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} = \frac{(m_t + m_f)l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

onde m_t e m_f são, respectivamente, a massa por unidade de comprimento do fluido, sendo descrito por:

$$m_t = \rho_t A_t \quad (3.67)$$

$$m_f = \rho_f A_f \quad (3.68)$$

Fora as matrizes elementares relacionadas ao tubo e ao escoamento, são construídas também as matrizes elementares relacionadas às interações com a fundação pelo efeito de superposição. Primeiramente, a matriz relacionada com rigidez da fundação é obtida através da energia potencial, conforme as equações abaixo.

$$\Pi_{fund} = \frac{1}{2} \int_0^l k_0 W^2 dx = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{q}^T k_0 \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dx \quad (3.69)$$

Onde,

$$\mathbf{k}_3 = k_0 \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (3.70)$$

$$\mathbf{k}_3 = k_0 \int_0^l \begin{bmatrix} N_{y1}N_{y1} & N_{y1}N_{\theta1} & N_{y1}N_{y2} & N_{y1}N_{\theta2} \\ N_{\theta1}N_{y1} & N_{\theta1}N_{\theta1} & N_{\theta1}N_{y2} & N_{\theta1}N_{\theta2} \\ N_{y2}N_{y1} & N_{y2}N_{\theta1} & N_{y2}N_{y2} & N_{y2}N_{\theta2} \\ N_{\theta2}N_{y1} & N_{\theta2}N_{\theta1} & N_{\theta2}N_{y2} & N_{\theta2}N_{\theta2} \end{bmatrix} dx \quad (3.71)$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{k_0 l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Já matriz relacionada a viscosidade de fundação é definido pela energia dissipação atrelada a energia cinética, conforme as equações abaixo.

$$T_{fund} = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum_e \mathbf{q}^T \mu \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dx \quad (3.73)$$

Onde,

$$\mathbf{c}_2 = \mu \int_0^l \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (3.74)$$

$$\mathbf{c}_2 = \mu \int_0^l \begin{bmatrix} N_{y1}N_{y1} & N_{y1}N_{\theta1} & N_{y1}N_{y2} & N_{y1}N_{\theta2} \\ N_{\theta1}N_{y1} & N_{\theta1}N_{\theta1} & N_{\theta1}N_{y2} & N_{\theta1}N_{\theta2} \\ N_{y2}N_{y1} & N_{y2}N_{\theta1} & N_{y2}N_{y2} & N_{y2}N_{\theta2} \\ N_{\theta2}N_{y1} & N_{\theta2}N_{\theta1} & N_{\theta2}N_{y2} & N_{\theta2}N_{\theta2} \end{bmatrix} dx \quad (3.75)$$

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Com todas essas informações, são geradas as matrizes elementares resultante de rigidez e dissipação, conforme equações abaixo. Importante notar que \mathbf{k}_2 é negativo, pois esse termo do provoca a redução da rigidez global, conforme mostrado na referência [5].

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (3.77)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$$

O vetor de carregamento externo é construído a partir do trabalho virtual δW , da seguinte forma:

$$\delta W = \int_0^l f(x, t) \delta Y(x, t) dx = \int_0^l f(x, t) \mathbf{N} \delta \mathbf{q} dx \quad (3.78)$$

De forme semelhante ao que ocorreu na seção anterior, esse procedimento é válido também para as matrizes globais de rigidez \mathbf{K} e \mathbf{C} e para os vetores globais de carregamento externo \mathbf{F} e GDLs \mathbf{Q} .

3.3 Análise Modal

Análise modal é o estudo das propriedades dinâmicas relacionadas às características oscilatórias do sistema, na qual fornece as frequências naturais da estrutura e seus respectivos modos de vibração. Esse estudo é feito com forçamento externo nulo, pois é uma análise apenas do sistema. O primeiro passo é a montagem da equação matricial do sistema dinâmico, conforme expressão abaixo:

$$M\ddot{\mathbf{Q}} + C\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.80)$$

Em seguida é usado o artifício do espaço de estados para remover a derivada de segunda ordem, como mostrado na próxima equação:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (3.81)$$

onde $\mathbf{z}_{2n \times 1}$, $\dot{\mathbf{z}}_{2n \times 1}$ e $\mathbf{A}_{2n \times 2n}$, são representados por:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ M^{-1}\mathbf{K} & M^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

onde $\mathbf{0}_{n \times n}$ e $\mathbf{I}_{n \times n}$ são, respectivamente, as matrizes nula e identidade. O uso do espaço de estado reduziu a ordem da derivada, mas aumentou em quatro vezes a quantidade de elementos que serão computados.

Para um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem, assume-se a solução do vetor de estado e sua derivada como:

$$\mathbf{z}(x, t) = e^{\lambda t} \mathbf{Z}(x) \quad (3.85)$$

$$\dot{\mathbf{z}}(x, t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{Z}(x) \quad (3.86)$$

Substituindo as últimas duas equações na equação 3.81 e fazendo as simplificações, chega-se na equação característica de um problema de autovalores 3.88:

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{Z} = \mathbf{A} e^{\lambda t} \mathbf{Z} \quad (3.87)$$

$$\lambda \mathbf{Z} = \mathbf{A} \mathbf{Z} \quad (3.88)$$

Reescrevendo a última equação, encontra-se a seguinte igualdade:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (3.89)$$

Para obter uma solução não trivial ($\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$) da equação 3.89, a equação 3.90 deve ser resolvida.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.90)$$

O determinante produz um polinômio de grau $2n$ que possui $2n$ raízes λ_i . Essas raízes são os autovalores da matriz \mathbf{A} e associado a cada um deles há um autovetor \mathbf{Z}_i que caracteriza o formato da vibração. Como \mathbf{A} possui apenas coeficientes constantes e reais, a solução do polinômio é composta de pares conjugados de autovalores complexos, conforme a equação 3.93.

$$\lambda^{2n} + c_{2n-1} \lambda^{2n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = 0 \quad (3.91)$$

$$\lambda_i \mathbf{Z}_i = \mathbf{A} \mathbf{Z}_i \quad (3.92)$$

$$\lambda_i = a \pm bi \quad (3.93)$$

A interpretação física das parte reais a e imaginárias b dos autovalores é representada respectivamente pelo decaimento/ganho (está atrelado a estabilidade do sistema) e frequência natural amortecida. Ou seja, para se obter as frequências naturais basta resolver uma equação polinomial por métodos numérico. No caso desse trabalho, foi utilizada a biblioteca Numpy do Python que possui ferramentas que

extraem diretamente da matriz \mathbf{A} os autovalores e autovetores. Com o método de obtenção das frequências naturais estabelecido, é possível fazer a variação de diversos parâmetros dos sistema (ex: velocidade de escoamento, rigidez da fundação, comprimento do tubo, etc) e analisar com isso afeta a dinâmica e estabilidade do tubo apoiado.

3.4 Análise Transiente & Permanente

3.4.1 Amplitudes de vibrações em regime transiente

Para a análise da transiente é necessário escolher um ponto no comprimento do tubo para ser investigado e utilizar diferenças finitas para linearizar a equação de movimento de segunda ordem. Para esse estudo de um tubo simplesmente apoiado, o ponto central do tubo é escolhido para ser representado graficamente pois é a região com as maiores amplitudes de movimento.

Para a equação de movimento global, representada na equação 3.80, os graus de liberdade \mathbf{Q} e suas derivadas são linearizados utilizando o método de diferenças finitas por diferenças regressivas. Nas quais as condições iniciais de amplitude de movimento são consideradas zero. Abaixo estão representadas as equações de movimento com forçamento externo e de diferenças finitas para os graus de liberdade.

$$M\ddot{\mathbf{Q}}^n + C\dot{\mathbf{Q}}^n + C\mathbf{Q}^n = \mathbf{F} \quad (3.94)$$

$$\ddot{\mathbf{Q}}^n = \frac{\mathbf{Q}^n - 2\mathbf{Q}^{n-1} + \mathbf{Q}^{n-2}}{\Delta t^2} \quad , \quad O(\Delta t) \quad (3.95)$$

$$\dot{\mathbf{Q}}^n = \frac{\mathbf{Q}^n - \mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} \quad , \quad O(\Delta t) \quad (3.96)$$

O erro dessa linearização possui uma relação linear com a discretização do tempo de análise. Quanto menor o tempo entre medições, menor será o erro. Essas equações de diferenças finitas e a ordem de seus erros são obtidos através de séries de Taylor. Substituindo as equações 3.95 e 3.96 em 3.94 e evidenciando o grau de liberdade global do tempo presente \mathbf{Q}^n , encontra-se:

$$\mathbf{Q}^n = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{F}^n - \mathbf{M}\mathbf{Q}_2 - \mathbf{C}\mathbf{Q}_1) \quad (3.97)$$

Onde,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{\Delta t}(-\mathbf{Q}^{n-1}) \quad (3.99)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{1}{\Delta t^2}(\mathbf{Q}^{n-2} - 2\mathbf{Q}^{n-1}) \quad (3.100)$$

Como isso é possível selecionar a linha no vetor de \mathbf{Q}^n referente ao grau de liberdade de deslocamento na posição desejada, armazenar os dados e realizar uma série de iterações onde os valores presentes n se tornam os valores passados $n - 1$ e $n - 2$ possibilitando a plotagem do gráfico de comportamento transiente.

3.4.2 Amplitudes de vibrações em regime permanente no domínio da frequência

Uma das formas mais simples de entender como a frequência do forçamento influencia na amplitude de vibração é transferir o problema do domínio temporal para o domínio da frequência. A equação 3.101 representa a equação de movimento com forçamento externo no domínio do temporal, para modificar a variável tempo para frequência é aplicada a transformada de Laplace. Um ponto importante a ser ressaltado desse artifício é que ele não descreve o comportamento inicial das amplitudes (análise transiente por diferenças finitas detecta), apenas descreve o modo como a vibração atua após certo período de tempo, no qual a oscilação já está estabilizada (ou divergiu). Se forem tirados trechos desse movimento oscilatório sem conhecimento do tempo decorrido, não haverão diferenças nas formas, demonstrando então que há independência do tempo (o que caracteriza regime permanente).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{Q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.101)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{Q}(t)) = \mathcal{L}(\mathbf{F}(t)) \quad (3.102)$$

$$\mathbf{M}(s^2\hat{\mathbf{Q}}(s) - s\mathbf{Q}(0^+) - \dot{\mathbf{Q}}(0^+)) + \mathbf{C}(s\hat{\mathbf{Q}}(s) - \dot{\mathbf{Q}}(0^+)) + \mathbf{K}\hat{\mathbf{Q}}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(0^+) &= 0 \\ \dot{\mathbf{Q}}(0^+) &= 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

As condições iniciais são consideradas nulas para facilitar o desenvolvimento de problema, com isso chega-se numa relação direta e linear, equação 3.105, entre forçamentos, deslocamentos, matrizes do sistema e variável s a ser escolhida.

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})\hat{\mathbf{Q}}(s) = \hat{\mathbf{F}}(s) \quad (3.105)$$

A matrix $\mathbf{G}(s)$ é chamada de função de impedância e $\mathbf{H}(s)$, sua inversa, é a função de transferência, na qual essa faz o vínculo direto entre deslocamento e forçamentos.

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) \quad (3.106)$$

$$\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1} \quad (3.107)$$

Para o estudo de vibrações em regime permanente a variável s escolhida é $i\Omega$, no qual Ω é a frequência de forçamento.

$$\mathbf{H}(s)|_{s=i\Omega} = \mathbf{H}(i\Omega) = (-\mathbf{M}\Omega^2 + \mathbf{C}i\Omega + \mathbf{K})^{-1} \quad (3.108)$$

Como a variável s é complexa, os termo da função de transferência $\mathbf{H}(s)$ também são complexos. Após as multiplicações matriciais, os sentidos físicos da parte real e imaginária são, respectivamente, a amplitude de movimento e a diferença de fase entre a oscilação de deslocamento e o forçamento.

Para um caso mais genérico de múltiplos graus de liberdade, o amplitude total num nó específico $\hat{Q}_n(s)$ não é determinada apenas com a força que atua sobre ele, pois há também a influência de todos os outros nós e suas respectivas forças. Por exemplo, o termo $H_{1n}\hat{F}_n(s)$ representa a influência na amplitude de vibração do primeiro nó relacionada à força $\hat{F}_n(s)$ aplicada no n -ésimo nó, que está presente no cálculo da amplitude de vibração total na equação 3.111.

$$\hat{\mathbf{Q}}(s) = \mathbf{H}(s)\hat{\mathbf{F}}(s) \quad (3.109)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_1(s) \\ \hat{Q}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{Q}_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_1(s) \\ \hat{F}_2(s) \\ \vdots \\ \hat{F}_n(s) \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1(s) &= H_{11}\hat{F}_1(s) + H_{12}\hat{F}_2(s) + \dots + H_{1n}\hat{F}_n(s) \\ \hat{Q}_2(s) &= H_{21}\hat{F}_1(s) + H_{22}\hat{F}_2(s) + \dots + H_{2n}\hat{F}_n(s) \\ &\vdots \\ \hat{Q}_n(s) &= H_{n1}\hat{F}_1(s) + H_{n2}\hat{F}_2(s) + \dots + H_{nn}\hat{F}_n(s) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Com esse método de obtenção dos deslocamento desenvolvido, são feitas estruturas de repetição variando a frequência de forçamento para representar graficamente quais são as frequências críticas. Junto a isso, também são modificados os parâmetros do relacionados com a rigidez da fundação para verificar como o isso afeta as amplitudes.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Validação dos elementos e funções de forma através de um sistema de carregamento uniformemente distribuído

Antes de resolver e analisar o problema de vibração causa escoamento interno em tubos biapoiados foi feita a validação do modelo de elementos finitos e suas funções de forma através de um sistema mais simples de carregamento uniformemente distribuído mostrado na Figura 4.1. Nesse modelo, só são considerados os termos de rigidez do tubo e o forçamento externo da força peso, conforme a equação 4.1.

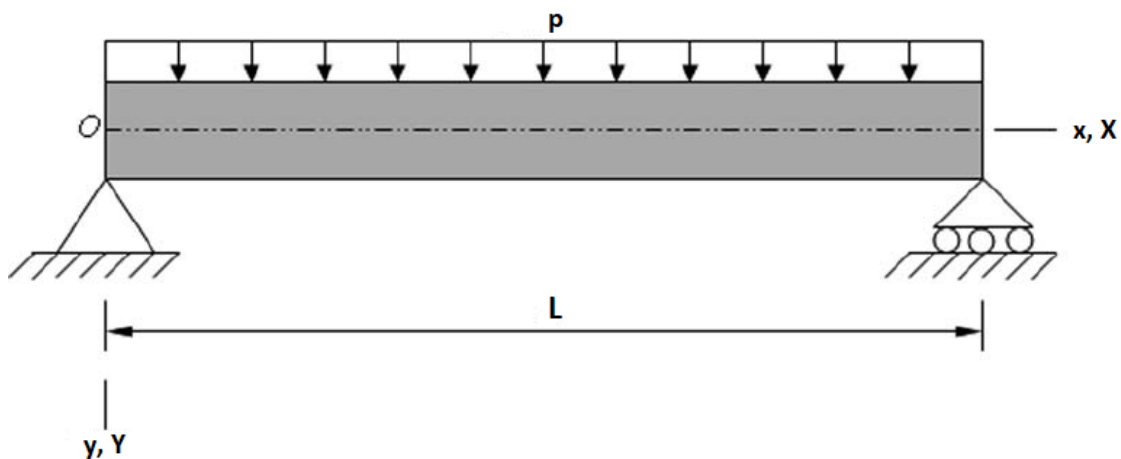


Figura 4.1: Carregamento uniformemente distribuído num tubo biapoiado

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = p_0 = \rho_t A_t g \quad (4.1)$$

Para encontrar as soluções analíticas gerais para a deflexão vertical, rotação, força cortante e momento fletor, a equação anterior é derivada quatro vezes gerando assim quatro constantes a serem determinadas que dependem das condições de contorno.

$$EI \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = p_0 x + a_1 = -V(x) \quad (4.2)$$

$$EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{p_0 x^2}{2} + a_1 x + a_2 = -M(x) \quad (4.3)$$

$$EI \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{p_0 x^3}{6} + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 x + a_3 \quad (4.4)$$

$$EIY(x) = \frac{p_0 x^4}{24} + a_1 \frac{x^3}{6} + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 x + a_4 \quad (4.5)$$

Para o caso em análise, viga simplesmente apoiada, as condições de contorno são extraídas das deflexões e dos momentos fletores nulos nas extremidades, conforme as equações abaixo.

$$Y(0) = Y(L) = 0 \quad , \quad M(0) = M(L) = 0 \quad (4.6)$$

Reescrevendo substituindo esse valores na equações anteriores, encontra-se:

$$V(x) = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = \frac{p_0 L}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (4.7)$$

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{p_0 L^2}{2} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right) \quad (4.8)$$

$$\theta(x) = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{p_0 L^3}{24EI} \left(1 - 6\frac{x^2}{L^2} + 4\frac{x^3}{L^3}\right) \quad (4.9)$$

$$Y(x) = \frac{p_0 L^4}{24EI} \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{L^4}\right) \quad (4.10)$$

O modelo em elemento finitos seguiu estrutura mostra no capítulo anterior, no qual foram usadas as mesmas funções de forma para construir as matrizes elementares de rigidez e o forçamento externo. Em seguida essas matrizes foram integradas em matrizes globais pelo princípio da superposição. A forma geral do vetor elementar de forçamento é mostrada na equação 3.79. Para esse modelo mais simples de carregamento uniforme, a função $f(x, t)$ é igual p_0 . Ou seja, é uma constante e independente do tempo e espaço. Logo, resolvendo a integral para cada uma das

quatro funções de forma, encontra-se o vetor de forçamento abaixo.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{p_0 l}{2} \\ \frac{p_0 l^2}{12} \\ \frac{p_0 l}{2} \\ -\frac{p_0 l^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Tendo esse vetor definido, são montadas as matrizes globais de rigidez \mathbf{K} e forçamento \mathbf{F} , pelo princípio da superposição, com intuito de obter os deslocamentos verticais e ângulos contidos no vetor global de graus de liberdade \mathbf{Q} .

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (4.13)$$

Para a obtenção das forças cortantes e momentos fletores, são retiradas as quatro linhas do vetor \mathbf{Q} referentes ao elemento e é feita a multiplicação matricial com a matriz elementar de rigidez. O resultado desse produto é somado as reações da extremidade para encontrar os duas grandezas físicas procuradas.

Com a posse dos dados da solução analítica e da solução numérica, são plotados os gráficos comparativos das quatro grandezas associadas à equação da viga de Euler-Bernoulli.

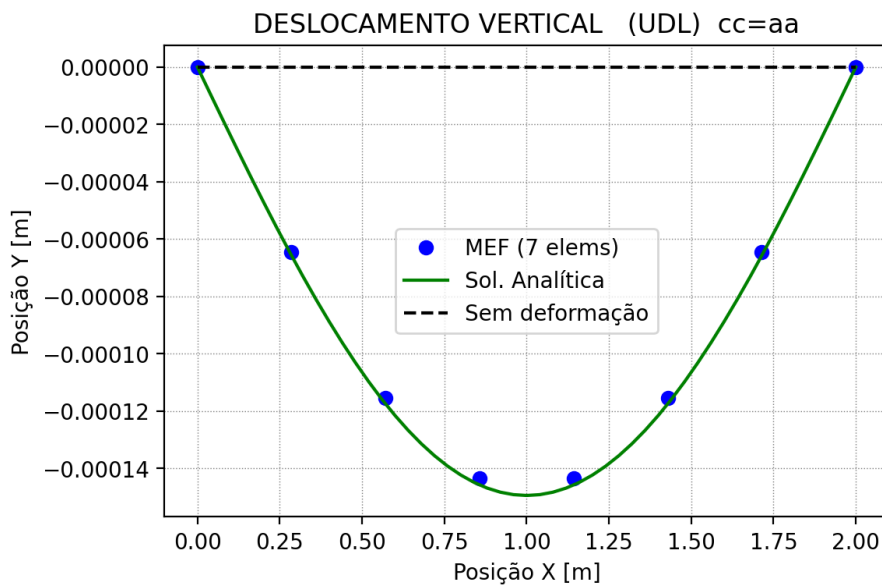


Figura 4.2: Deflexão ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica

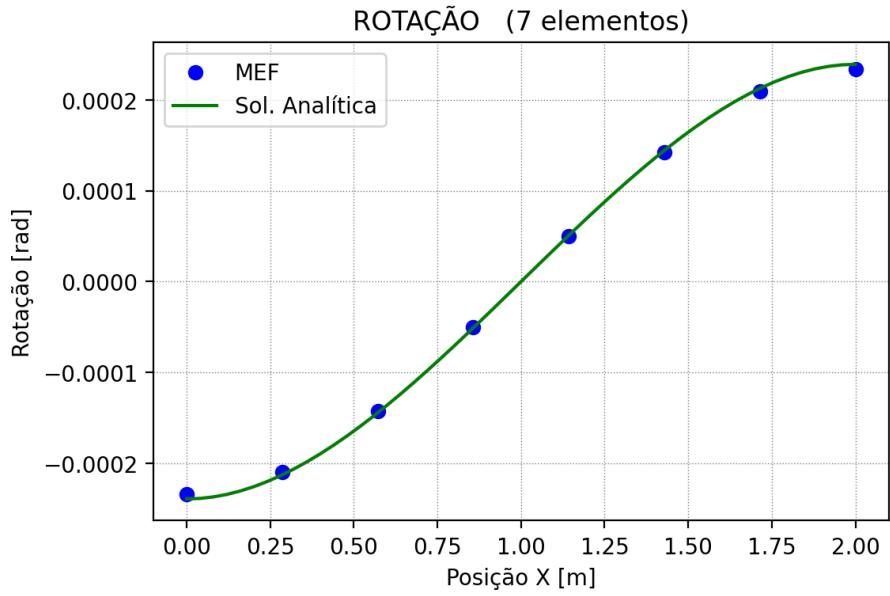


Figura 4.3: Rotação ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica

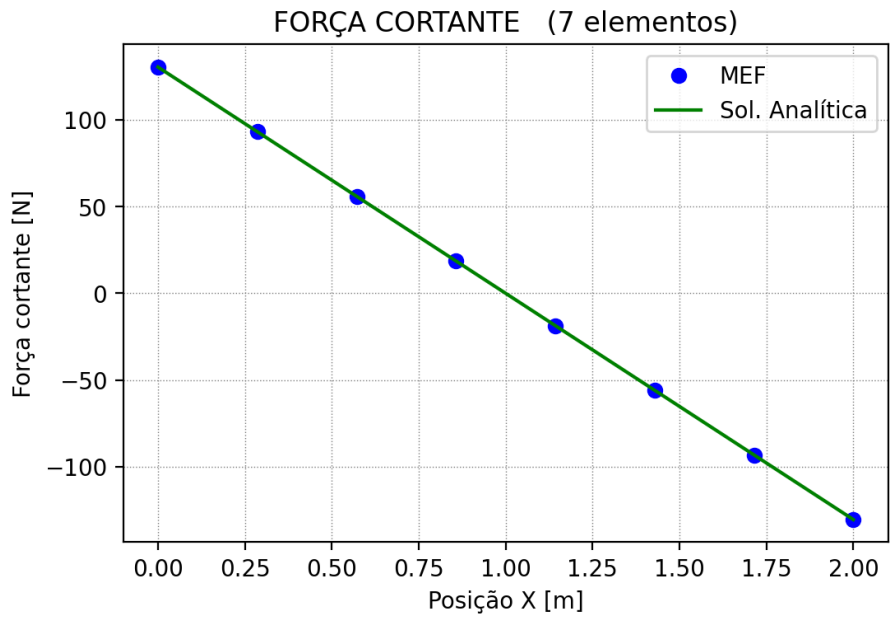


Figura 4.4: Força cortante ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica

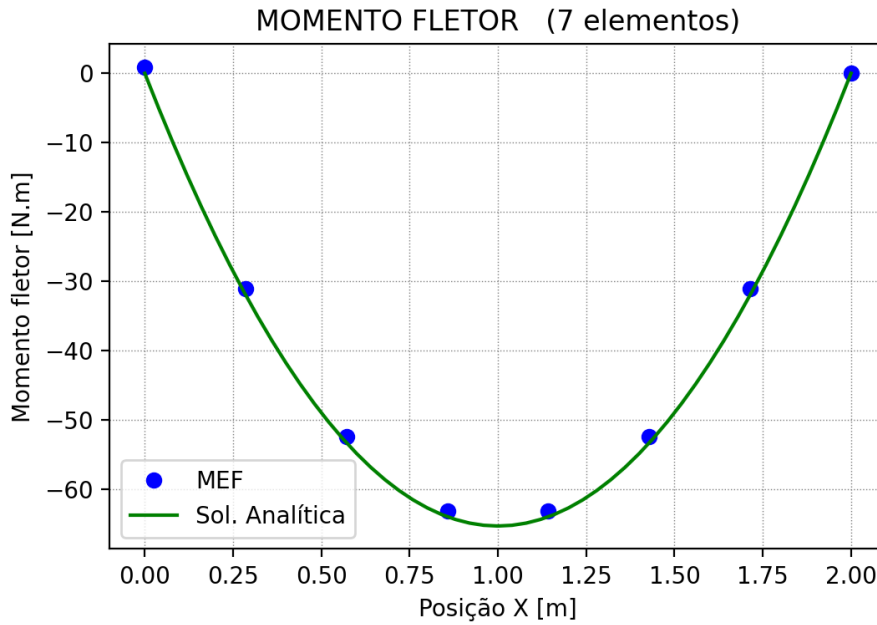


Figura 4.5: Momento fletor ao longo do tubo - Solução analítica vs numérica

Por inspeção é possível notar que a solução numérica possui um bom desempenho, pois acompanha de forma precisa a solução analítica mesmo com poucos elementos para análise do deslocamento vertical (Figura 4.2), rotação (Figura 4.3), força cortante (Figura 4.4) e momento fletor (Figura 4.5). A convergência dos erros e ordem do seu decaimento, medidas no meio tubo, são mostrados nas figuras abaixo. Onde a Figura 4.6 representa o erro absoluto entre o modelo numérico e a solução analítica, a Figura 4.7 mostra esse erro de forma relativa e a Figura 4.8 ilustra qual é a sua ordem de decaimento. Através delas é possíveis ver que o erro absoluto do deslocamento possui um decaimento quadrático e sua convergência ocorre por volta de 10 elementos. As informações sobre os dados utilizados estão no apêndice A no primeiro código Python e na Tabela 4.1.



Figura 4.6: Convergência do erro absoluto do deslocamento

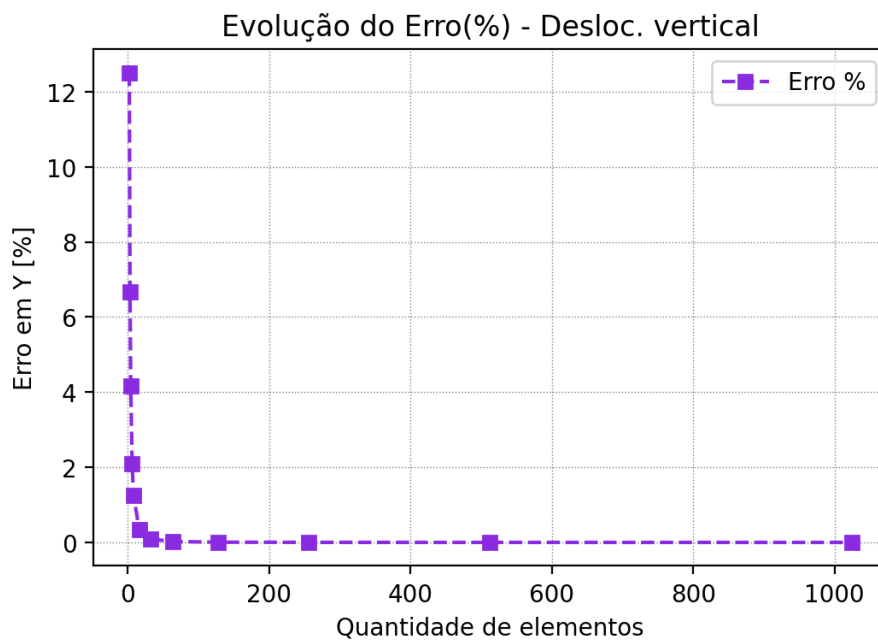


Figura 4.7: Convergência do erro percentual do deslocamento

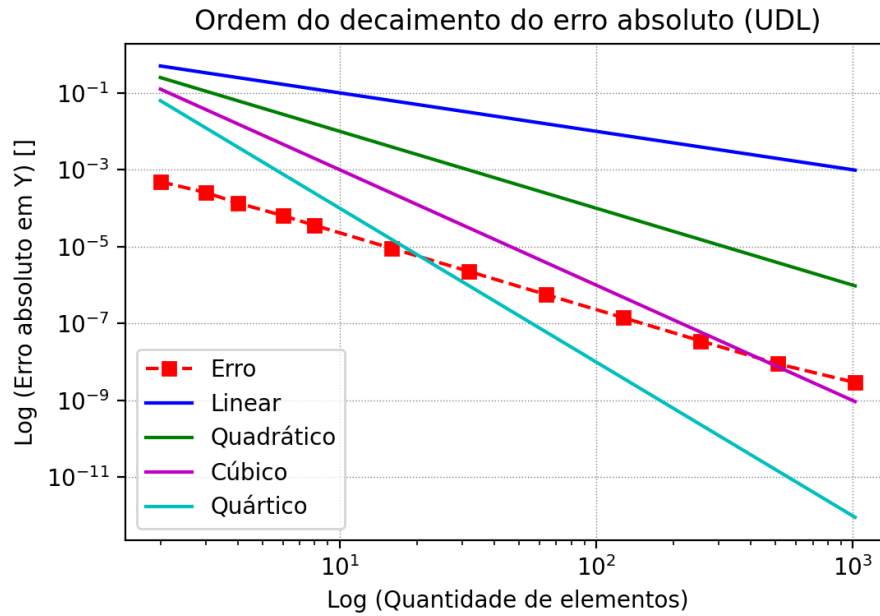


Figura 4.8: Ordem de decaimento do erro - convergência do erro absoluto do deslocamento na escala Log-Log

Tabela 4.1: Dados do modelo simplificado sob carregamento uniformemente distribuído

DADOS			
E = 200e9	Pa	Módulo de elasticidade	
D = 0,01	m	Diâmetro externo	
d = 0,008	m	Diâmetro interno	
I = $\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4	Momento de inércia de área	
$\rho_t = 7800$	kg/m^3	Massa específica do tubo	
L = 2,0	m	Comprimento do tubo	
g = 10,0	m/s^2	Gravidade	

4.2 Influência da velocidade de escoamento e outros parâmetros no comportamento das frequências naturais do sistema

4.2.1 Velocidade de escoamento vs Frequências naturais - 3 primeiros modos fundamentais de vibração

Com as funções de forma validadas pelo caso anterior, o sistema com escoamento interno e fundação Winkler é construído utilizando os mesmos elementos. Após ser feito todo o procedimento apresentado nas seções 3.2 e 3.3 para a obtenção das frequências naturais, é montada uma estrutura de repetição que coleta as três primeiras frequências naturais para velocidades de escoamento diferentes. Uma observação relevante é que apenas uma das frequências do par conjugado é utilizada, já que ambas apresentam o mesmo comportamento. A Figura 4.9 é a representação gráfica desses dados.

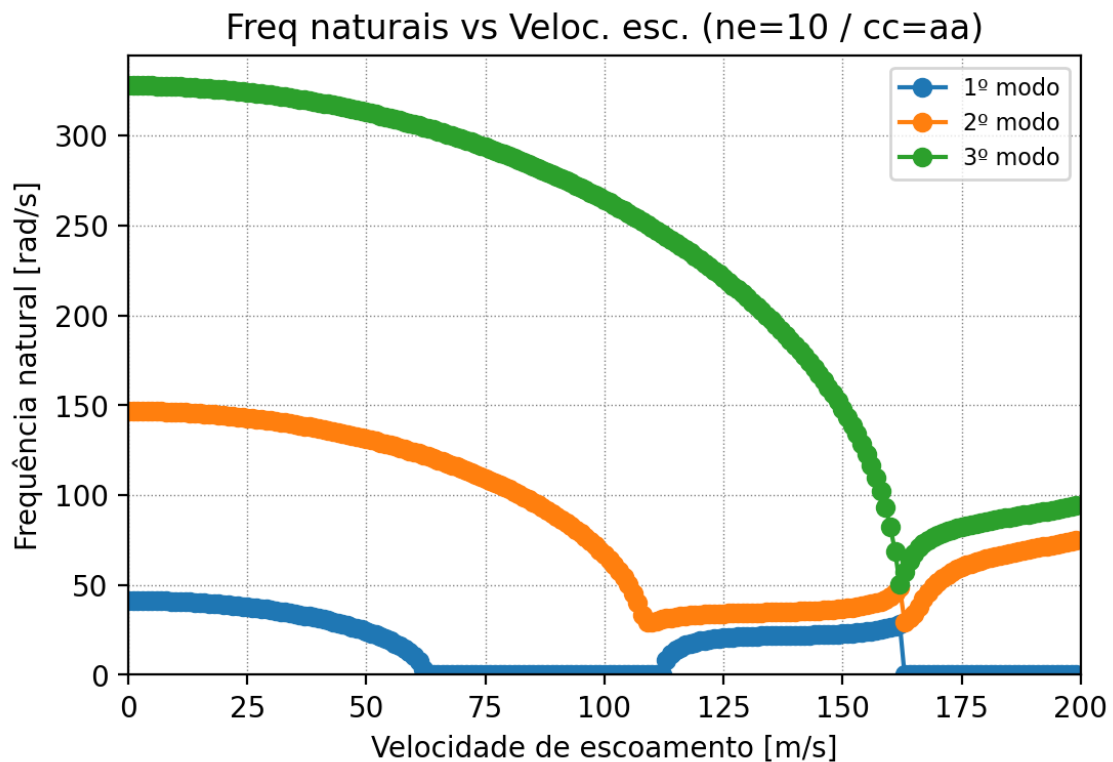


Figura 4.9: Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - 3 primeiros modos fundamentais de vibração

Nota-se que o aumento da velocidade reduz a frequência natural do sistema, pois, conforme as equações 3.60 e 3.77, a rigidez da força centrífuga causada pelo escoamento é negativa e contribui para a redução da rigidez total do sistema. Esse efeito é proporcional ao quadrado da velocidade de escoamento, por isso ocorre um decaimento rápido das frequências naturais em velocidade mais elevadas. A velocidade crítica desse sistema plotado (primeiro ponto onde a frequência natural se iguala à zero) é aproximadamente $61m/s$. Isso indica que o sistema está instável para velocidades maiores que essa, já que qualquer mínima perturbação oscilatória leva o tubo à ressonância.

Tabela 4.2: Dados da análise da frequência natural para diferentes modos de vibração

DADOS		
E = 200e9	Pa	Módulo de elasticidade
D = 0.01	m	Diâmetro externo
d = 0.008	m	Diâmetro interno
I = $\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4	Momento de inércia de área
ρ_t = 8000	kg/m^3	Massa específica do tubo
ρ_l = 1000	kg/m^3	Massa específica do líquido
L = 2.0	m	Comprimento do tubo
k_v = 2e4	N/m^3	Módulo de rigidez da fundação
μ_v = 1e2	$N.s/m^3$	Módulo de viscosidade da fundação
g = 10.0	m/s^2	Gravidade

4.2.2 Influência de parâmetros do sistema na frequência natural

Para essa subseção apenas a frequência natural do primeiro modo de vibração é focada, pois ela é a responsável pelo menor velocidade crítica. Os parâmetros analisados são: rigidez da fundação, viscosidade da fundação (dissipação), comprimento do tubo e massa específica do fluido.

Rigidez da fundação

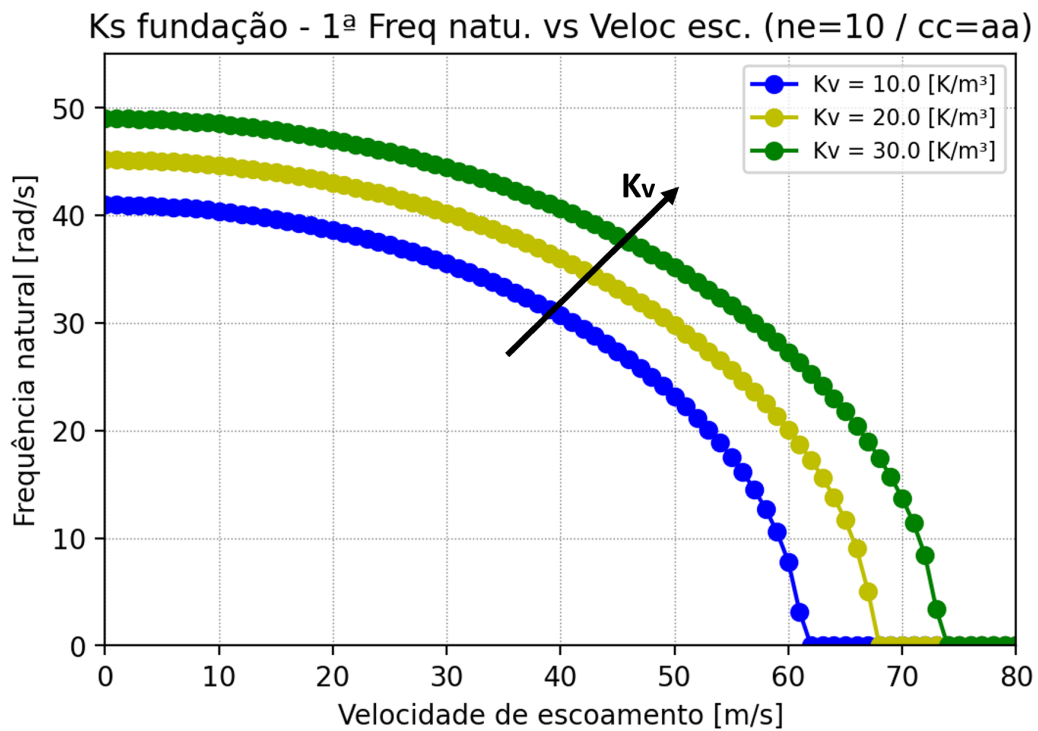


Figura 4.10: Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência da rigidez da fundação

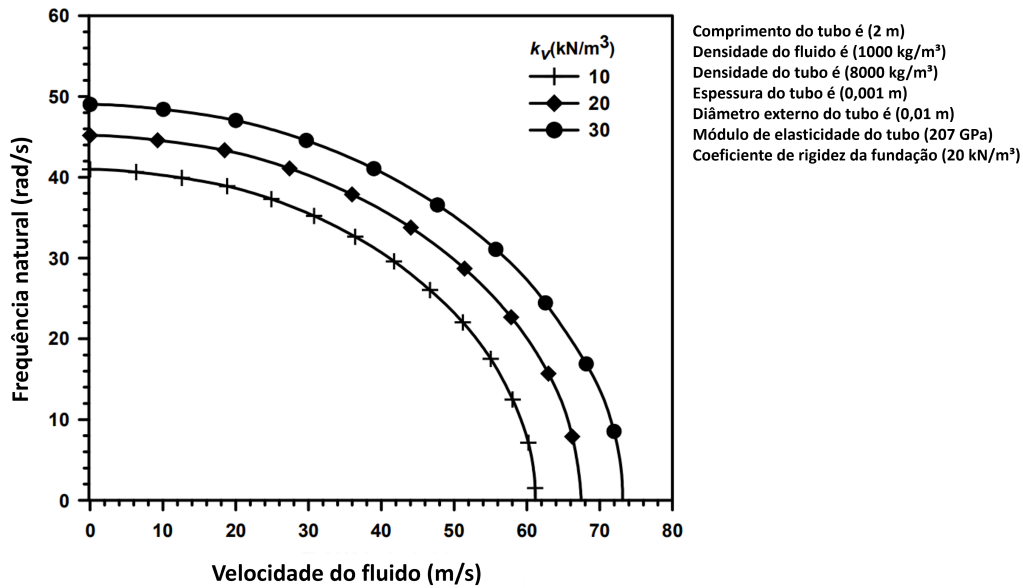


Figura 4.11: Verificação com a referência [5] - influência da rigidez da fundação

Por inspeção nota-se que o aumento da rigidez da fundação faz com que a velocidade crítica seja maior, assim como as frequências naturais. Os resultados obtidos são praticamente idênticos aos da referência [5].

Tabela 4.3: Dados da análise da influência da rigidez da fundação na frequência natural e velocidade crítica

DADOS			
E	=	200e9	Pa Módulo de elasticidade
D	=	0.01	m Diâmetro externo
d	=	0.008	m Diâmetro interno
I	=	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4 Momento de inércia de área
ρ_t	=	8000	kg/m^3 Massa específica do tubo
ρ_l	=	1000	kg/m^3 Massa específica do líquido
L	=	2.0	m Comprimento do tubo
k_v	=	1e4, 2e4, 3e4	N/m^3 Módulo de rigidez da fundação
μ_v	=	1e2	$N.s/m^3$ Módulo de viscosidade da fundação
g	=	10.0	m/s^2 Gravidade

Viscosidade da fundação

Figura 4.12: Dados da análise da influência da viscosidade da fundação na frequência natural e velocidade crítica

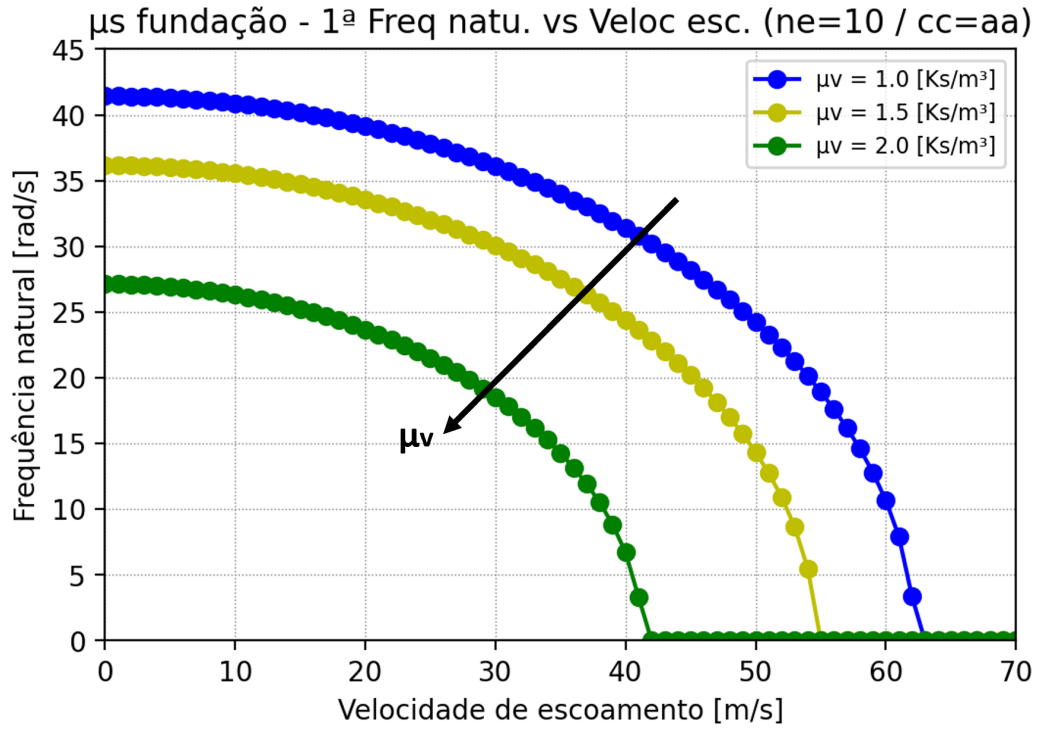


Figura 4.13: Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência da viscosidade da fundação

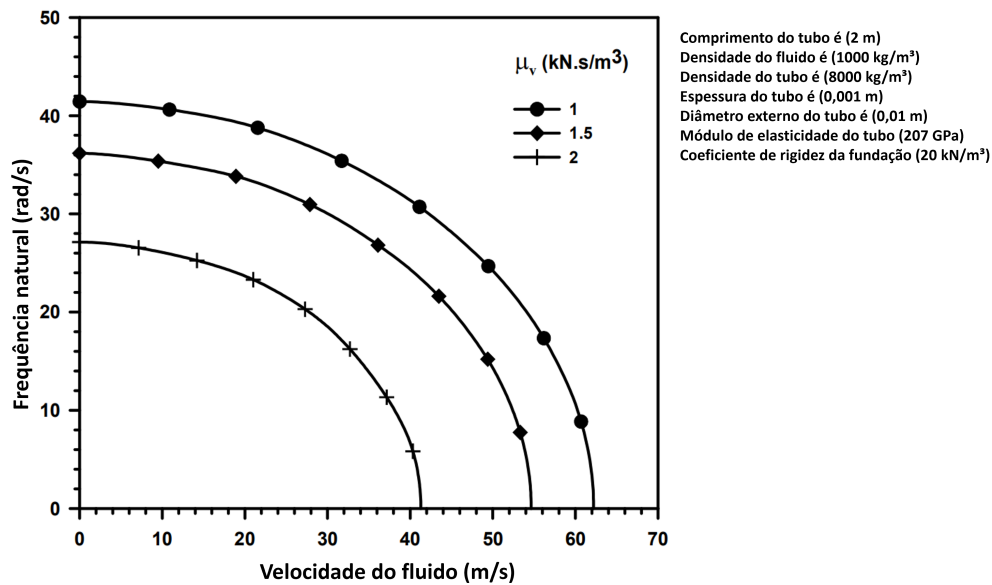


Figura 4.14: Verificação com a referência [5] - influência da viscosidade da fundação

Por inspeção nota-se que o aumento da viscosidade da fundação faz com que a velocidade crítica seja menor, assim como as frequências naturais. Os resultados obtidos são praticamente idênticos aos da referência [5]. Isso demonstra a acurácia do modelo desenvolvido em código Python.

DADOS			
E	=	200e9	Pa Módulo de elasticidade
D	=	0.01	m Diâmetro externo
d	=	0.008	m Diâmetro interno
I	=	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4 Momento de inércia de área
ρ_t	=	8000	kg/m^3 Massa específica do tubo
ρ_l	=	1000	kg/m^3 Massa específica do líquido
L	=	2.0	m Comprimento do tubo
k_v	=	2e4	N/m^3 Módulo de rigidez da fundação
μ_v	=	1.0e3, 1.5e3, 2.0e3	$N.s/m^3$ Módulo de viscosidade da fundação
g	=	10.0	m/s^2 Gravidade

Comprimento do tubo

Figura 4.15: Dados da análise da influência do comprimento do tubo na frequência natural e velocidade crítica

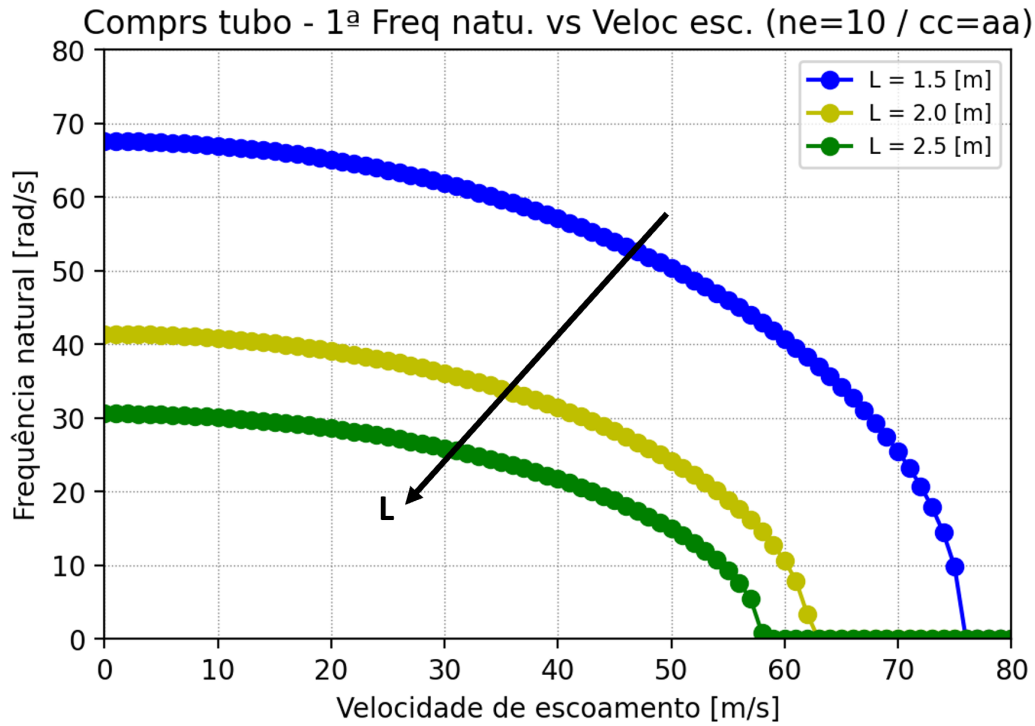


Figura 4.16: Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência do comprimento do tubo

Por inspeção nota-se que o aumento do comprimento do tubo faz com que a velocidade crítica seja menor, assim como as frequências naturais.

DADOS				
E	=	200e9	Pa	Módulo de elasticidade
D	=	0.01	m	Diâmetro externo
d	=	0.008	m	Diâmetro interno
I	=	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4	Momento de inércia de área
ρ_t	=	8000	kg/m^3	Massa específica do tubo
ρ_l	=	1000	kg/m^3	Massa específica do líquido
L	=	1.5, 2.0, 2.5	m	Comprimento do tubo
k_v	=	2e4	N/m^3	Módulo de rigidez da fundação
μ_v	=	1e2	$N.s/m^3$	Módulo de viscosidade da fundação
g	=	10.0	m/s^2	Gravidade

Densidade do fluido

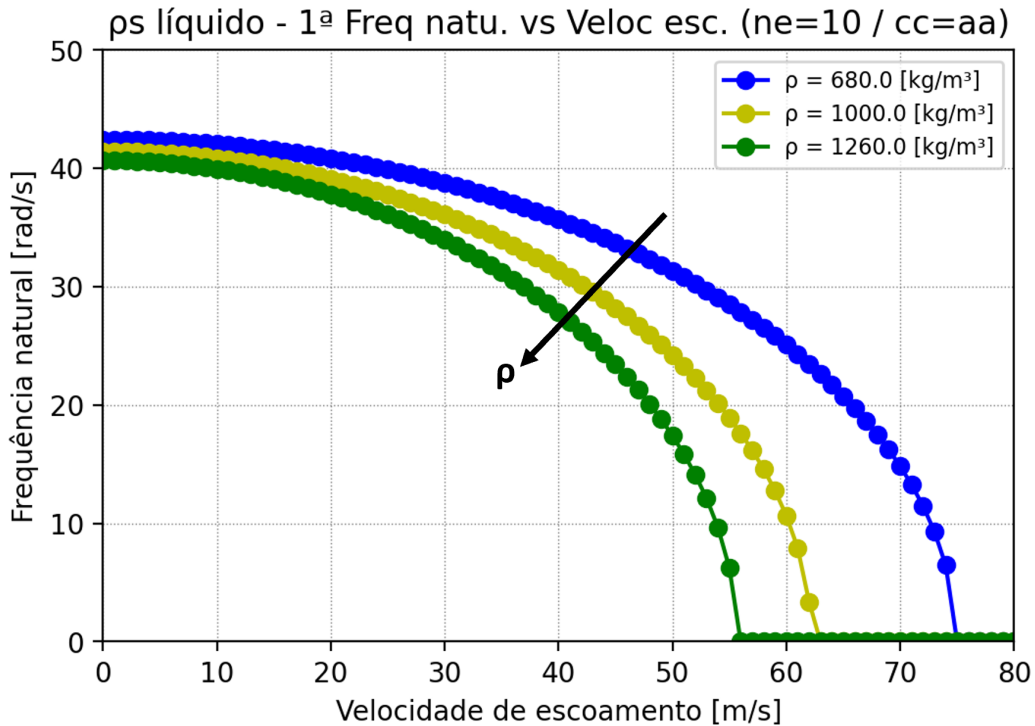


Figura 4.17: Frequências naturais vs Velocidade de escoamento - influência da densidade do fluido

Por inspeção nota-se que o aumento da densidade do tubo faz com que a velocidade crítica seja menor, assim como as frequências naturais. Os esses efeitos

desse parâmetro são mais intensos quanto maior for a velocidade de escoamento.

Tabela 4.4: Dados da análise da influência da densidade do fluido na frequência natural e velocidade crítica

DADOS			
E	= 200e9	Pa	Módulo de elasticidade
D	= 0.01	m	Diâmetro externo
d	= 0.008	m	Diâmetro interno
I	= $\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4	Momento de inércia de área
ρ_t	= 8000	kg/m^3	Massa específica do tubo
ρ_l	= 680, 1000, 1260	kg/m^3	Massa específica do líquido
L	= 2.0	m	Comprimento do tubo
k_v	= 2e4	N/m^3	Módulo de rigidez da fundação
μ_v	= 1e2	$N.s/m^3$	Módulo de viscosidade da fundação
g	= 10.0	m/s^2	Gravidade

4.3 Resultados das análises transiente & permanente

4.3.1 Resultados da análise transiente

Para esse estudo foi considerado um carregamento distribuído da força peso com variação harmônica $sen(w_f t)$. O vetor de forçamento elementar está representado abaixo. É fixado a frequência de forçamento w_f em $20 rad/s$ e variada a velocidade de escoamento para que se possa verificar o que está acontecendo com a estabilidade do sistema. O ponto de análise é a parte central do tubo.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{p_0 l}{2} sen(w_f t) \\ \frac{p_0 l^2}{12} sen(w_f t) \\ \frac{p_0 l}{2} sen(w_f t) \\ -\frac{p_0 l^2}{12} sen(w_f t) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

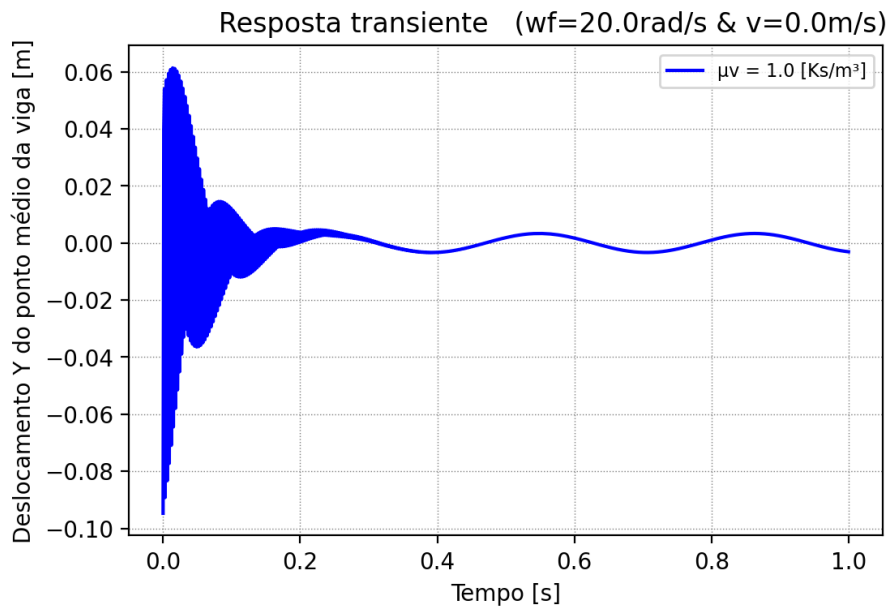


Figura 4.18: Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 0.0 m/s

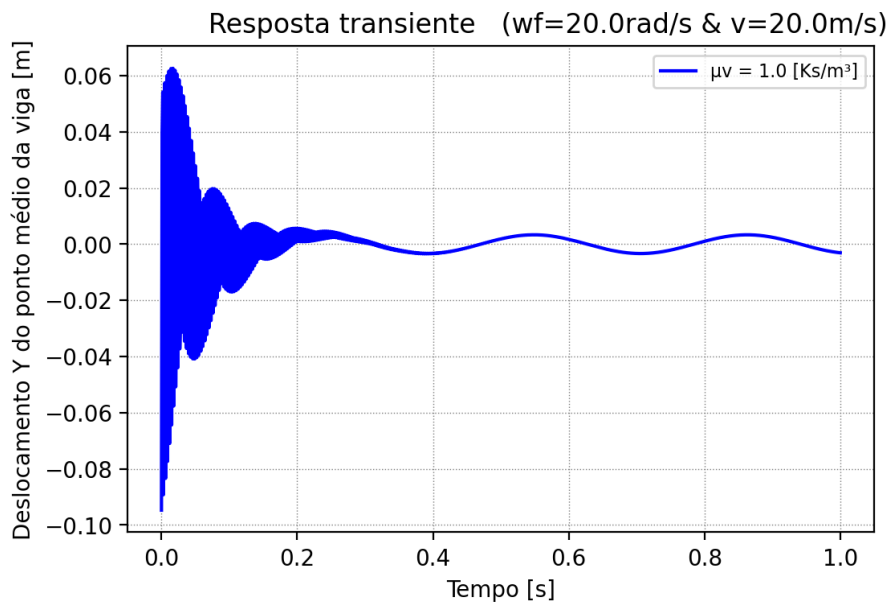


Figura 4.19: Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 20.0 m/s

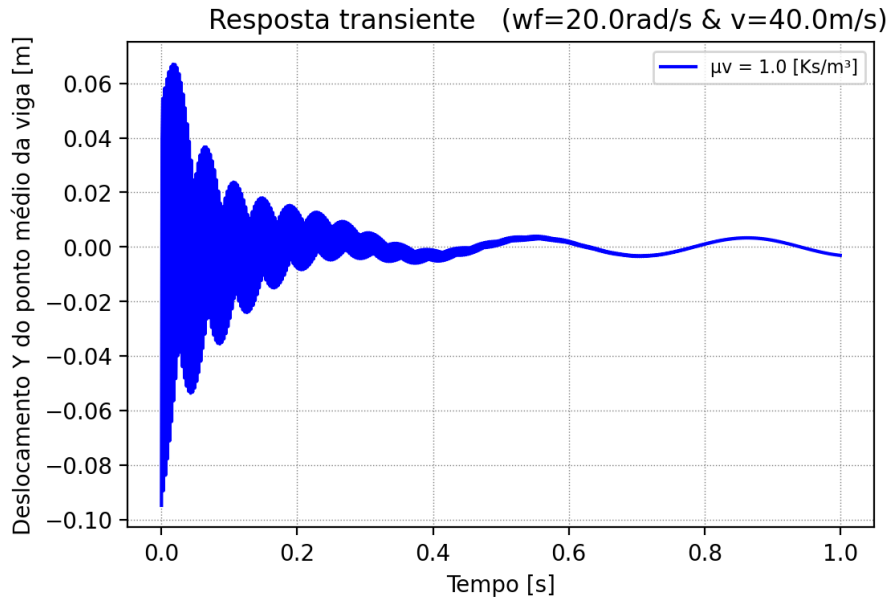


Figura 4.20: Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 40.0 m/s

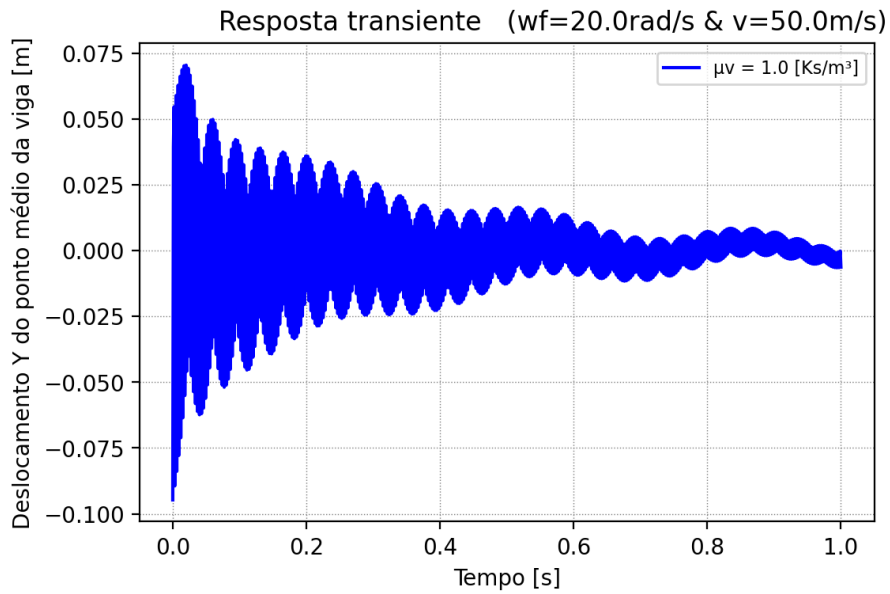


Figura 4.21: Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 50.0 m/s

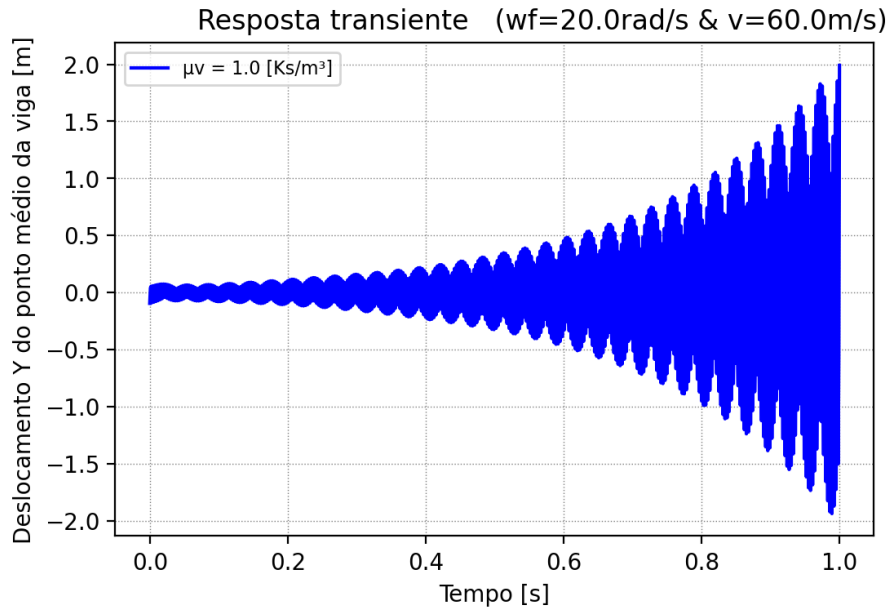


Figura 4.22: Forçamento harmônico - velocidade de escoamento igual a 60.0 m/s

Através dos gráficos da resposta transiente, representados pelas Figuras 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 e 4.22, nota-se que para o forçamento com frequência de forçamento de 20 rad/s que o sistema não possui estabilidade para velocidades de escoamento acima de 60 m/s . A partir da configuração desse sistema, pode-se afirmar que esse resultado é condizente com a curva azul do gráfico da Figura 4.10.

Tabela 4.5: Dados utilizados na análise da resposta transiente para diferentes velocidades de escoamento

DADOS			
E	=	200e9	Pa Módulo de elasticidade
D	=	0.01	m Diâmetro externo
d	=	0.008	m Diâmetro interno
I	=	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4 Momento de inércia de área
ρ_t	=	8000	kg/m^3 Massa específica do tubo
ρ_l	=	1000	kg/m^3 Massa específica do líquido
L	=	2.0	m Comprimento do tubo
k_v	=	1e4	N/m^3 Módulo de rigidez da fundação
μ_v	=	1e2	$N.s/m^3$ Módulo de viscosidade da fundação
g	=	10.0	m/s^2 Gravidade

4.3.2 Resultados da análise permanente

Por fim foi feita a análise em regime permanente das amplitudes de oscilação variando a frequência de forçamento para diferentes velocidades de escoamento e rigidezes da fundação, conforme o modelo descrito no capítulo anterior. Tendo em vista que os mesmo dados forma utilizados, nota-se os gráfico da Figura 4.23 é condizente com as curvas da Figura 4.10. Pois para a velocidade de escoamento de 0.0 m/s , é observado na curvas amarela que a frequência natural é de aproximadamente 45 rad/s , local onde a amplitude tende ao infinito na curva laranja no gráfico de resposta em frequência (mesmo dados utilizados para ambas as curvas). O mesmo se aplica para uma velocidade de escoamento diferente, mostrada na Figura 4.24 onde a velocidade de escoamento é 50.0 m/s . Isso produz uma frequência natural de aproximadamente 30 rad/s em ambas as curvas, o que demonstra coerência entre os resultados.

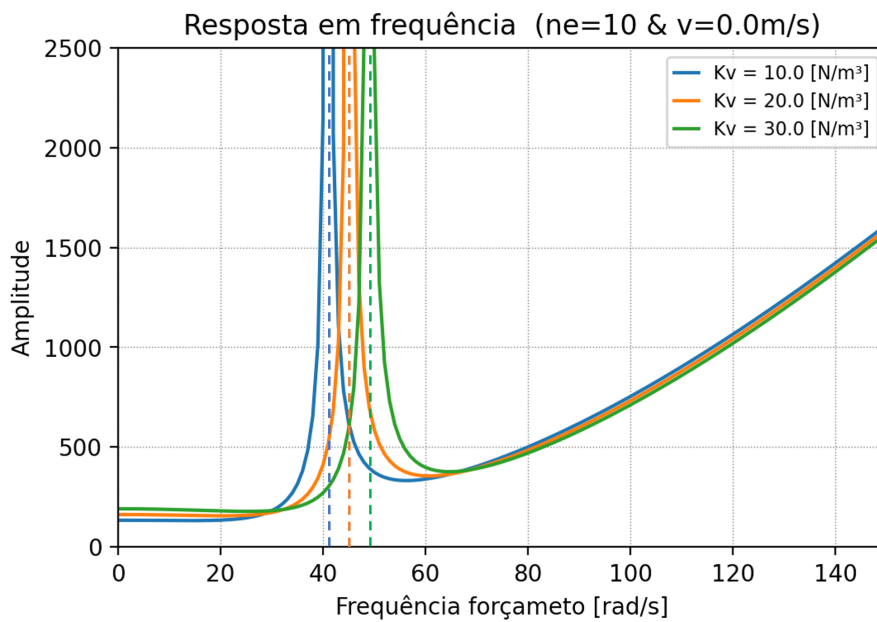


Figura 4.23: Respostas em frequência para velocidade de 0.0 m/s

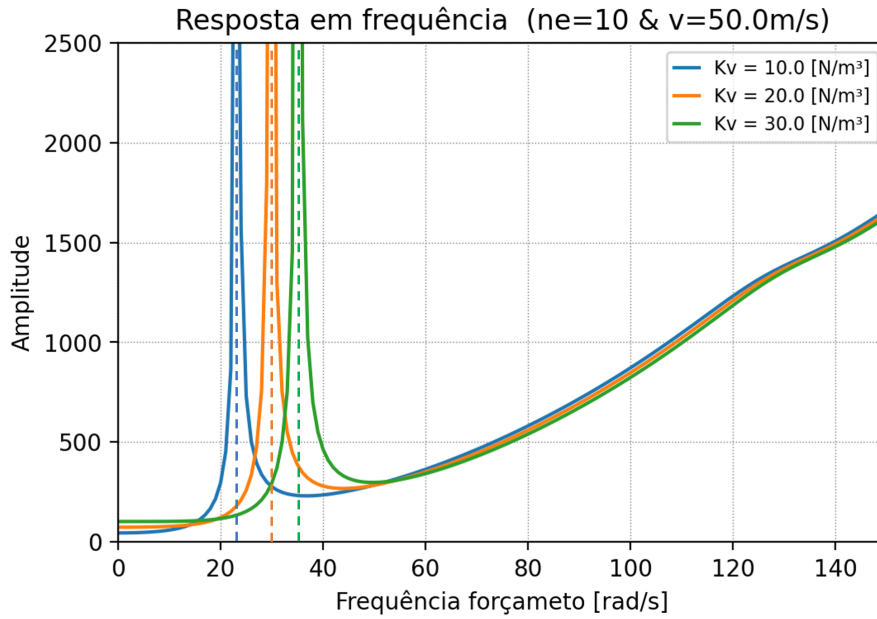


Figura 4.24: Resposta em frequência para velocidade de 50.0 m/s

Tabela 4.6: Dados utilizados na análise da resposta permanente no domínio da frequência

DADOS			
E	= 200e9	Pa	Módulo de elasticidade
D	= 0.01	m	Diâmetro externo
d	= 0.008	m	Diâmetro interno
I	= $\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	m^4	Momento de inércia de área
ρ_t	= 8000	kg/m^3	Massa específica do tubo
ρ_l	= 1000	kg/m^3	Massa específica do líquido
L	= 2.0	m	Comprimento do tubo
k_v	= 1e4, 2e4, 3e4	N/m^3	Módulo de rigidez da fundação
μ_v	= 1e2	$N.s/m^3$	Módulo de viscosidade da fundação
g	= 10.0	m/s^2	Gravidade

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas as equações de movimento de um tubo com escoamento interno do escoamento interno, extremidade apoiadas e fundação Winkler, obtidas através do balanço de forças e energias, numa abordagem do Método dos Elementos Finitos onde o Método de Galerkin e funções de forma Hermite foram aplicados nas equações de governo do sistema. Pois havia o interesse de modelar os sistema tubos condutores de fluidos e entender o seu comportamento dinâmico relacionado com vibrações, já que eles desempenham papéis de alta importância funcional e econômica das indústrias de óleo e gás, nuclear, aeroespacial, etc.

De início, foi desenvolvido um sistema simples, com soluções analíticas conhecidas, de um tubo com carregamento uniformemente distribuído para a validação das funções de forma. Para modelagem com mais de 10 elemento (quantidade utilizada nos demais análises), o erro do modelo numérico é menor que 1% e seu decaimento é quadrático conforme é aumentada a quantidade de elementos.

Em seguida, foi utilizado o modelo completo para analisar como diferentes parâmetros afetam a dinâmica do sistema. As frequências naturais de todos do modos de vibração diminuem com aumento da velocidade que fluido se movimenta, reduzindo então a faixa de estabilidade do sistema. Pois o termo de rigidez da força centrífuga contribui para a redução da rigidez total do sistema com o aumento da velocidade de escoamento. O aumento da rigidez da função faz com que a frequência natural e a velocidade crítica aumentem, já o aumento da viscosidade de fundação, comprimento do tubo entre os apoios e densidade do fluido produz o efeito contrário, reduzindo a frequência natural e a velocidade crítica. Esses resultados foram válidos

e equivalentes aos obtidos na referências [5].

Por fim, foram feitas as análises no regime transiente e regime permanente no domínio da frequência para avaliar o graus da amplitude de oscilações e encontrar coerência nos resultados através de diferentes abordagem, o que foi confirmado. Foram encontrados, para os mesmos dados, as mesmas configurações de que produzem ressonâncias para todas as três análises desenvolvidas. Portanto nos projetos de sistemas de tubulações é importante ser feita a análise de vibrações que leva em consideração a interação fluido-estrutura do escoamento interno, pois esse fenômeno fazer com o sistema falhe e é necessário das mais atenção àqueles que possuem velocidade elevadas.

Para complementar esse trabalho em futuras análise, experimentos em ambientes controlados poderiam ser conduzidos com a intenção de ser uma nova fonte resultados para validar aquilo que foi encontrado. Além disso, o modelo computacional 1D pode ser modificado para analisar as outras três possíveis condições de contorno (tubo em balanço, fixo-fixo e fixo-apoio) e podem ser feitas análise mais detalhadas utilizando modelos 2D e 3D.

Referências Bibliográficas

- [1] LOGAN, D., “First course in finite element analysis”, *Brooks/Cole*, 2002.
- [2] DOS ANJOS, G. R., *Computação científica para engenheiros*. PEM/COPPE/UFRRJ: Rio de Janeiro, RJ, 2020.
- [3] FISH, J., BELYTSCHKO, T., *A first course in finite elements*. v. 1. John Wiley & Sons New York, 2007.
- [4] BLEVINS, R. D., “Flow-induced vibration”, *New York*, 1977.
- [5] MOSTAFA, N. H., OTHERS, “Effect of a viscoelastic foundation on the dynamic stability of a fluid conveying pipe”, *International Journal of Applied Science and Engineering*, v. 12, n. 1, pp. 59–74, 2014.
- [6] YI-MIN, H., YONG-SHOU, L., BAO-HUI, L., et al., “Natural frequency analysis of fluid conveying pipeline with different boundary conditions”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 240, n. 3, pp. 461–467, 2010.
- [7] SUN, Y., GU, Y., XIONG, H., “Studied and Their Application of Vibration Control Technologies”, *International Journal of Computer Science Issues (IJCSI)*, v. 10, n. 2 Part 2, pp. 311, 2013.
- [8] DAI, H., WANG, L., NI, Q., “Dynamics of a fluid-conveying pipe composed of two different materials”, *International Journal of Engineering Science*, v. 73, pp. 67–76, 2013.
- [9] ROZIS, N., RAHMAN, A., “A simple method for life cycle cost assessment of water sensitive urban design”, *American Society of Civil Engineers*, pp. 1–11, 2002.

- [10] BUNGARTZ, H.-J., SCHÄFER, M., *Fluid-structure interaction: modelling, simulation, optimisation*. v. 53. Springer Science & Business Media, 2006.
- [11] YI-MIN, H., SENG, G., WEI, W., et al., “A direct method of natural frequency analysis on pipeline conveying fluid with both ends supported”, *Nuclear engineering and design*, v. 253, pp. 12–22, 2012.
- [12] ASHLEY, H., HAVILAND, G., “Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid”, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1950.
- [13] FEODOS'EV, V., “Vibrations and stability of a pipe when liquid flows through it”, *Inzhenernyi Sbornik*, v. 10, n. 1, pp. 69–70, 1951.
- [14] HOUSNER, G., “Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid”, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 1952.
- [15] PAIDOUSSIS, M. P., ISSID, N., “Dynamic stability of pipes conveying fluid”, *Journal of sound and vibration*, v. 33, n. 3, pp. 267–294, 1974.
- [16] LESMEZ, M. W., WIGGERT, D., HATFIELD, F. J., “Modal analysis of vibrations in liquid-filled piping systems”, *Journal of Fluids Engineering*, 1990.
- [17] WIGGERT, D., HATFIELD, F., STUCKENBRUCK, S., “Analysis of liquid and structural transients in piping by the method of characteristics”, *Journal of fluids engineering*, 1987.
- [18] WIGGERT, D., *Fluid transients in flexible piping systems*. Springer, 1996.
- [19] SREEJITH, B., JAYARAJ, K., GANESAN, N., et al., “Finite element analysis of fluid–structure interaction in pipeline systems”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 227, n. 3, pp. 313–322, 2004.
- [20] CHELLAPILLA, K. R., SIMHA, H., “Critical velocity of fluid-conveying pipes resting on two-parameter foundation”, *Journal of sound and vibration*, v. 302, n. 1-2, pp. 387–397, 2007.

- [21] PAIDOUSSIS, M. P., *Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow*. v. 1. Academic press, 1998.
- [22] PAIDOUSSIS, M. P., *Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow*. v. 2. Elsevier Academic press, 2004.
- [23] BENJAMIN, T. B., “Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid-I. Theory”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 261, n. 1307, pp. 457–486, 1962.
- [24] RAO, S. S., *The finite element method in engineering*. Elsevier Science and Technology Books, 2004.
- [25] COOK, R. D., OTHERS, *Concepts and applications of finite element analysis*. John wiley & sons, 2007.
- [26] GRANT, I., *Flow induced vibrations in pipes, a finite element approach*, Ph.D. Thesis, Cleveland State University, 2010.
- [27] LI, Q., DUAN, M., OTHERS, “On the interaction between severe slug buildup and dynamic response of a submerged top-tensioned riser”, *Ocean Engineering*, v. 164, pp. 683–697, 2018.
- [28] PETYT, M., *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge university press, 2010.
- [29] TIMOSHENKO, S., *History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures*. Courier Corporation, 1983.
- [30] WU, M., LOU, J., “Effects of rigidity and internal flow on marine riser dynamics”, *Applied ocean research*, v. 13, n. 5, pp. 235–244, 1991.
- [31] YAMAMOTO, M., “A study about the dynamic behavior of flexible tubes including internal flow”, *Yokohama National University*, 2011.

Apêndice A

Código Fonte - Carregamento uniformemente distribuído

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: Victor Rieger

VIGA BIAPOIADA SOB CARREGAMENTO UNIFORME
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

# from IPython import get_ipython
# get_ipython().run_line_magic('matplotlib', 'qt')

#-----
# DIMENSOES
comp_tubo = 2.0 #comprimento do tubo [m]
D = 0.01 #diametro externo [m]
e = 0.001 #espessura [m]
d = D-2*e #diametro interno [m]
I = (math.pi/64)*(D**4 - d**4) # momento de inercia da secao transversal
    [m^-4]
```

```

#-----
# MATERIAL
E = 200e9 #modulo de elasticidade - aco[Pa]
rho_tubo = 7800 #massa especifica tubo [kg/m^3]
rho_liq = 1000 #massa especifica liquido [kg/m^3]

#-----
# CARREGAMENTOS
A_tubo = (math.pi*D**2)/4 - (math.pi*d**2)/4 #[m^2]
A_liq = (math.pi*d**2)/4 #[m^2]
g = -10.0 #gravidade [m/s^2]
p= g*(A_tubo*rho_tubo + A_liq*rho_liq) #carregento distribuido uniforme
    [N/m]

"""
-----
FUNCAO - Viga c/ carragemto uniforme biapoida
-----
"""
def udl_beam(num_elems):

#-----
# NOS & ELEMENTOS
#-----
    tn = num_elems+1 #numero de nos
    l = comp_tubo/num_elems #todos os elementos com mesmo comprimento

#-----
#MATRIZES DOS ELEMENTOS
#-----
# Matriz de rigidez do tubo - elemento
    const_k = E*I*l**(-3)
    k = np.array([[12 , 6*l , -12 , 6*l ],
                  [6*l , 4*l*l , -6*l , 2*l*l],

```

```

        [-12 , -6*1 , 12 , -6*1 ],
        [6*1 , 2*1*1 , -6*1 , 4*1*1]]) * const_k

#-----
#MATRIZES GLOBAIS
#-----

# Construcao das matrizes globais de rigidez, inercia e amortecimento
    (matrizes "zero")

    K = np.zeros((2*num_elems+2, 2*num_elems+2))
# Soma das matrizes dos elementos na matriz global
    klist=[]
    for i in range(num_elems):
        klist.append(k)
        K_temp = np.zeros((2*num_elems+2,2*num_elems+2))
        K_temp[2*i:2*i+4, 2*i:2*i+4] = k
        K += K_temp

#-----
#Carregamentos (pontuais e distribuidos)
#-----

    forcevect = np.zeros((2*tn,1), dtype=float) #esqueleto vetor de
        forcamento - ZEROS

    tudls = num_elems
    if tudls!=0:
        for i in range(tudls):
            en = i+1
            udl = p
            eqpt1 = udl*1/2 #contribuicao da distribuicao constante p/
                forca
            eqmt = udl*(1**2)/12 #contribuicao da distribuicao constante
                p/ momento
            forcevect[en*2-2,0] = forcevect[en*2-2,0] + eqpt1 #inclusao no
                vetor de carregamento - forca (sentido positivo)

```

```

forcevect[en*2-1,0] = forcevect[en*2-1,0] + eqmt #inclusao no
    vetor de carregamento - momento (sentido negativo)
forcevect[en*2,0] = forcevect[en*2,0] + eqpt1 #inclusao no
    vetor de carregamento - linear (sentido positivo)
forcevect[en*2+1,0] = forcevect[en*2+1,0] - eqmt #inclusao no
    vetor de carregamento - linear (sentido positivo)

#-----
#Condicoes de contorno (CCs)
#-----

dispvect = np.ones((2*tn,1), dtype=float) #esqueleto vetor de
    deslocamento - UNS

nn=1 #primeiro no
suptype='f' # SUPORTE FIXO
if suptype == 'f':
    dispvect[nn*2-2,0]=0 #deslocamento veritcal = "zero"
    dispvect[nn*2-1,0]=0 #deslocamento angular = "zero"
if suptype == 'p':
    dispvect[(nn*2)-2,0]=0 #deslocamento veritcal = "zero"
    forcevect[nn*2-1,0]=0 #momento no no = "zero"

nn=tn #ultimo no
suptype='p' # SUPORTE PIVOTANTE
if suptype == 'f':
    dispvect[nn*2-2,0]=0 #deslocamento veritcal = "zero"
    dispvect[nn*2-1,0]=0 #deslocamento angular = "zero"
if suptype == 'p':
    dispvect[nn*2-2,0]=0 #deslocamento veritcal = "zero"
    forcevect[nn*2-1,0]=0 #momento no no = "zero"

#-----

```

```

#Reducao das matrizes e vetores (p/ deslocamento zero das CCs)
#-----
rcdlist = [] #identificacao de deslocamentos "zero"
for i in range(tn*2):
    if dispvect[i,0] == 0:
        rcdlist.append(i)
rrgsm = np.delete(K, rcdlist, 0) #reducao de linhas da matriz de
    rigidez global
crgsm = np.delete(rrgsm, rcdlist, 1) #reducao de colunas da matriz de
    rigidez global
rgsm = crgsm #matriz global de rigidez reduzida
rforcevect = np.delete(forcevect, rcdlist, 0) #vetor de forcamento
    reduzido
rdispvect = np.delete(dispvect, rcdlist, 0) #vetor de deslocamento
    reduzido

#-----
#Resultados - solucao MEF
#-----
dispresult = np.matmul(np.linalg.inv(rgsm), rforcevect) #deslocamento
    resultante - vetor reduzido

rin = 0
for i in range(tn*2):
    if dispvect[i,0] == 1:
        dispvect[i,0] = dispresult[rin,0] #completando o vetor de
            deslocamento (reduzido --> normal)
        rin = rin+1

forceresult = np.matmul(K, dispvect) #forcamento resultante -
    carregamento + reacoes de cc

#=====
# DESLOCAMENTOS
disp = [] #deslocamento linear (displacement)

```

```

rot = [] #deslocamento angular (rotation)
for i in range(len(dispvect)):
    if i%2 == 0:
        disp.append(dispvect[i,0]) #DADOS P/ PLOT - deslocamento linear
    else:
        rot.append(dispvect[i,0]) #DADOS P/ PLOT - deslocamento angular
#=====
# CARREGAMENTOS
n=0
sf = [] #forca cortante (shear force)
bm = [] #momento fletor (bending moment)
for i in range(num_elems):
    k = klist[i]
    ldisp = dispvect[n:n+4]
    n = n+2
    lforce = np.matmul(k, ldisp)
    sf.append(float(lforce[0] - udl*1/2)) #DADOS P/ PLOT - forca
        cortante (correcao do carregamento)
    bm.append(float(lforce[1] - udl*(1**2)/12)) #DADOS P/ PLOT -
        momento fletor
    if i == num_elems-1:#DADOS P/ PLOT - momento fletor
        sf.append(-1*float(lforce[2] - udl*1/2))
        bm.append(-1*float(lforce[3])) #Nao ha subtracao, pois e
            preciso respeitar C.C. de x=L (Mfletor = 0)
#=====
# COMPRIMENTO
beamlen = np.arange(0,comp_tubo+1,1)
return beamlen, disp, rot, sf, bm, num_elems, l

"""
-----
PLOTAGEM COMPARATIVA - Desloc. vert. / Rotacao / Forca cortante / Momento
fletor

```

```

-----
"""
# Solucao da sistema com 7 elementos
beamlen, disp, rot, sf, bm, num_elems, l = udl_beam(7)
#Vetor de deformacao zero
zero_desloc = np.zeros((len(beamlen),1), dtype=float)

#-----
#SOLUCAO ANALITICA
#-----
sa_len = np.linspace(0,comp_tubo,51) #COMPRIMENTO

sa_w = ((p*sa_len**2)/(48.0*E*I))*(3*comp_tubo**2 - 5*comp_tubo*sa_len +
    2*sa_len**2) #DESLOCAMENTO VERTICAL
sa_r = ((p*sa_len)/(48.0*E*I))*(6*comp_tubo**2 - 15*comp_tubo*sa_len +
    8*sa_len**2)#ROTACAO
sa_M = -(p/(8.0))*(comp_tubo**2 - 5*comp_tubo*sa_len +
    4*sa_len**2)#MOMENTO
sa_V = (p/(8.0))*(-5*comp_tubo + 8*sa_len)#CORTANTE

#-----
#PLOTAGEM DOS GRAFICOS
#-----
#DESLOCAMENTO VERTICAL
plt.plot(beamlen,disp,'bo', label='MEF ('+str(num_elems)+' elems)')
plt.plot(sa_len,sa_w,'g-', label='Sol. Analitica')
plt.plot(beamlen,zero_desloc,'--k', label='Sem deformacao')
plt.xlabel('Posicao X [m]')
plt.ylabel('Posicao Y [m]')
plt.title('DESLOCAMENTO VERTICAL (UDL)')
plt.legend()
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()

```

```

#DESLOCAMENTO ANGULAR
plt.plot(beamlen,rot,'bo', label='MEF ('+str(num_elems)+' elems)')
plt.plot(sa_len,sa_r,'g-', label='Sol. Analitica')
plt.xlabel('Posicao X [m]')
plt.ylabel('Rotacao [rad]')
plt.title('ROTACAO (UDL)')
plt.legend()
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()

```

```

#DIAGRAMA DA FORCA CORTANTE
plt.plot(beamlen,sf,'bo', label='MEF ('+str(num_elems)+' elems)')
plt.plot(sa_len,sa_V,'g-', label='Sol. Analitica')
plt.xlabel('Posicao X [m]')
plt.ylabel('Forca cortante [N]')
plt.title('FORCA CORTANTE (UDL)')
plt.legend()
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()

```

```

#DIAGRAMA DA MOMENTO FLETOR
plt.plot(beamlen,bm,'bo', label='MEF ('+str(num_elems)+' elems)')
plt.plot(sa_len,sa_M,'g-', label='Sol. Analitica')
plt.xlabel('Posicao X [m]')
plt.ylabel('Momento fletor [N.m]')
plt.title('MOMENTO FLETOR (UDL)')
plt.legend()
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()

```

```

"""

```

```

-----

```

```

CONVERGENCIA ERRO - deslocamento vertical

```

```

-----
"""
#COLETA DOS ERROS (dependendo da quantidade de elementos)
conv_erros_abs = []
conv_erros_percent = []
elementos = []
decai_lin = []
decai_quad = []
decai_cub = []
decai_quar = []
# for j in range(2,100): # number of elements
for j in [2,3,4,6,8,16,32,64,128,256,512,1024]: # number of elements

    beamlen, disp, rot, sf, bm, num_elems, l = udl_beam(j)
    #SOLUCOES ANALITICAS
    sa_w = ((p*beamlen**2)/(48.0*E*I))*(3*comp_tubo**2 -
        5*comp_tubo*beamlen + 2*beamlen**2) #DESLOCAMENTO VERTICAL
        (solucao analitica)
    erro_disp_abs = []
    erro_disp_percent = []
    for i in range(len(disp)):
        dif_abs = abs(disp[i]-sa_w[i])
        erro_disp_abs.append(dif_abs)
        if abs(sa_w[i]) != 0.0:
            erro_disp_percent.append(100.0*dif_abs/abs(sa_w[i])) #existem
                erros aqui --> divisao por zero (condicao de contorno)
        if abs(sa_w[i]) == 0.0:
            erro_disp_percent.append(0.0)

    conv_erros_percent.append(max(erro_disp_percent))
    conv_erros_abs.append(max(erro_disp_abs))
    elementos.append(j)
    decai_lin.append(j**-1)
    decai_quad.append(j**-2)

```

```

decai_cub.append(j**-3)
decai_quar.append(j**-4)

#EVOLUCAO ERRO ABS C/ NUMERO DE ELEMENTOS - DESLOCAMENTO VERTICAL
plt.plot(elementos,conv_erros_abs,c='green',ls='--',marker='s',
        label='Erro [m]') #c=color, ls=linestyle,
plt.xlabel('Quantidade de elementos')
plt.ylabel('Erro absoluto em Y [m]')
plt.title('Evolucao do erro absoluto - Desloc. vertical (UDL)')
plt.legend()
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()

#EVOLUCAO ERRO % C/ NUMERO DE ELEMENTOS - DESLOCAMENTO VERTICAL
plt.plot(elementos,conv_erros_percent,c='blueviolet',ls='--',marker='s',
        label='Erro %') #c=color, ls=linestyle,
plt.xlabel('Quantidade de elementos')
plt.ylabel('Erro em Y [%]')
plt.title('Evolucao do Erro(%) - Desloc. vertical')
plt.legend()
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()

#EVOLUCAO ERRO ABS LOGxLOG C/ NUMERO DE ELEMENTOS - DESLOCAMENTO VERTICAL
plt.plot(elementos,conv_erros_abs,c='red',ls='--',marker='s',
        label='Erro') #c=color, ls=linestyle,
plt.plot(elementos,decai_lin,c='b',ls='-', label='Linear')
plt.plot(elementos,decai_quad,c='g',ls='-', label='Quadratico')
plt.plot(elementos,decai_cub,c='m',ls='-', label='Cubico')
plt.plot(elementos,decai_quar,c='c',ls='-', label='Quartico')
plt.xlabel('Log (Quantidade de elementos)')
plt.ylabel('Log (Erro absoluto em Y) []')
plt.title('Ordem do decaimento do erro absoluto (UDL)')
plt.legend()

```

```
plt.xscale('log')
plt.yscale('log')
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()
```

Apêndice B

Código Fonte - Análise das frequências naturais, velocidades críticas e estabilidade do sistema

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
@author: Victor Rieger

TUBO C/ ESCOAMENTO INTERNO (Análise das frequências naturais, velocidades
    críticas e estabilidade do sistema)
"""
import numpy as np
# from scipy.linalg import eigh
import math
from matplotlib import pyplot as plt

#%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
"""
-----
FUNCAO - Analise dinamica de tubo c/ escoamento interno (decaimento,
    freqs naturais e modos)
-----

```

```

"""
def beam(num_elems,v_esc,cc='aa',k_v=2e4, mu_v=1e3, compr_tubo=2.0,
rho_liq=1000.0):
#-----
#DADOS DO PROBLEMA
#-----
# DIMENSOES do TUBO
# compr_tubo = 2.0 #comprimento do tubo [m]
D = 0.01 #diametro externo [m]
e = 0.001 #espessura [m]
d = D-2*e #diametro interno [m]
I = (math.pi/64)*(D**4 - d**4) # momento de inercia da secao
    transversal [m^-4]

# MATERIAIS
E = 207e9 #modulo de elasticidade - aco [Pa]
rho_tubo = 7800.0 #massa especifica tubo [kg/m^3]
# rho_liq = 1000.0 #massa especifica liquido [kg/m^3]

# AREAS E MASSA
A_tubo = (math.pi*D**2)/4 - (math.pi*d**2)/4 #[m^2]
A_liq = (math.pi*d**2)/4 #[m^2]
mt= A_tubo*rho_tubo #massa do tubo por unidade de comprimento [kg/m]
mf= A_liq*rho_liq #massa do fluido por unidade de comprimento [kg/m]

#FUNDACAO
# k_v = 1e4 #coef. de rigidez da fundacao por unidade de area [N/m^3]
# mu_v = 1e3 #coef. de amortecimento da fundacao por unidade de area
    [Ns/m^3]
b = 1.0*D
k0 = b*k_v #coef. de rigidez da fundacao por unidade de comprimento
    [N/m^2]
mu = b*mu_v #coef. de amortecimento da fundacao por unidade de
    comprimento [N/m^2]

```

```

# CARREGAMENTO
g = -10.0 # gravidade [m/s^2]
p = g*(mt+mf)

#-----
#CONDICOES DE CONTORNO
#-----
if cc == 'ff':
    restrained_dofs = [1, 0, -2, -1] #Condicao de contorno: fixo-fixo
if cc == 'fa':
    restrained_dofs = [1, 0, -2]    #Condicao de contorno: fixo-apoio
if cc == 'aa':
    restrained_dofs = [0, -2]      #Condicao de contorno: apoio-apoio
if cc == 'ba':
    restrained_dofs = [1, 0]      #Condicao de contorno: em balanco

#Comprimento do elemento
l = compr_tubo / num_elems
beamlen = np.arange(0,compr_tubo+1,1)

#-----
#MATRIZES DOS ELEMENTOS
#-----
# Matriz de massa/inercia - elemento
const_m = ((mt + mf)*l)/420
m = np.array([[ 156 , 22*l , 54 , -13*l ],
              [ 22*l , 4*l*l , 13*l , -3*l*l ],
              [ 54 , 13*l , 156 , -22*l ],
              [-13*l , -3*l*l , -22*l , 4*l*l ]]) * const_m

# Matriz de rigidez do tubo - elemento
const_k1 = (E*I)*(1**(-3))
k1 = np.array([[ 12 , 6*l , -12 , 6*l ],
               [ 6*l , 4*l*l , -6*l , 2*l*l ],

```

```

        [-12 , -6*1 , 12 , -6*1 ],
        [ 6*1 , 2*1*1 , -6*1 , 4*1*1]]) * const_k1

# Matriz de rigidez do escoamento - elemento
const_k2 = (mf*v_esc**2)/(1*30)
k2 = np.array([[ 36 , 3*1 , -36 , 3*1 ],
               [ 3*1 , 4*1*1 , -3*1 , -1*1*1],
               [-36 , -3*1 , 36 , -3*1 ],
               [ 3*1 , -1*1*1 , -3*1 , 4*1*1]]) * const_k2

# Matriz de rigidez da reacao da fundacao - elemento
const_k3 = k0*1/420
k3 = np.array([[ 156 , 22*1 , 54 , -13*1 ],
               [ 22*1 , 4*1*1 , 13*1 , -3*1*1],
               [ 54 , 13*1 , 156 , -22*1 ],
               [-13*1 , -3*1*1 , -22*1 , 4*1*1]]) * const_k3

# Matriz de amortecimento do efeito Coriolis - elemento
const_c1 = mf*v_esc/30
# const_c = 0.0 #teste: ignorar efeito de Coriolis
c1 = np.array([[ -30 , -6*1 , -30 , 6*1 ],
               [ 6*1 , 0 , -6*1 , 1*1 ],
               [ 30 , 6*1 , 30 , -6*1 ],
               [-6*1 , -1*1 , 6*1 , 0 ]]) * const_c1

# Matriz de amortecimento da viscosidade da fundacao - elemento
const_c2 = mu*1/420
c2 = np.array([[ 156 , 22*1 , 54 , -13*1 ],
               [ 22*1 , 4*1*1 , 13*1 , -3*1*1],
               [ 54 , 13*1 , 156 , -22*1 ],
               [-13*1 , -3*1*1 , -22*1 , 4*1*1]]) * const_c2

# Matriz de rigidez geral - elemento
k = k1 - k2 + k3
c = c1 + c2

# Carregamento uniforme distribuido devido ao peso

```

```

f = np.array([[ p*1/2  ],
              [ p*1**2/12 ],
              [ p*1/2  ],
              [-p*1**2/12 ]])

#-----

#MATRIZES GLOBAIS

#-----

# Construcao das matrizes globais de rigidez, inercia e amortecimento
(matrizes "zero")

M = np.zeros((2*num_elems+2, 2*num_elems+2))
C = np.zeros((2*num_elems+2, 2*num_elems+2))
K = np.zeros((2*num_elems+2, 2*num_elems+2))
F = np.zeros((2*num_elems+2, 1))

# Soma das matrizes dos elementos na matriz global
for i in range(num_elems):
    M_temp = np.zeros((2*num_elems+2,2*num_elems+2))
    C_temp = np.zeros((2*num_elems+2,2*num_elems+2))
    K_temp = np.zeros((2*num_elems+2,2*num_elems+2))
    F_temp = np.zeros((2*num_elems+2, 1))
    M_temp[2*i:2*i+4, 2*i:2*i+4] = m
    C_temp[2*i:2*i+4, 2*i:2*i+4] = c
    K_temp[2*i:2*i+4, 2*i:2*i+4] = k
    F_temp[2*i:2*i+4, 0:1] = f
    M += M_temp
    C += C_temp
    K += K_temp
    F += F_temp

#-----

#MATRIZES GLOBAIS REDUZIDAS

#-----

# Remover graus de liberdade fixos relacionados as condicoes de contorno
for dof in restrained_dofs:
    for i in [0,1]:

```

```

M = np.delete(M, dof, axis=i)
C = np.delete(C, dof, axis=i)
K = np.delete(K, dof, axis=i)
if i == 0:
    F = np.delete(F, dof, axis=i)

#-----
#MATRIZ BLOCOS GLOBAL
#-----

# Construcao da matriz do sistema para o problema de autovalor
B11 = np.zeros((M.shape), dtype=complex)
B12 = np.eye(M.shape[0])
B21 = -np.matmul(np.linalg.inv(M), K)
B22 = -np.matmul(np.linalg.inv(M), C)
#Matriz do sistema A (matriz dinamica)
A = np.block([[B11, B12],
              [B21, B22]])

#-----
#AUTOVALORES E AUTOVETORES
#-----

#Computacao dos autovalores e autovetores complexas da matriz do sistema A
a_vals_complex, a_vets_complex = np.linalg.eig(A)
# Separacao das partes reais e imaginarias (sentido fisico)
freq_naturais = list(a_vals_complex.imag) #Frequencias naturais
    amortecidas (parte imaginaria do autovalor)
decaimento = a_vals_complex.real          #Decaimento (parte imaginaria
    do autovalor)
modos_real = a_vets_complex.real
modos_imag = a_vets_complex.imag

# Lista com frequencias naturais "absolutas" em ordem e indices
list_freq_ind = []
for k in range(A.shape[0]):

```

```

        list_freq_ind.append([freq_naturais[k],k])
list_freq_ind_ABS = [[abs(ele[0]),ele[1]] for ele in list_freq_ind]
list_freq_ind_ABS.sort(key = lambda x: x[0])

return beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento,
        modos_real, modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F

##### Freuencia natural vs Veloc.
    escoamento - 3 modos
"""
-----
EVOLUCAO DAS FREQUENCIAS NATURAIS - 3 primeiros modos de vibracao
-----
"""

v=200.0 #150.0
ne=10 #20
evo_veloc_freq1=[]
evo_veloc_freq2=[]
evo_veloc_freq3=[]
modo = 3 # quantos modos visualizar
cont = -1
cc = 'aa'
freq_estatica=beam(10,0,cc) [6] [2*modo-1] [0] #frequencia natural p/ v=0 do
    maior modo analisado (determinar area de plotagem)
# index=beam(10,0) [7] [2*modo-1] [0]
# freq_estatica=beam(10,0) [6] [index]
for i in range(0,int(v),1):
    cont += 1
    beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento, modos_real,
        modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F = beam(ne, i, cc) # 10
        elementos
    # print(list_freq_ind_ABS)

```

```

# print('\n ----- v = '+str(i)+' ----- \n\n')
freq_mod0_1 = list_freq_ind_ABS[0][0]
freq_mod0_2 = list_freq_ind_ABS[2][0]
freq_mod0_3 = list_freq_ind_ABS[4][0]
evo_veloc_freq1.append( (i, freq_mod0_1))
evo_veloc_freq2.append( (i, freq_mod0_2))
evo_veloc_freq3.append( (i, freq_mod0_3))

modo1_com_vel_e_rot = modos_real[:,list_freq_ind_ABS[0][1]]
modo2_com_vel_e_rot = modos_imag[:,list_freq_ind_ABS[2][1]]
modo3_com_vel_e_rot = modos_imag[:,list_freq_ind_ABS[4][1]]
modo1=[0.0] #fixacao na esquerda (zero movimento)
modo2=[0.0]
modo3=[0.0]
# modo1=[] #fixacao na esquerda (zero movimento)
# modo2=[]
# modo3=[]
posi_q=int(len(modo1_com_vel_e_rot)/2+1)
for k in range(int(len(modo1_com_vel_e_rot)/4 - 1)):# divisao por 4:
    remover derivadas dos gdls e o gdl de rotacao
    modo1.append(modo1_com_vel_e_rot[2*k+1])
    modo2.append(modo2_com_vel_e_rot[2*k+1]) #Graus de liberdade de
        posicao
    modo3.append(modo3_com_vel_e_rot[2*k+1])
modo1.append(0.0) #fixacao na direita (p/ viga em balanço não é
    adicionado esse termo)
modo2.append(0.0)
modo3.append(0.0)
abs_max_desloc_mod01 = max(abs(ele) for ele in modo1)
abs_max_desloc_mod02 = max(abs(ele) for ele in modo2)
abs_max_desloc_mod03 = max(abs(ele) for ele in modo3)
modo1_norm = modo1/abs_max_desloc_mod01
modo2_norm = modo2/abs_max_desloc_mod02
modo3_norm = modo3/abs_max_desloc_mod03

```

```

zero_desloc = np.zeros((len(beamlen),1), dtype=float) # tubo sem
deformacao

evo_veloc = np.array([x[0] for x in evo_veloc_freq1])
# veloc_ad = np.array([x[1] for x in freqs_nats_ad_1])
freqs1 = np.array([x[1] for x in evo_veloc_freq1])
freqs2 = np.array([x[1] for x in evo_veloc_freq2])
freqs3 = np.array([x[1] for x in evo_veloc_freq3])
# print(evo_veloc_freq1)

# PLOTAGEM DA RELACAO VELOC E FREQs NATURAIS - VALOR ABSOLUTO
plt.plot(evo_veloc, freqs1, 'o-', label='modo 1')
plt.plot(evo_veloc, freqs2, 'o-', label='modo 2')
plt.plot(evo_veloc, freqs3, 'o-', label='modo 3')
plt.xlabel('Velocidade de escoamento [m/s]')
plt.ylabel('Frequencia natural [rad/s]')
plt.title('Freq naturais vs Veloc. esc. (ne=10 / cc='+str(cc)+'')')
plt.xlim(xmin=0,xmax=v)
plt.ylim(ymin=0,ymax=1.05*freq_estatica)
# plt.xlim(xmin=0,xmax=80)
# plt.ylim(ymin=0,ymax=50)
plt.legend(fontsize=8)
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.show()

##### Frequencia natural vs Veloc.
      escoamento - variacao k_v & mu_v & comprimento & dens_liq
"""
-----

EVOLUCAO DAS FREQUENCIAS NATURAIS - modificacao da fundacao
-----
"""
#=====

```

```

# RIGIDEZ
#=====
kv_list = [1e4,2e4,3e4]
cores = ['bo-', 'yo-', 'go-']
freq_plot= 55.0
v_plot=80.0 #150.0
ne=10 #20
modo = 1 # quantos modos visualizar
cont = -1
cont2 = 0
cc = 'aa'

evo_veloc = []
freqs1 = []
for kvs in kv_list:
    evo_veloc_freq1=[]
    for i in range(0,int(v),1):
        cont += 1
        beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento, modos_real,
            modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F = beam(ne, i, cc,
                kvs, 1e2) # 10 elementos
        # print(list_freq_ind_ABS)
        # print('\n ----- v = '+str(i)+' ----- \n\n')
        freq_modo_1 = list_freq_ind_ABS[0][0]
        evo_veloc_freq1.append( (i, freq_modo_1))
        modo1_com_vel_e_rot = modos_real[:,list_freq_ind_ABS[0][1]]
        modo1=[0.0] #fixacao na esquerda (zero movimento)
        posi_q=int(len(modo1_com_vel_e_rot)/2+1)
        for k in range(int(len(modo1_com_vel_e_rot)/4 - 1)):# divisao por
            4: remover derivadas dos gdls e o gdl de rotacao
            modo1.append(modo1_com_vel_e_rot[2*k+1]) #Graus de liberdade
                de posicao
        modo1.append(0.0) #fixacao na direita (p/ viga em balanço não é
            adicionado esse termo)

```

```

abs_max_desloc_mod01 = max(abs(ele) for ele in mod01)
mod01_norm = mod01/abs_max_desloc_mod01

zero_desloc = np.zeros((len(beamlen),1), dtype=float) # tubo sem
deformacao

evo_veloc = np.array([x[0] for x in evo_veloc_freq1])
freqs1 = np.array([x[1] for x in evo_veloc_freq1])
# PLOTAGEM DA RELACAO VELOC E FREQS NATURAIS - VALOR ABSOLUTO
plt.plot(evo_veloc, freqs1, cores[cont2], label='Kv =
'+str(kvs/1000.0)+' [K/m3]')
plt.xlabel('Velocidade de escoamento [m/s]')
plt.ylabel('Frequencia natural [rad/s]')
plt.title('Ks fundacao - Primeira Freq natu. vs Veloc esc. (ne=10 /
cc='+str(cc)+'')')
plt.xlim(xmin=0,xmax=v_plot)
plt.ylim(ymin=0,ymax=freq_plot)
plt.legend(fontsize=8)
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
cont2 += 1
plt.show()

#=====
# AMORTECIMENTO
#=====
muv_list = [1e3,1.5e3,2e3]
cores = ['bo-', 'yo-', 'go-']
freq_plot= 45.0
v_plot= 70.0 #150.0
ne=10 #20
modo = 1 # quantos modos visualizar
cont = -1
cont2 = 0
cc = 'aa'

evo_veloc = []

```

```

freqs1 = []
for muvs in muv_list:
    evo_veloc_freq1=[]
    for i in range(0,int(v),1):
        cont += 1
        beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento, modos_real,
            modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F = beam(ne, i,
                cc,2e4,muvs) # 10 elementos
        # print(list_freq_ind_ABS)
        # print('\n ----- v = '+str(i)+' ----- \n\n')
        freq_mod0_1 = list_freq_ind_ABS[0][0]
        evo_veloc_freq1.append( (i, freq_mod0_1))
        modo1_com_vel_e_rot = modos_real[:,list_freq_ind_ABS[0][1]]
        modo1=[0.0] #fixacao na esquerda (zero movimento)
        posi_q=int(len(modo1_com_vel_e_rot)/2+1)
        for k in range(int(len(modo1_com_vel_e_rot)/4 - 1)):# divisao por
            4: remover derivadas dos gdls e o gdl de rotacao
            modo1.append(modo1_com_vel_e_rot[2*k+1]) #Graus de liberdade
                de posicao
        modo1.append(0.0) #fixacao na direita (p/ viga em balanço não é
            adicionado esse termo)
        abs_max_desloc_modo1 = max(abs(ele) for ele in modo1)
        modo1_norm = modo1/abs_max_desloc_modo1
        zero_desloc = np.zeros((len(beamlen),1), dtype=float) # tubo sem
            deformacao
        evo_veloc = np.array([x[0] for x in evo_veloc_freq1])
        freqs1 = np.array([x[1] for x in evo_veloc_freq1])
        # PLOTAGEM DA RELACAO VELOC E FREQS NATURAIS - VALOR ABSOLUTO
        plt.plot(evo_veloc, freqs1, cores[cont2], label='muv =
            '+str(muvs/1000.0)+' [Ks/m3]')
        plt.xlabel('Velocidade de escoamento [m/s]')
        plt.ylabel('Frequencia natural [rad/s]')
        plt.title('mus fundacao - Priemira Freq natu. vs Veloc esc. (ne=10 /
            cc='+str(cc)+'')')

```

```

plt.xlim(xmin=0,xmax=v_plot)
plt.ylim(ymin=0,ymax=freq_plot)
plt.legend(fontsize=8)
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
cont2 += 1
plt.show()

#=====
# COMPRIMENTO TUBO
#=====
compr_list = [1.5,2.0,2.5]
cores = ['bo-', 'yo-', 'go-']
freq_plot= 80.0
v_plot= 80.0 #150.0
ne=10 #20
modo = 1 # quantos modos visualizar
cont = -1
cont2 = 0
cc = 'aa'

evo_veloc = []
freqs1 = []
for comprs in compr_list:
    evo_veloc_freq1=[]
    for i in range(0,int(v),1):
        cont += 1
        beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento, modos_real,
            modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F = beam(ne, i, cc,
                2e4, 1e3, comprs) # 10 elementos
        # print(list_freq_ind_ABS)
        # print('\n ----- v = '+str(i)+' ----- \n\n')
        freq_modo_1 = list_freq_ind_ABS[0][0]
        evo_veloc_freq1.append( (i, freq_modo_1))
        modo1_com_vel_e_rot = modos_real[:,list_freq_ind_ABS[0][1]]

```

```

modo1=[0.0] #fixacao na esquerda (zero movimento)
posi_q=int(len(modo1_com_vel_e_rot)/2+1)
for k in range(int(len(modo1_com_vel_e_rot)/4 - 1)):# divisao por
    4: remover derivadas dos gdls e o gdl de rotacao
    modo1.append(modo1_com_vel_e_rot[2*k+1]) #Graus de liberdade
        de posicao
modo1.append(0.0) #fixacao na direita (p/ viga em balanço não é
    adicionado esse termo)
abs_max_desloc_mod01 = max(abs(ele) for ele in modo1)
modo1_norm = modo1/abs_max_desloc_mod01
zero_desloc = np.zeros((len(beamlen),1), dtype=float) # tubo sem
    deformacao

evo_veloc = np.array([x[0] for x in evo_veloc_freq1])
freqs1 = np.array([x[1] for x in evo_veloc_freq1])
# PLOTAGEM DA RELACAO VELOC E FREQS NATURAIS - VALOR ABSOLUTO
plt.plot(evo_veloc, freqs1, cores[cont2], label='L = '+str(comprs)+'
    [m]')

plt.xlabel('Velocidade de escoamento [m/s]')
plt.ylabel('Frequencia natural [rad/s]')
plt.title('Comprs tubo - Priemira Freq natu. vs Veloc esc. (ne=10 /
    cc='+str(cc)+'')')

plt.xlim(xmin=0,xmax=v_plot)
plt.ylim(ymin=0,ymax=freq_plot)
plt.legend(fontsize=8)
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
cont2 += 1

plt.show()

#=====
# DENSIDADE LIQUIDO
#=====

rho_list = [680.0, 1000.0, 1260.0]
cores = ['bo-', 'yo-', 'go-']
freq_plot= 50.0

```

```

v_plot= 80.0 #150.0
ne=10 #20
modo = 1 # quantos modos visualizar
cont = -1
cont2 = 0
cc = 'aa'

evo_veloc = []
freqs1 = []
for rhos in rho_list:
    evo_veloc_freq1=[]
    for i in range(0,int(v),1):
        cont += 1
        beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento, modos_real,
            modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F = beam(ne, i, cc,
                2e4, 1e3, 2.0, rhos) # 10 elementos
        # print(list_freq_ind_ABS)
        # print('\n ----- v = '+str(i)+' ----- \n\n')
        freq_mod0_1 = list_freq_ind_ABS[0][0]
        evo_veloc_freq1.append( (i, freq_mod0_1))
        modo1_com_vel_e_rot = modos_real[:,list_freq_ind_ABS[0][1]]
        modo1=[0.0] #fixacao na esquerda (zero movimento)
        posi_q=int(len(modo1_com_vel_e_rot)/2+1)
        for k in range(int(len(modo1_com_vel_e_rot)/4 - 1)):# divisao por
            4: remover derivadas dos gdl e o gdl de rotacao
            modo1.append(modo1_com_vel_e_rot[2*k+1]) #Graus de liberdade
                de posicao
        modo1.append(0.0) #fixacao na direita (p/ viga em balanço não é
            adicionado esse termo)
        abs_max_desloc_mod01 = max(abs(ele) for ele in modo1)
        modo1_norm = modo1/abs_max_desloc_mod01
        zero_desloc = np.zeros((len(beamlen),1), dtype=float) # tubo sem
            deformacao
    evo_veloc = np.array([x[0] for x in evo_veloc_freq1])

```

```

freqs1 = np.array([x[1] for x in evo_veloc_freq1])
# PLOTAGEM DA RELACAO VELOC E FREQS NATURAIS - VALOR ABSOLUTO
plt.plot(evo_veloc, freqs1, cores[cont2], label='rho = '+str(rhos)+'
        [kg/m3]')
plt.xlabel('Velocidade de escoamento [m/s]')
plt.ylabel('Frequencia natural [rad/s]')
plt.title('rhos liquido - Primeira Freq natu. vs Veloc esc. (ne=10 /
        cc='+str(cc)+'')')
plt.xlim(xmin=0,xmax=v_plot)
plt.ylim(ymin=0,ymax=freq_plot)
plt.legend(fontsize=8)
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
cont2 += 1
plt.show()

```

```

##### Resposta em frequencia

```

```

"""

```

```

-----

```

```

RESPOSTA EM FREQUENCIA (wf) - meio do tubo

```

```

-----

```

```

"""

```

```

ne = 10 #numero de elementos - MAIOR que 3

```

```

wf_max= 100.0 #tempo total de analise [s]

```

```

v=50.0 #velocidade de escoamento [m/s]

```

```

cc='aa'

```

```

muv_list = [1.0e4,2.0e4,3.0e4]

```

```

#INTERVALO DE FREQUENCIAS

```

```

wf_list = np.arange(0,wf_max+1)

```

```

# APENAS POSITIVO

```

```

for kvs in kv_list:

```

```

yi_complex_list = np.array([])
y_meio = np.array([])
fase_meio = np.array([])
beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento, modos_real,
    modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F = beam(ne, v,
    cc,kvs,10e2) # 10 elementos

for wf in wf_list:
    B = -M*wf**2 + K + C*wf*1j #matriz de impedancia p/ resposta em
        frequencia
    H = np.linalg.inv(B) #matriz funcao de transferencia
    if ne%2 == 0: #qntd par de elementos
        yi_complex = np.matmul(H[ne-1],F) # Avaliado no meio do tubo -
            np.matmul(H[ne+1],F)
    if ne%2 == 1: #qntd impar de elementos
        yi_complex = np.matmul(H[ne],F) # Avaliado no meio do tubo -
            np.matmul(H[ne],F)
    print(wf, muvs)
    print(yi_complex.real)
    yi_complex1 = 1.0/yi_complex.real
    print(yi_complex1)
    print('-----')
    # yi_complex_list = np.append(yi_complex_list,yi_complex)
    # y_meio = yi_complex_list.real
    # fase_meio = yi_complex_list.imag

    y_meio = np.append(y_meio,1.0/yi_complex.real)

    # y_meio = np.append(y_meio,yi_complex.real)
    fase_meio = np.append(fase_meio,yi_complex.imag)
# print (y_meio)
# print ('-----\n\n')
# print (fase_meio)
plt.plot(wf_list,abs(y_meio), label='Kv = '+str(kvs/1000.0)+' [N/m3]')

```

```

plt.xlabel('Frequencia forcamento [rad/s]')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Resposta em frequencia (ne='+str(ne)+' & v='+str(v)+'m/s)')
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.legend(fontsize=8)
plt.xlim(xmin=0,xmax=wf_max)
plt.ylim(ymin=0,ymax=2500)
plt.show()

```

```

##### Transiente

```

```

"""

```

```

-----

```

```

RESPOSTA TRANSIENTE (t) - meio do tubo

```

```

-----

```

```

"""

```

```

ne = 10 #numero de elementos

```

```

total_t= 1.0 #tempo total de analise [s]

```

```

delta_t = 0.001 #diferenca temporal entre dois pontos [m/s]

```

```

# v=70.0 #velocidade de escoamento [m/s]

```

```

wf=20.0 #frequencia de forcamento [rad/s]

```

```

mag_forca = 1000.0

```

```

cc='aa'

```

```

v_list = [0.0, 10.0, 20.0, 30.0, 40.0, 50.0, 60.0]

```

```

for v in v_list:

```

```

    beamlen, a_vals_complex, freq_naturais, decaimento, modos_real,

```

```

        modos_imag, list_freq_ind_ABS, M, K, C, F = beam(ne, v, cc) # 10

```

```

        elementos

```

```

#TEMPO DE ANALISE - seccionado

```

```

t = np.arange(0,total_t+delta_t,delta_t)

```

```

#CONDICOES INICIAS

```

```

# u_n_2 = np.zeros((M.shape[0],1), dtype=float)

```

```

# u_n_1 = np.zeros((M.shape[0],1), dtype=float)

```

```

# u_n_1 = 0.002*np.ones((M.shape[0],1), dtype=float)

```

```

u = []
u_temp = np.zeros((2*len(beamlen),1))
cont = 0
for x in beamlen:
    posi_vert = 0.05*(-x**2 + 2*x)
    angulo = 0.05*(-2*x + 2)
    # u.append(posi_vert)
    # u.append(angulo)
    u_temp[2*cont,0]=posi_vert
    u_temp[2*cont+1,0]=angulo
    cont +=1
u_temp = np.delete(u_temp,0,axis=0)
u_temp = np.delete(u_temp,-2,axis=0)
# del u[0]
# del u[-2]
# u_n_2 = np.array(u, dtype=float)
# print(u_n_2.shape)
u_n_2 = u_temp
u_n_1 = u_n_2
# u_n_2 = np.array([0.05*(-x**2 +2*x) for x in beamlen])
# u_n_1 = np.array([0.05*(-x**2 +2*x) for x in beamlen])
B = (1/delta_t**2)*M + (1/delta_t)*C + K
#CARREGAMENTO
# F = 1e3*np.ones((F.shape[0], 1))

posicoes_gdl = np.zeros((M.shape[0],1), dtype=float)
cont = 1
for i in t:
    u_passado_d2 = (1/delta_t**2)*(u_n_2 + u_n_1)
    u_passado_d1 = (1/delta_t)*(-u_n_1)
    u_n = np.linalg.inv(B)@(mag_forca*F*math.sin(wf*i) -
        M@u_passado_d2 - C@u_passado_d1) # DESLOCAMENTO ATUAL ->
        equacao do sistema + diferencas finitas (Forcamento zero)
    posicoes_gdl = np.append(posicoes_gdl, u_n, axis=1)

```

```

u_n_2 = u_n_1 #Igual deslocamentos de tempos passados p/ nova
iteracao
u_n_1 = u_n #Igual deslocamentos de tempos passados ao tempo atual
p/ nova iteracao

ponto_analise = posicoes_gdl[int(M.shape[0]/2)-1]
ponto_analise = np.delete(ponto_analise, 0 ,axis=0) # Correcao para
compatibilidade com o array do tempo
# print(ponto_analise)
# plt.plot(t,ponto_analise,'bo-', label='MEF ('+str(len(modos1)-1)+'
elems)')
plt.plot(t,ponto_analise,'b-', label='mu_v = 1.0 [Ks/m3]')
plt.xlabel('Tempo [s]')
plt.ylabel('Deslocamento Y do ponto medio da viga [m]')
plt.title('          Resposta transiente (wf='+str(wf)+'rad/s &
v='+str(v)+'m/s)')
plt.grid(c = 'gray', linestyle = ':', linewidth = 0.5)
plt.legend(fontsize=8)
plt.show()

```
