



Universidade Federal  
do Rio de Janeiro  

---

Escola Politécnica

## ANÁLISE CFD DE ESCOAMENTO EM ARTÉRIAS CORONÁRIAS PARA DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE RESTRIÇÃO DE FLUXO

Matheus Ferreira Gomes

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro  
Outubro de 2021

ANÁLISE CFD DE ESCOAMENTO EM ARTÉRIAS CORONÁRIAS PARA  
DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE RESTRIÇÃO DE FLUXO


Matheus Ferreira Gomes

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
ENGENHEIRO MECÂNICO.

Examinado por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Gustavo Rabello dos Anjos, Ph.D.

\_\_\_\_\_  
Prof. Juliana Braga Rodrigues Loureiro, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Roney Leon Thompson, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
OUTUBRO DE 2021

Gomes, Matheus Ferreira

Análise CFD de escoamento em artérias coronárias para diferentes configurações de restrição de fluxo/Matheus Ferreira Gomes. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2021.

XIV, 108 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Mecânica, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 97 – 100.

1. Stent Farmacológico. 2. Ateromas. 3. Método de Elementos Finitos. 4. Formulação Corrente-Vorticidade. 5. Formulação Taylor-Galerkin. I. Anjos, Gustavo Rabello dos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Mecânica. III. Análise CFD de escoamento em artérias coronárias para diferentes configurações de restrição de fluxo.

*Em memória da minha bisavó  
Alinda e da minha avó Maria da  
Glória.*

# Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer à minha família, principalmente minha mãe Evelyn, meu pai Mauro, minha avó Arilda e minha irmã Camila, pelo apoio constante e por todos os ensinamentos que me passaram ao longo da minha vida, seja como ser humano, seja como o profissional ao qual estou me formando.

Também gostaria de agradecer à Isabel Benvinda, minha grande amiga e namorada, a qual sempre me ajuda a diminuir o ritmo e me incentivar na busca pelos meus objetivos.

Agradeço também à Carolina Lopes, amiga de muitos anos e que sempre acreditou no meu potencial.

Aos meus amigos de trajetória na Mecânica, Douglas Sales e Heitor Figueiredo, pelas diversas conversas, almoços descontraídos e risadas ao léu, bem como às diversas trocas de experiências que tivemos.

Agradeço também a um grande amigo que fiz pelos corredores do bloco G e que desde o início acreditou no meu potencial como futuro engenheiro, Giovanni Panno. Muitas conversas sobre propulsão de foguetes, usinagem, aços e outros assuntos diversos que sempre foram de muita valia, aliviando a rotina pesada.

Agradeço também aos demais colegas e amigos que compartilharam um pouco desta etapa, ajudando nesta etapa de minha vida.

Agradeço à dois professores da UFRJ que foram muito importantes na minha trajetória dentro da faculdade.

Primeiramente, à professora Rafaella Ribeiro, do Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da UFRJ, proporcionou-me a oportunidade de aprender sobre superligas metálicas aplicadas à Biomedicina e aprofundar mais no estudo de materiais.

Por fim, ao professor e orientador Gustavo Rabello, do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ, o qual sempre mostrou uma disposição ímpar para esclarecer todas as dúvidas, assim como abertura ao diálogo e paciência durante todo o processo de elaboração deste trabalho. Todo o histórico de *e-mails* trocados neste período pandêmico corroboram a opinião tecida.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

## ANÁLISE CFD DE ESCOAMENTO EM ARTÉRIAS CORONÁRIAS PARA DIFERENTES CONFIGURAÇÕES DE RESTRIÇÃO DE FLUXO

Matheus Ferreira Gomes

Outubro/2021

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Curso: Engenharia Mecânica

Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma simulação computacional para a análise de difusão da espécie química no escoamento em uma artéria coronária com diferentes configurações de ateromas e três geometrias diferentes de stent farmacológico. O Método de Elementos Finitos foi empregado para resolver as equações de governo do escoamento sanguíneo na artéria coronária com a implementação de stent farmacológico. O sangue foi definido como um fluido monofásico, incompressível e newtoniano. Para as equações de governo, empregou-se a formulação corrente-vorticidade da equação de Navier-Stokes com o transporte de espécie química. Em razão da presença de oscilações espúrias em simulações onde o termo convectivo é predominante, adotou-se o esquema Taylor-Galerkin.

*Palavras-chave:* Stent Farmacológico, Ateromas, Método de Elementos Finitos, Formulação Corrente-Vorticidade, Esquema Taylor-Galerkin.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

## CFD ANALYSIS OF FLOW IN CORONARY ARTERIES FOR DIFFERENT FLOW RESTRICTIONS CONFIGURATIONS

Matheus Ferreira Gomes

October/2021

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Course: Mechanical Engineering

This work aims to develop a computational simulation to analyse the chemical species diffusion in blood flow through a coronary artery with different atheroma configurations and three different drug-eluting stent geometry. The Finite Element Method was used to solve the governing equations of blood flow in coronary artery with drug-eluting stent. The blood was defined as a single-phase, incompressible and newtonian fluid. The stream-vorticity formulation of Navier-Stokes equation with chemical species transport were used as governing equations. The Taylor-Galerkin scheme was adopted due to the presence of spurious oscillations in simulations where the convective term is predominant.

*Keywords:* Drug-Eluting Stent, Atheromas, Finite Element Method, Stream-Vorticity Formulation, Taylor-Galerkin Scheme.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Hipóteses e método adotado . . . . .	2
1.2 Estruturação do trabalho . . . . .	3
<b>2 Revisão bibliográfica</b>	<b>5</b>
2.1 Stent Farmacológico . . . . .	5
2.2 Método de Elementos Finitos - Equação Convecção-Difusão . . . . .	8
<b>3 Equações de governo</b>	<b>10</b>
3.1 Princípio da conservação de massa . . . . .	10
3.2 Princípio da conservação de quantidade de movimento . . . . .	12
3.3 Princípio da conservação da espécie química . . . . .	16
3.4 Adimensionalização . . . . .	18
3.5 Formulação corrente-vorticidade . . . . .	21
3.6 Equações de governo adimensionalizadas . . . . .	24
<b>4 Método de Elementos Finitos</b>	<b>25</b>
4.1 Discretização temporal . . . . .	25
4.2 Formulação forte e fraca . . . . .	28
4.2.1 Formulação forte . . . . .	29
4.2.2 Formulação fraca . . . . .	29
4.3 Discretização espacial . . . . .	34
4.4 Forma matricial . . . . .	40
<b>5 Código numérico</b>	<b>44</b>
5.1 Importação da malha . . . . .	45
5.2 Criação das matrizes globais . . . . .	46
5.3 Imposição das condições de contorno . . . . .	47

5.4	Algoritmo de solução . . . . .	50
5.4.1	Inicialização da vorticidade . . . . .	51
5.4.2	Cálculo das matrizes de estabilidade . . . . .	51
5.4.3	Cálculo da vorticidade . . . . .	51
5.4.4	Cálculo da função corrente . . . . .	52
5.4.5	Cálculo das velocidades . . . . .	52
5.4.6	Cálculo da concentração . . . . .	52
5.4.7	Retornar ao passo 2 . . . . .	53
5.4.8	Resolução dos sistemas lineares . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Validação do código numérico</b>	<b>54</b>
6.1	Escoamento de <i>Hagen-Poiseuille</i> . . . . .	54
6.1.1	Malha selecionada . . . . .	55
6.1.2	Condições de contorno . . . . .	55
6.1.3	Resultados obtidos . . . . .	55
6.2	<i>Lid-Driven Cavity Flow</i> . . . . .	57
6.2.1	Malha selecionada . . . . .	57
6.2.2	Condições de contorno . . . . .	57
6.2.3	Resultados obtidos . . . . .	58
6.3	Escoamento em degrau . . . . .	58
6.3.1	Malha selecionada . . . . .	60
6.3.2	Condições de contorno . . . . .	60
6.3.3	Resultados obtidos . . . . .	60
6.4	Dispersão de droga em artéria coronária com geometria aproximada . . . . .	61
6.4.1	Malha selecionada . . . . .	62
6.4.2	Condições de contorno . . . . .	62
6.4.3	Resultados obtidos . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Resultados</b>	<b>66</b>
7.1	Definição dos parâmetros de malha . . . . .	66
7.2	Parâmetros físicos e condições de contorno . . . . .	68
7.3	Geometrias e resultados . . . . .	70
7.3.1	Geometria 1: restrição de 25% e <i>stents</i> circulares . . . . .	71
7.3.2	Geometria 2: restrição de 50% e <i>stents</i> circulares . . . . .	72
7.3.3	Geometria 3: restrição de 75% e <i>stents</i> circulares . . . . .	73
7.3.4	Geometria 4: restrição de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	75
7.3.5	Geometria 5: restrição de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	77
7.3.6	Geometria 6: restrição de 75% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	78
7.3.7	Geometria 7: restrição de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	80
7.3.8	Geometria 8: restrição de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	81

7.3.9	Geometria 9: restrição de 75% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	82
7.3.10	Geometria 10: duas restrições de 25% e <i>stents</i> circulares . . . . .	84
7.3.11	Geometria 11: duas restrições de 50% e <i>stents</i> circulares . . . . .	85
7.3.12	Geometria 12: duas restrições de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	87
7.3.13	Geometria 13: duas restrições de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	88
7.3.14	Geometria 14: duas restrições de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	89
7.3.15	Geometria 15: duas restrições de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	91
7.4	Comparação de resultados . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>95</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Resultados complementares</b>	<b>101</b>
A.1	Geometria 1: restrição de 25% e <i>stents</i> circulares . . . . .	101
A.2	Geometria 2: restrição de 50% e <i>stents</i> circulares . . . . .	102
A.3	Geometria 3: restrição de 75% e <i>stents</i> circulares . . . . .	102
A.4	Geometria 4: restrição de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	103
A.5	Geometria 5: restrição de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	103
A.6	Geometria 6: restrição de 75% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	104
A.7	Geometria 7: restrição de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	104
A.8	Geometria 8: restrição de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	105
A.9	Geometria 9: restrição de 75% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	105
A.10	Geometria 10: duas restrições de 25% e <i>stents</i> circulares . . . . .	106
A.11	Geometria 11: duas restrições de 50% e <i>stents</i> circulares . . . . .	106
A.12	Geometria 12: duas restrições de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	107
A.13	Geometria 13: duas restrições de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio menor) . . . . .	107
A.14	Geometria 14: duas restrições de 25% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	108
A.15	Geometria 15: duas restrições de 50% e <i>stents</i> elípticos (raio maior) . . . . .	108

# Lista de Figuras

2.1	Esquema do PTCA com balão inflável. . . . .	6
2.2	Esquema do PTCA com stent. . . . .	7
4.1	Elemento de malha triangular. . . . .	41
5.1	Fluxograma de funcionamento do código. . . . .	44
5.2	Esquemático de uma malha genérica. . . . .	45
5.3	Identificação do ponto com condição de contorno de Dirichlet. . . . .	48
5.4	Tratando a linha com condição de contorno de Dirichlet. . . . .	48
5.5	Substituindo o valor no vetor solução. . . . .	48
5.6	Fluxograma do algoritmo de solução. . . . .	50
6.1	Gráfico comparativo para a velocidade horizontal em razão da altura do canal para $Re = 100$ em $x = 3 R$ e $t = 7 s$ . . . . .	56
6.2	Resultados para canal em $t = 7 s$ . . . . .	56
6.3	Representação <i>Lid-Driven Cavity Flow</i> . . . . .	57
6.4	Gráfico comparativo para a velocidade horizontal em razão da altura da cavidade para $Re = 100$ em $x = 0,5$ e $t = 7 s$ . . . . .	58
6.5	Gráfico comparativo para a velocidade vertical em razão do comprimento da cavidade para $Re = 100$ em $y = 0,5$ e $t = 7 s$ . . . . .	59
6.6	Resultados para cavidade quadrada em $t = 7 s$ . . . . .	59
6.7	Geometria do canal utilizada com as condições de contorno. . . . .	60
6.8	Perfil da velocidade horizontal em $t = 50 s$ . . . . .	61
6.9	Resultados para o canal em $t = 50 s$ . . . . .	61
6.10	Representação do meio canal reto com <i>stent</i> . . . . .	62
6.11	Representação do meio canal curvo com <i>stent</i> . . . . .	62
6.12	Gráfico comparativo para a concentração de droga em razão da altura do canal para $Sc = 1$ em $x = 5 R$ e $t = 7 s$ . . . . .	64
6.13	Resultados para canal reto em $t = 7 s$ . . . . .	64
6.14	Gráfico comparativo para a concentração de droga em razão da altura do canal para $Sc = 1$ em $x = 5 R$ e $t = 7 s$ . . . . .	65
6.15	Resultados para canal curvo em $t = 7 s$ . . . . .	65

7.1	Geometria 01. . . . .	71
7.2	Campo de concentração para a geometria 01. . . . .	71
7.3	Campo de velocidade horizontal para a geometria 01. . . . .	72
7.4	Geometria 02. . . . .	72
7.5	Campo de concentração para a geometria 02. . . . .	73
7.6	Campo de velocidade horizontal para a geometria 02. . . . .	73
7.7	Geometria 03. . . . .	73
7.8	Campo de concentração para a geometria 03. . . . .	74
7.9	Campo de velocidade horizontal para a geometria 03. . . . .	74
7.10	Novo campo de concentração para a geometria 03. . . . .	75
7.11	Novo campo de velocidade horizontal para a geometria 03. . . . .	75
7.12	Geometria 04. . . . .	76
7.13	Campo de concentração para a geometria 04. . . . .	76
7.14	Campo de velocidade horizontal para a geometria 04. . . . .	76
7.15	Geometria 05. . . . .	77
7.16	Campo de concentração para a geometria 05. . . . .	77
7.17	Campo de velocidade horizontal para a geometria 05. . . . .	78
7.18	Geometria 06. . . . .	78
7.19	Campo de concentração para a geometria 06. . . . .	79
7.20	Campo de velocidade horizontal para a geometria 06. . . . .	79
7.21	Novo campo de concentração para a geometria 06. . . . .	79
7.22	Novo campo de velocidade horizontal para a geometria 06. . . . .	80
7.23	Geometria 07. . . . .	80
7.24	Campo de concentração para a geometria 07. . . . .	81
7.25	Campo de velocidade horizontal para a geometria 07. . . . .	81
7.26	Geometria 08. . . . .	81
7.27	Campo de concentração para a geometria 08. . . . .	82
7.28	Campo de velocidade horizontal para a geometria 08. . . . .	82
7.29	Geometria 09. . . . .	83
7.30	Campo de concentração para a geometria 09. . . . .	83
7.31	Campo de velocidade horizontal para a geometria 09. . . . .	83
7.32	Novo campo de concentração para a geometria 09. . . . .	84
7.33	Novo campo de velocidade horizontal para a geometria 09. . . . .	84
7.34	Geometria 10. . . . .	85
7.35	Campo de concentração para a geometria 10. . . . .	85
7.36	Campo de velocidade horizontal para a geometria 10. . . . .	85
7.37	Geometria 11. . . . .	86
7.38	Campo de concentração para a geometria 11. . . . .	86
7.39	Campo de velocidade horizontal para a geometria 11. . . . .	87

7.40	Geometria 12. . . . .	87
7.41	Campo de concentração para a geometria 12. . . . .	88
7.42	Campo de velocidade horizontal para a geometria 12. . . . .	88
7.43	Geometria 13. . . . .	88
7.44	Campo de concentração para a geometria 13. . . . .	89
7.45	Campo de velocidade horizontal para a geometria 13. . . . .	89
7.46	Geometria 14. . . . .	90
7.47	Campo de concentração para a geometria 14. . . . .	90
7.48	Campo de velocidade horizontal para a geometria 14. . . . .	90
7.49	Geometria 15. . . . .	91
7.50	Campo de concentração para a geometria 15. . . . .	91
7.51	Campo de velocidade horizontal para a geometria 15. . . . .	92
7.52	Comparações dos perfis de concentração. . . . .	93
7.53	Comparações dos perfis de velocidade horizontal. . . . .	94
A.1	Resultados para a geometria 01. . . . .	101
A.2	Resultados para a geometria 02. . . . .	102
A.3	Resultados para a geometria 03 após ajuste das condições de contorno.102	
A.4	Resultados para a geometria 04. . . . .	103
A.5	Resultados para a geometria 05. . . . .	103
A.6	Resultados para a geometria 06 após ajuste das condições de contorno.104	
A.7	Resultados para a geometria 07. . . . .	104
A.8	Resultados para a geometria 08. . . . .	105
A.9	Resultados para a geometria 09 após ajuste das condições de contorno.105	
A.10	Resultados para a geometria 10. . . . .	106
A.11	Resultados para a geometria 11. . . . .	106
A.12	Resultados para a geometria 12. . . . .	107
A.13	Resultados para a geometria 13. . . . .	107
A.14	Resultados para a geometria 14. . . . .	108
A.15	Resultados para a geometria 15. . . . .	108

# Lista de Tabelas

7.1	Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Delauney em meio canal. . . . .	67
7.2	Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Mesh Adapt em meio canal. . . . .	68
7.3	Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Delauney em canal completo. . . . .	68
7.4	Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Mesh Adapt em canal completo. . . . .	68

# Capítulo 1

## Introdução

Segundo a OMS (Organização Mundial da Saúde), as doenças cardiovasculares (DCV) lideram as causas de morte pelo mundo [1]. Estima-se que dos 17,9 milhões de óbitos registrados em 2019, 32 % foram causados por DCV. E destes, 17 milhões foram de óbitos prematuros (de pessoas abaixo de 70 anos de idade) causados por doenças não-infecciosas, com 38 % das fatalidades sendo causadas por DCV.

Dentre as diversas possibilidades de origem para DCV, as doenças na artéria coronária (DAC) – ou doenças cardiovasculares isquêmicas – foram as responsáveis por 16 % do número total de óbitos registrados em 2019, representando a *causa mortis* com maior ocorrência [2]. Dentre as causas que levam a uma DAC, a mais conhecida é a aterosclerose. O quadro clínico consiste pela formação de placas de gordura – ateromas – na parede interna das artérias, ocasionando no estreitamento do canal disponível para o fluxo sanguíneo, dificultando a passagem de nutrientes e oxigênio. Para evitar o quadro clínico, é importante que ocorra uma adequação de hábitos alimentares e de saúde, tais como evitar o uso de álcool, de tabaco, dietas ricas em gordura e a falta de exercícios físicos.

No caso do paciente já ter desenvolvido o quadro clínico, dois tratamentos clínicos podem ser empregados: o *bypass coronário* e a *angioplastia coronária transluminal percutânea* (PTCA). Enquanto que a primeira é uma cirurgia mais invasiva, onde são utilizados vasos sanguíneos de outras partes do paciente para realizar a ligação entre as regiões saudáveis da artéria – criando uma rota alternativa de fluxo –, o PTCA é um procedimento cirúrgico muito menos agressivo, uma vez que coloca-se um tubo aramado (*stent*) na região afetada e este se expande, de forma a desobstruir o fluxo sanguíneo.

A partir dos estudos desenvolvidos por MARQUES [3] e AMARAL [4], este trabalho foi realizado com a finalidade de desenvolver um código em *Python* utilizando o Método dos Elementos Finitos para a formulação corrente-vorticidade com o transporte da espécie química, a fim de conhecer a dinâmica do escoamento sanguíneo numa artéria com diferentes níveis de restrição e configurações de aterosclerose e

com *stent farmacológico* implantado.

## 1.1 Hipóteses e método adotado

As equações de governo do problema foram desenvolvidas a partir da hipótese do meio contínuo, permitindo utilizar os princípios de conservação de massa, de quantidade de movimento linear e de espécie química. O sangue foi considerado como um fluido incompressível, newtoniano e monofásico, além de ter o coeficiente difusivo aproximado como constante.

A equação de Navier-Stokes foi apresentada segundo a formulação de corrente-vorticidade com a equação de transporte de espécie química sem geração interna. Estas foram discretizadas através do Método de Elementos Finitos e aplicadas sobre malhas triangulares lineares não estruturadas, as quais desenvolvidas através do software **GMSH**. A discretização temporal das equações foi feita através da expansão em série de Taylor mantendo os termos de segunda ordem no intuito de reduzir as oscilações espúrias inerentes aos problemas do tipo convecção-difusão. A formulação de Galerkin foi utilizada para discretizar as equações no espaço. Deste modo, o esquema de *Taylor-Galerkin* ou *Galerkin característico* foi utilizado, conforme proposição de DONEA [5] e ZIENKIEWICZ e TAYLOR [6].

A validação do código desenvolvido foi feita através da comparação das soluções numéricas obtidas com valores de referência. No primeiro caso, os resultados foram comparados com a solução analítica do problema de Haugen-Poiseuille escoamento em canal. Em seguida, comparou-se os resultados do escoamento em cavidade com tampa deslizante – *lid-driven cavity flow* – com as soluções encontradas por MARCHI *et al.* [7]. Há também a verificação dos resultados obtidos para o escoamento em canal com degrau, comparando-os com o trabalho de THOMAS *et al.* [8]. Por fim, a última verificação é feita a partir dos resultados calculados com os obtidos pelos autores em MARQUES e ANJOS [9].

Este trabalho foi desenvolvido sobre 15 (quinze) configurações diferentes para o canal com *stent*:

- Geometria 1: restrição do fluxo sanguíneo em 25 % e presença de *stents* circulares;
- Geometria 2: restrição do fluxo sanguíneo em 50 % e presença de *stents* circulares;
- Geometria 3: restrição do fluxo sanguíneo em 75 % e presença de *stents* circulares;

- Geometria 4: restrição do fluxo sanguíneo em 25 % e presença de *stents* elípticos (raio menor adentrando o fluxo);
- Geometria 5: restrição do fluxo sanguíneo em 50 % e presença de *stents* elípticos (raio menor adentrando o fluxo);
- Geometria 6: restrição do fluxo sanguíneo em 75 % e presença de *stents* elípticos (raio menor adentrando o fluxo);
- Geometria 7: restrição do fluxo sanguíneo em 25 % e presença de *stents* elípticos (raio maior adentrando o fluxo);
- Geometria 8: restrição do fluxo sanguíneo em 50 % e presença de *stents* elípticos (raio maior adentrando o fluxo);
- Geometria 9: restrição do fluxo sanguíneo em 75 % e presença de *stents* elípticos (raio maior adentrando o fluxo);
- Geometria 10: duas restrições do fluxo sanguíneo em 25 % e presença de *stents* circulares;
- Geometria 11: duas restrições do fluxo sanguíneo em 50 % e presença de *stents* circulares;
- Geometria 12: duas restrições do fluxo sanguíneo em 25 % e presença de *stents* elípticos (raio menor adentrando o fluxo);
- Geometria 13: duas restrições do fluxo sanguíneo em 50 % e presença de *stents* elípticos (raio menor adentrando o fluxo);
- Geometria 14: duas restrições do fluxo sanguíneo em 50 % e presença de *stents* elípticos (raio maior adentrando o fluxo);
- Geometria 15: duas restrições do fluxo sanguíneo em 50% e presença de *stents* elípticos (raio maior adentrando o fluxo).

O pós-processamento dos resultados foi feito com o software livre *Paraview*, que permitiu a melhor visualização gráfica dos resultados obtidos.

## 1.2 Estruturação do trabalho

Este trabalho foi dividido em oito capítulos. No Capítulo 2 é realizada uma breve introdução ao *stent* farmacológico e ao Método de Elementos Finitos. No Capítulo 3 são desenvolvidas as equações de governo do problema, sendo apresentada a sua

forma final após todas as manipulações aplicáveis. No Capítulo 4 é implementado o MEF nas equações de governo obtidas na seção anterior, discretizando-as no espaço e no tempo.

Finalizada a contextualização teórica, no quinto capítulo é apresentado o código numérico desenvolvido para este problema. No Capítulo 6 são apresentadas todas as verificações realizadas, enquanto que no Capítulo 7 são apresentadas as geometrias utilizadas, bem como os resultados obtidos. Por fim, é apresentada a conclusão deste trabalho no último capítulo. Desta forma, o trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1 - *Introdução*
- Capítulo 2 - *Revisão bibliográfica*
- Capítulo 3 - *Equações de governo*
- Capítulo 4 - *Método de Elementos Finitos*
- Capítulo 5 - *Código numérico*
- Capítulo 6 - *Validação do código numérico*
- Capítulo 7 - *Resultados*
- Capítulo 8 - *Conclusão*

# Capítulo 2

## Revisão bibliográfica

Neste capítulo, será realizado uma breve contextualização histórica do problema e da metodologia empregada, abordando sobre os Stents Farmacológicos e o Método de Elementos Finitos aplicado à equações do tipo convecção-difusão.

### 2.1 Stent Farmacológico

Em 1964, DOTTER e JUDKINS [10] propuseram um tratamento alternativo para impedir a obstrução do fluxo sanguíneo em artérias femorais obstruídas em casos clínicos severos decorrentes de aterosclerose. O método ficou conhecido como *angioplastia transluminal percutânea* e consistia na cateterização da artéria femoral oposta, um procedimento minimamente invasivo e que se mostrou promissor, além de fácil execução para qualquer médico com familiarização com a cateterização vascular. O procedimento também poderia ser empregado em artérias coronárias.

Em 1979, GRÜNTZIG *et al.* [11] trouxeram em seu trabalho uma nova abordagem para tratar as estenoses em artérias coronárias a partir da angioplastia transluminal percutânea, através da inserção de um cateter com balão inflável, a fim de utilizá-lo para dilatar a região com estenose. Tal procedimento recebeu o nome de *angioplastia coronária transluminal percutânea* (PTCA).

No entanto, pacientes submetidos ao PTCA utilizando um balão inflável apresentavam reestenose ou oclusão vascular após um certo período de tempo. Em razão disso, diversos estudos foram realizados e, em 1987, SIGWART *et al.* [13] publicaram um estudo feito a partir da implantação de uma prótese que consistia em uma malha autoexpansível de aço inoxidável em 25 pacientes com reestenose, sendo 6 deles receberam na artéria femoral, enquanto os outros 19 receberam na artéria coronária ou periférica. A prótese foi denominada como *stent*.

Em 1994, SERRUYS *et al.* [14] apresentaram um extenso trabalho de comparação entre a angioplastia feita com a implantação de stent e a realizada através de um balão inflável. Foram acompanhados 520 pacientes, onde 262 tiveram a implan-

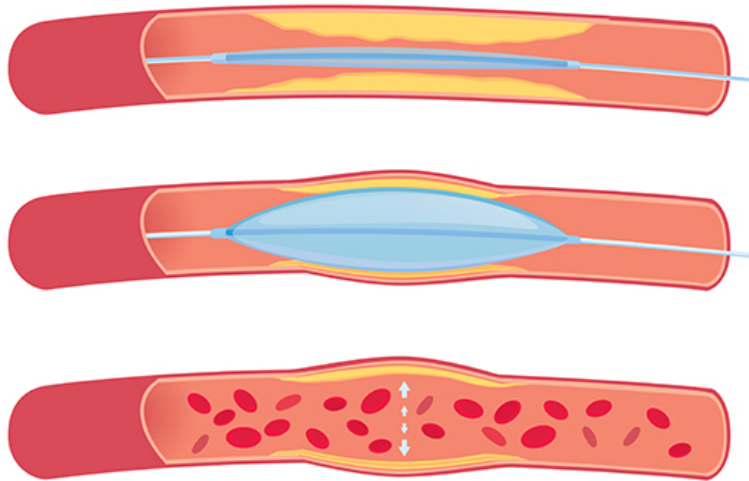


Figura 2.1: Esquema do PTCA com balão inflável.

Adaptado de: SBC.

tação de stent e os outros 258 passaram pelo procedimento com o balão inflável. Os resultados obtidos mostraram uma maior efetividade para os casos onde houve implantado o stent, tanto para os resultados clínicos quanto para os angiográficos. No entanto, este método causou, em média, uma maior estadia dos pacientes no hospital, visto que havia a necessidade de realizar terapia anticoagulante para evitar a ocorrência de trombose.

Em 2001, SOUSA *et al.* [15] divulgaram um estudo feito com uma prótese de stent diferente da comumente empregada até aquele momento. A nova prótese consistia em um substrato metálico revestido por uma camada polimérica com medicamentos específicos selecionados (no caso, o *sirolimus*), no intuito de reduzir a chance de ocorrência de reestenose. No estudo, foi realizado o acompanhamento dos participantes por 8 meses e não foi detectada reestenose próxima às extremidades do stent, além de não ter ocorrido casos de trombose ou processo inflamatório devido ao polímero. Têm-se assim o *stent farmacológico*.

Dois anos mais tarde, MOSES *et al.* [17] divulgaram um estudo onde foi empregado randomicamente stents convencional e revestidos com o sirolimus em 1058 pacientes com quadros complexos (diabéticos, lesão com grande extensão e vasos pequenos). Os resultados mostraram uma redução de 21% para 8,6% nos casos de reestenose ao trocar o stent convencional pelo revestido com o medicamento.

Em razão da inclusão de medicamentos às próteses desenvolvidas, houve a necessidade de desenvolver estudos sobre a difusão dos mesmos na corrente sanguínea. Neste sentido, em 2001, HWANG *et al.* [18] publicaram um estudo relacionando a distribuição da droga e o *número de Péclet*, além da influência da geometria do stent

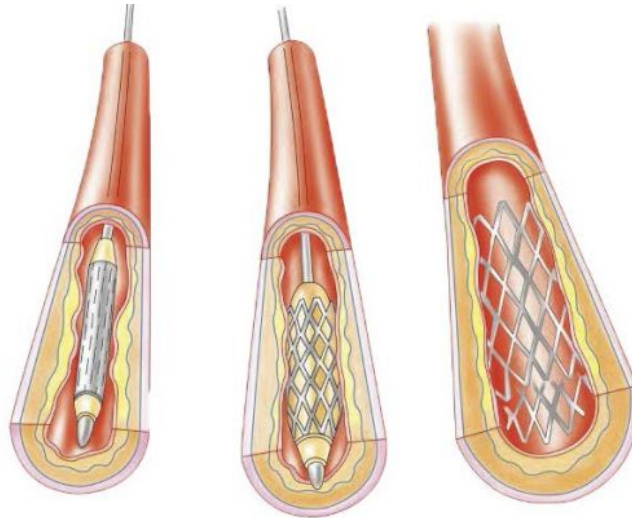


Figura 2.2: Esquema do PTCA com stent.

Adaptado de: SAÚDE.

na difusão da espécie química.

Em 2014, BOZSAK *et al.* [19] mostram em seu trabalho que o tipo de droga utilizado no stent irá influenciar no processo difusivo e, conseqüentemente, na efetividade do tratamento. Esta conclusão foi obtida através da modelagem utilizada, a qual levou em consideração a estrutura multicamadas da parede arterial, bem como sua estrutura de meio poroso. Desta forma, foi utilizada a *Lei de Darcy* para modelar o escoamento dentro das camadas da artéria e foram obtidos resultados distintos para cada medicamento analisado.

Em 2017, LUCENA *et al.* [20] desenvolveram um trabalho onde foi analisada a dissolução, transporte e ligação do sirolimus à parede arterial em um domínio axisimétrico. Este representa a camada polimérica e a parede porosa da artéria – a qual foi considerada como anisotrópica – nas vizinhanças de uma parte do stent. As equações de governo foram discretizadas através do Método de Elementos Finitos. Os resultados obtidos mostraram que controle sobre a liberação do medicamento pode ser feito através do coeficiente de difusão do polímero, de modo a acelerar ou retardar o processo. Além disso, também possível concluir que 46-48% do sirolimus é difundido no lúmen e é dispersado na corrente sanguínea, enquanto que 52-54% permeia pela parede arterial. Além disso, a distribuição espacial da droga é altamente influenciada pelo escoamento e pelas propriedades da parede arterial, tornando muito susceptível às condições de saúde do paciente.

No mesmo ano, WANG *et al.* [21] divulgam um trabalho onde foi estudado a hidrodinâmica do sangue em uma artéria com aterosclerose e com stent farmacológico implantado. O fluido em análise é aproximado como newtoniano e monofásico e as equações de governo são aproximadas pelo Método de Elementos Finitos. O estudo

é conduzido em geometrias axissimétricas variadas, onde é realizada a comparação dos campos de velocidade, pressão e concentração entre eles. Os resultados obtidos mostram que uma análise em geometria com ateroma mais simplificado apresenta resultados próximos de um real.

## 2.2 Método de Elementos Finitos - Equação Convecção-Difusão

O Método de Elementos Finitos teve a sua base matemática desenvolvida pelo matemático e físico suíço Walter Ritz (1878-1909), o qual realizava transformações de problemas contínuos em discretos com finitos graus de liberdade, onde as variáveis do problema eram aproximadas pelo produto das funções base pré-selecionadas e as constantes a serem obtidas. Tal procedimento foi designado como *formulação variacional*. Em 1915, o engenheiro e matemático soviético Boris Galerkin (1871-1945) utilizou o Método dos Resíduos Ponderados para definir as funções base empregadas na formulação proposta por Ritz como equivalentes às funções peso. Esta Metodologia ficou conhecida como a *Formulação de Galerkin*, sendo amplamente utilizada até os dias atuais.

Em 1943, COURANT [22] empregou a formulação variacional em um domínio discretizado com elementos triangulares. A primeira utilização do termo “elemento finito” foi no artigo *The finite element method in plane stress analysis*, do autor CLOUGH [23], no ano de 1960.

O Método de Elementos Finitos foi bastante disseminado, principalmente para resolução de problemas da mecânica dos sólidos. No entanto, a utilização desta metodologia em problemas de mecânica dos fluidos somente pode ser utilizada mais tarde, em razão das oscilações espúrias que surgiam quando o termo convectivo era superior ao termo difusivo. Devido a isso, foi necessário o desenvolvimento de diversas metodologias para solucionar problemas desse gênero.

Em 1976, CHRISTIE *et al.* [24] propôs em seu trabalho uma formulação onde as funções peso eram assimétricas ou quadráticas em problemas unidimensionais. Tal metodologia foi denominada como *Formulação Petrov-Galerkin* e permitiu solucionar o empecilho trazido pelas oscilações espúrias. No ano seguinte, HEINRICH *et al.* [25] expandiram a formulação para problemas bidimensionais.

Em 1982, dois importantes trabalhos foram publicados. O primeiro foi o de BROOKS e HUGHES [26], onde foi proposta a *Formulação Streamline Upwind Petrov-Galerkin*, onde ocorreu a união do método *upwind* clássico com a formulação Petrov-Galerkin para as funções peso. Esta abordagem buscou impor os efeitos de difusão e viscosidade apenas na direção de escoamento do fluido, minimizando a

difusão no sentido perpendicular – comum no método Petrov-Galerkin.

O segundo trabalho foi o desenvolvido por PIRONNEAU [27], onde é apresentada uma solução para as equações do tipo convecção-difusão utilizando uma combinação do Método das Curvas Características e o Método dos Elementos Finitos. Esta proposição permitiu realizar a derivação de esquemas conservativos do tipo *upwind* com precisão de primeira e segunda ordem, sem ocorrer a explosão dos resultados mesmo quando o coeficiente de difusão tendia a zero. Este esquema é simétrico, apresentando vantagens no processo de resolução dos sistemas lineares, comparado a outros esquemas *upwind*. No entanto, a implementação numérica desta resolução depende que um processo de integração no vetor no lado direito do sistema linear, causando dificuldades para manter a conservação e as estimativas de erros. Este método dá início a diversos trabalhos sobre o tema, passando a ser chamado de *Galerkin Característico* com o passar do tempo.

Em 1984, DONEA [5] propôs a utilização de termos de ordem superior na expansão da série de Taylor para derivação temporal como uma solução para o problema com as oscilações espúrias. Diferentemente dos métodos *upwind*, a *Formulação Taylor-Galerkin* – como ficou conhecida – não precisa de funções peso específicas, sendo de implementação mais simplificada. Além disso, o estudo de LÖHNER *et al.* [28] mostra que mesmo o processo de discretização dos esquemas de Galerkin Característico e Taylor-Galerkin sejam distintos, os sistemas de equações obtidos são idênticos para equação do tipo convecção-difusão onde a variável é um escalar.

Como explicitado anteriormente, a facilidade de implementação do método de Taylor-Galerkin, onde não há necessidade de alterar as funções de peso permite a criação de matrizes globais simétricas de implementação mais simples. Além disso, como os sistemas de equação são semelhantes quando se compara os esquemas de Taylor-Galerkin e Galerkin Característico, a escolha por um dos dois esquemas acaba por ocorrer em razão da preferência individual do autor deste trabalho. Desta forma, a escolha foi feita pela discretização pelo esquema de Taylor-Galerkin.

# Capítulo 3

## Equações de governo

Como definido na introdução deste trabalho, o fluido em questão é considerado como um meio contínuo, de modo que se o dividirmos em elementos infinitesimais, não haverá espaços vazios em seu meio. Desta maneira, o escoamento pode ser modelado segundo os princípios de conservação universais, dentre os quais serão usados:

- Conservação de Massa;
- Conservação de Quantidade de Movimento;
- Conservação da Espécie Química.

Na primeira seção, será apresentado o princípio da conservação de massa e a equação da continuidade para um fluido incompressível. Na segunda seção, a equação de Navier-Stokes segundo o princípio de conservação da quantidade de movimento linear para um elemento de fluido é apresentada. Em seguida, na terceira seção, apresenta-se a equação de Transporte da Espécie Química. Por fim, na quarta seção, é realizada a adimensionalização das equações de governo e, na quinta seção, é apresentada a equação de Navier-Stokes seguindo a formulação corrente-vorticidade.

### 3.1 Princípio da conservação de massa

Segundo [29], o princípio de conservação da massa é estabelecido como:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de massa} \\ \text{dentro do volume de controle.} \end{array} \right] = - \left[ \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de massa} \\ \text{que cruza a fronteira.} \end{array} \right]$$

A taxa de acumulação de massa no interior do volume de controle é matematicamente representada pela integral da variação temporal da quantidade de massa em todo o volume.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm \quad (3.1)$$

Considerando a massa infinitesimal, a mesma pode ser definida como  $dm = \rho dV$ . Substituindo na Eq. 2.1 e considerando o volume de controle invariável no tempo, tem-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \rho \int_V \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (3.2)$$

A representação matemática do fluxo líquido de massa que cruza a fronteira do volume é:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.3)$$

Desta forma, o princípio de conservação da massa pode ser definida como:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.4)$$

Empregando o *Teorema de Gauss* sobre a Eq. (3.4), reescreve-se como:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (3.5)$$

Substituindo a Eq. (3.5) na Eq. (3.4) e reformulando a expressão, obtém-se:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (3.6)$$

Como  $dV \neq 0$ , então:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.7)$$

A Eq. (3.7) é conhecida como *Equação de Continuidade*, onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidade bidimensional com componentes definidos matematicamente como  $\mathbf{v} = [u, v]$ . Por fim,  $\nabla$  representa o vetor gradiente, representado matematicamente por  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]$ . Prosseguindo no desenvolvimento da expressão anterior, encontra-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.8)$$

Como definido anteriormente neste trabalho, o sangue é aproximado como um fluido incompressível, fazendo com que  $\rho$  não varie no tempo e nem no espaço. Com isso,  $\rho$  tem valor constante, implicando em  $\partial \rho / \partial t = 0$  e  $\nabla \rho = 0$ , ou seja:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.9)$$

A Eq. (3.9) é conhecida como *Equação da continuidade para um fluido incompressível*.

## 3.2 Princípio da conservação de quantidade de movimento

Segundo [29], o princípio da conservação de quantidade de movimento é entendido como:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de quantidade} \\ \text{de movimento linear dentro do} \\ \text{volume de controle.} \end{array} \right] = - \left[ \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de quantidade} \\ \text{de movimento linear que} \\ \text{cruza a fronteira.} \end{array} \right] \\ & + \left[ \begin{array}{l} \text{Resultante das forças} \\ \text{aplicadas à superfície} \\ \text{de controle.} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Resultante das forças} \\ \text{aplicadas ao volume} \\ \text{de controle.} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Definindo cada um dos fatores apresentados na descrição acima, tem-se:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de} \\ \text{quantidade de movimento linear} \\ \text{dentro do volume de controle.} \end{array} \right] = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV \quad (3.10)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Fluxo líquido de quantidade de} \\ \text{movimento linear que cruza} \\ \text{a fronteira.} \end{array} \right] = \oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.11)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Resultante das forças aplicadas} \\ \text{à superfície de controle.} \end{array} \right] = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.12)$$

Onde  $\boldsymbol{\sigma}$  é o tensor de tensões.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Resultante das forças aplicadas} \\ \text{ao volume de controle.} \end{array} \right] = \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.13)$$

Onde  $\mathbf{g}$  é o vetor da aceleração da gravidade. Tem-se então, respeitadno o princípio de conservação da quantidade de movimento linear:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.14)$$

Aplicando o *Teorema de Gauss* nas integrais de superfície da relação anterior, obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (3.15)$$

Rearranjando a expressão anterior obtida,

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \right) dV = 0 \quad (3.16)$$

Sendo  $dV \neq 0$ , a Eq. (3.16) é reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{g} \quad (3.17)$$

Ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (3.18)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da Eq. (3.17), pode-se escrever:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) \longrightarrow \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \mathbf{v} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) \right] \quad (3.19)$$

O último termo obtido é a *Equação de Continuidade* que possui valor igual zero, conforme demonstração anterior. Logo, pode-se reescrever a Eq. (3.19):

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (3.20)$$

O tensor de tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) pode ser decomposto na soma de dois outros tensores, isto é:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.21)$$

Onde  $p$  é o campo de pressão,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade e  $\tau$  é o tensor desviatório. Utilizando esta relação na Eq. (3.21), tem-se:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{g} \quad (3.22)$$

O tensor desviatório  $\tau$  depende da taxa de deformação do fluido e podemos defini-lo relacionando às propriedades físicas do meio. Considerando um fluido homogêneo, isotrópico e o tensor desviatório como sendo uma função contínua do gradiente de velocidade, tem-se:

$$\tau = \mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.23)$$

Sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica do meio e  $\lambda$  o segundo coeficiente de viscosidade. Substituindo esta relação na Eq. (3.22), obtém-se:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (3.24)$$

Ou seja,

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (3.25)$$

Considerando que  $\mu$  não depende da posição, tem-se:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu [\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^T] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (3.26)$$

Ou ainda,

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu [\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})^T] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (3.27)$$

Aplicando o resultado da Eq. (3.9) na relação acima, a seguinte expressão é encontrada:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (3.28)$$

Sendo  $\nu$  o coeficiente de viscosidade cinemática do meio. A Eq. (3.28) é conhecida como *Equação de Navier-Stokes* para fluido incompressível, homogêneo, isotrópico e com viscosidade constante em função do espaço.

### 3.3 Princípio da conservação da espécie química

Este princípio pode ser definido da seguinte forma:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Taxa de acumulação} \\ \text{de quantidade de} \\ \text{espécie química} \\ \text{dentro do volume} \\ \text{de controle.} \end{array} \right] = - \left[ \begin{array}{c} \text{Fluxo líquido da} \\ \text{quantidade de} \\ \text{espécie química} \\ \text{que cruza a} \\ \text{fronteira.} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Resultante da taxa} \\ \text{de geração de} \\ \text{espécie química} \\ \text{no volume} \\ \text{de controle.} \end{array} \right]$$

Assim como feito nas seções anteriores, a representação matemática de cada princípio é:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Taxa de acumulação de quantidade} \\ \text{de espécie química dentro} \\ \text{do volume de controle.} \end{array} \right] = \int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV \quad (3.29)$$

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Fluxo líquido de} \\ \text{quantidade de} \\ \text{espécie química que} \\ \text{cruza a fronteira.} \end{array} \right] = \oint_S c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \oint_S D \nabla c \cdot \mathbf{n} dA \quad (3.30)$$

Sendo  $D$  o coeficiente de difusão de espécie química.

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Resultante da taxa de} \\ \text{geração de espécie química} \\ \text{no volume de controle.} \end{array} \right] = \int_V \dot{R} dV \quad (3.31)$$

Respeitando o princípio de conservação de espécie química:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} = - \oint_S c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_S D \nabla c \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \dot{R} dV \quad (3.32)$$

Aplicando o *Teorema de Gauss* nas integrais de superfície, a Eq. (3.32) pode ser reescrita como:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} = - \int_V \nabla \cdot (c \mathbf{v}) dV + \int_V \nabla \cdot (D \nabla c) dV + \int_V \dot{R} dV \quad (3.33)$$

Ou ainda como:

$$\int_V \left[ \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}) - \nabla \cdot (D \nabla c) - \dot{R} \right] dV = 0 \quad (3.34)$$

Assim como nas deduções anteriores,  $dV \neq 0$ :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \mathbf{v}) - \nabla \cdot (D \nabla c) - \dot{R} = 0 \quad (3.35)$$

Ou seja,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) = \nabla \cdot (D\nabla c) + \dot{R} \quad (3.36)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c + c \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot (D\nabla c) + \dot{R} \quad (3.37)$$

Como obtido na Eq. (3.29), a relação  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , de modo que:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D\nabla c) + \dot{R} \quad (3.38)$$

No estudo desenvolvido, foi considerado que não há geração de espécie química e que D é constante, o que leva a reescrever a expressão anterior:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D\nabla^2 c \quad (3.39)$$

Neste estudo, onde o fluido é considerado como incompressível, com coeficiente de difusão constante e sem geração de espécie química, tem-se que a Eq. (3.39) é a *Equação de Transporte de Espécie Química*.

### 3.4 Adimensionalização

A adimensionalização de equações é um recurso utilizado para proporcionar um melhor entendimento sobre quais fatores tem maior influência sobre as relações. Nesta seção serão adimensionalizadas as duas principais expressões do problema estudado, *Equação de Navier-Stokes* e *Equação de Transporte de Espécie Química*, além da *Equação de Continuidade*. Desta forma, as seguinte relações foram empregadas. O asterisco representa a variável adimensional:

$$\rho = \rho_0 \rho^* \quad \nu = \nu_0 \nu^* \quad p = \rho_0 U^2 p^* \quad D = D_0 D^* \quad c = (c_s - c_0) c^* + c_0$$

$$x = Lx^* \quad t = \frac{L}{U}t^* \quad \nabla = \frac{1}{L}\nabla^* \quad \mathbf{v} = U\mathbf{v}^* \quad \mathbf{g} = g_0\mathbf{g}^*$$

O asterisco indica a variável adimensional. A partir destes parâmetros, pode-se substituir na **Equação de Continuidade para um fluido incompressível**, deduzida através da Eq. (3.9):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{U}{L}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (3.40)$$

A partir desta mesma lógica, pode-se realizar o mesmo procedimento para a *Equação de Navier-Stokes*, deduzida na Eq. (3.28):

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu_0 U}{L^2} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + g_0 \mathbf{g}^* \quad (3.41)$$

Multiplicando ambos os lados da expressão anterior por  $L/U^2$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu_0}{UL} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \quad (3.42)$$

Os valores adimensionais de  $\rho^*$  e  $\nu^*$  são iguais a unidade. Sendo assim, reescreve-se a Eq. (3.42) como:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\nu_0}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \quad (3.43)$$

Por fim, fazendo o mesmo procedimento para a *Equação de Transporte da Espécie Química*, deduzida na Eq. (3.39), tem-se:

$$(c_S - c_0) \frac{U}{L} \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + (c_S - c_0) \frac{U}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = (c_S - c_0) \frac{D_0}{L^2} D^* \nabla^{*2} c^* \quad (3.44)$$

Ao multiplicar ambos os lados da Eq. (3.44) por  $L/(U(c_S - c_0))$ , têm-se:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{D_0}{UL} D^* \nabla^{*2} c^* \quad (3.45)$$

Considerando que o valor adimensional de  $D^*$  é igual a unidade, a Eq. (3.45) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{D_0}{UL} \nabla^{*2} c^* \quad (3.46)$$

A partir das equações adimensionalizadas obtidas anteriormente, é possível identificar alguns grupos adimensionais relevantes a este estudo, são eles:

1. **Número de Reynolds ( $Re$ ):** relaciona as forças viscosas com as forças de inércia, indicando se a primeira pode ser considerável como desprezível em relação à segunda. FOX *et al.* [30] [30] traz que o escoamento interno em tubos será laminar se  $Re < 2300$  e turbulento para  $Re > 2300$ .

$$Re = \frac{UL}{\nu_0} \quad (3.47)$$

de modo que  $U$  representa a velocidade de referência,  $L$  o comprimento característico e  $\nu_0$  a viscosidade cinemática do meio.

2. **Número de Froude ( $Fr$ ):** traz a razão entre forças de inércia e de gravidade e é obtida através da expressão:

$$Fr = \frac{G}{\sqrt{g_0 L}} \quad (3.48)$$

onde  $g_0$  é a aceleração da gravidade referencial.

3. **Número de Schmidt ( $Sc$ ):** mede a relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e térmica. É obtido através da expressão abaixo:

$$Sc = \frac{\nu_0}{D_0} \quad (3.49)$$

Sendo  $D_0$  o coeficiente de difusão da espécie química em um estado de referência.

4. **Número de Péclet de massa ( $Pe_m$ ):** de acordo com [29], é relação entre a dimensão característica do problema em estudo e a espessura da camada limite de concentração da espécie química. Pode ser entendido ainda como a relação entre concentração transferida por convecção e por difusão. Por fim, pode ser representado como o produto entre dois números adimensionais – Número de Reynolds e Número de Schmidt:

$$Pe_m = \frac{D_0}{\sqrt{UL}} \longrightarrow Pe_m = \frac{1}{\sqrt{ScRe}} \quad (3.50)$$

A partir destes grupos adimensionais, as equações encontradas podem ser reescritas conforme segue:

$$\text{Equação de Continuidade} \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.51)$$

$$\text{Equação de Navier-Stokes} \longrightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (3.52)$$

$$\text{Equação de Transporte de Espécie Química} \longrightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (3.53)$$

Relembrando que a Eq. (3.51) é apenas para fluido newtoniano e incompressível.

### 3.5 Formulação corrente-vorticidade

A *Equação de Navier-Stokes* no formato em que é apresentada até o momento neste trabalho apresenta um acoplamento entre o campo de pressão e o de velocidade do fluido, dificultando a implementação computacional do problema. Sendo

assim, a fim de resolver esta questão será necessário utilizar a *formulação corrente-vorticidade*, a qual permite desacoplar os dois campos. Antes de implementar esta formulação, é necessário introduzir a seguinte identidade vetorial:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.54)$$

Utilizando esta identidade na *Equação de Navier-Stokes*, encontra-se:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left( \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (3.55)$$

Aplicando o rotacional por toda a equação,

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \times \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \times \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g} \quad (3.56)$$

Reorganizando,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] + \nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}] = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g} \quad (3.57)$$

Como o rotacional do gradiente de um escalar é nulo, os termos que apresentam o operador gradiente irão se anular. Analogamente, o último termo será anulado pois as derivadas de uma constante, no caso  $\mathbf{g}$ , são iguais a zero. Sendo assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}] = \frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] \quad (3.58)$$

O vetor  $\nabla \times \mathbf{v}$  é conhecido como *vorticidade* ( $\omega$ ). Ou seja,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \omega] = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (3.59)$$

O segundo termo do lado esquerdo da Eq. (3.59) pode ser substituído pela seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times \omega] = -\mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.60)$$

Substituindo-a na Eq. (3.59),

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (3.61)$$

Conforme demonstrado por [29], o produto  $\omega \cdot \nabla \mathbf{v}$  é igual a zero quando a vorticidade é perpendicular ao vetor velocidade, para escoamentos bidimensionais. Substituindo o produto na relação anterior:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (3.62)$$

A Eq. (3.62) é a *Equação da vorticidade* para escoamentos bidimensionais de fluidos newtonianos e incompressíveis. A partir destas restrições e considerando o escoamento como permanente, a velocidade pode ser calculada através da vazão volumétrica. Sendo assim, a velocidade é substituída por um escalar – a *Função de corrente* ( $\psi$ ). A relação entre o escalar e a velocidade é obtido através da expansão da *Equação da continuidade*, como segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.63)$$

A fim de satisfazer a Eq. (3.63), é necessário definir a relação entre a *Função de corrente* e as componentes da velocidade:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.64)$$

Expandindo a equação de vorticidade para um escoamento bidimensional, tem-se:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.65)$$

Substituindo a Eq. (3.64) na Eq. (3.65),

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.66)$$

De modo que a formulação corrente-vorticidade pode ser expressa por:

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (3.67)$$

### 3.6 Equações de governo adimensionalizadas

Desta forma, é possível identificar todas as equações de governo na forma adimensionalizada e que são relevantes neste trabalho.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (3.68)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (3.69)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (3.71)$$

Sendo  $\mathbf{D}$  um operador de componentes  $\left[ \frac{\partial}{\partial y}; -\frac{\partial}{\partial x} \right]$ .

# Capítulo 4

## Método de Elementos Finitos

Neste capítulo, as equações de governo, que foram apresentadas na seção anterior, serão reescritas utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), a fim de aplicar uma aproximação à formulação variacional do problema.

Inicialmente, o problema será discretizado através da expansão em série de Taylor, utilizando os termos de segunda ordem a fim de reduzir as oscilações espúrias que ocorrem em equações do tipo convecção-difusão, como nos cálculos de vorticidade e concentração. Em sequência, é apresentada a forma forte das equações de governo. Depois, elas serão apresentadas em sua forma fraca para assim realizar a discretização espacial das mesmas a partir da formulação de Galerkin e com elementos de malha do tipo triangular linear. Por fim, as equações de governo são descritas a partir do esquema *Taylor-Galerkin*. Para maiores detalhes sobre este esquema, consultar os trabalhos de DONEA [5], ZIENKIEWICZ e TAYLOR [6] e LEWIS *et al.* [31].

### 4.1 Discretização temporal

A seguir, será apresentado o procedimento de discretização no tempo da equação de vorticidade e da equação de transporte de espécie química. Em ambos os casos, o processo de discretização temporal envolve a expansão da série de Taylor para as variáveis em questão, aproximando o valor da derivada temporal. Utilizou-se a expansão até segunda ordem para reduzir as oscilações espúrias muito comuns nas equações em estudo por ser de um problema físico do tipo convecção-difusão.

A primeira ação a ser feita é a expansão da Eq. :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (4.1)$$

Ou seja,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

Realizando a derivada temporal em ambos os lados da Eq. :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (4.3)$$

Da expansão de Taylor,

$$\omega^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \omega^n}{\partial t^k} \frac{\Delta t^k}{k!} \quad (4.4)$$

logo,

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \frac{\partial \omega^n}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \omega^n}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \frac{\partial^4 \omega^n}{\partial t^4} \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots \quad (4.5)$$

Realizando o truncamento da expansão de Taylor após o elemento de segunda ordem, obtém-se:

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \frac{\partial \omega^n}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + O(\Delta t^3) \quad (4.6)$$

Sendo  $O(\Delta^3)$  o erro originado do truncamento, evidenciando que esta será uma solução aproximada do problema real, pois há um erro inerente ao processo de resolução. Da equação acima,  $\omega^{n+1}$  é a vorticidade a ser calculada e  $\omega^n$  é a calculada no passo anterior de tempo.

Substituindo as Eq. e na Eq. , além de omitir o erro de truncamento, tem-se:

$$\begin{aligned}
\omega^{n+1} &= \omega^n + \Delta t \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right] \quad (4.7)
\end{aligned}$$

No problema em análise,  $u$  e  $v$  são constantes e permitem inverter a ordem de derivação no segundo termo do lado direito da equação acima:

$$\begin{aligned}
\omega^{n+1} &= \omega^n + \Delta t \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[ -u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} \right] \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Substituindo os termos  $\partial \omega / \partial t$  pela equação de vorticidade, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\omega^{n+1} &= \omega^n + \Delta t \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left( -u \frac{\partial}{\partial x} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left( -v \frac{\partial}{\partial y} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right) \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Truncando os termos que apresentam ordem maior que dois,

$$\begin{aligned}
\omega^{n+1} &= \omega^n + \Delta t \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \\
&+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[ -u \frac{\partial}{\partial x} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] - v \frac{\partial}{\partial y} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] \right] \\
&+ O(\Delta t^3) \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Omitindo o termo de erro e reorganizando a equação,

$$\begin{aligned} \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} + u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \\ + \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left[ -u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] + \frac{\Delta t}{2} v \frac{\partial}{\partial y} \left[ u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Os termos multiplicados por  $\Delta t/2$  são conhecidos como difusão artificial ou difusão numérica e são eles os responsáveis por diminuir as oscilações espúrias que surgem em problemas do tipo corrente-vorticidade com  $Re$  moderado ou alto.

Ao discretizar no tempo as equações de governo na forma vetorial, as mesmas terão o seguinte formato:

$$\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \quad (4.12)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (4.13)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (4.14)$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \quad (4.15)$$

Onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade bidimensional,  $\mathbf{D}$  é, como definido anteriormente, o operador matemático com componentes  $\mathbf{D} = \left[ \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right]$  e  $\dot{\omega}$  e  $\dot{c}$  são, respectivamente, definidos conforme abaixo:

$$\dot{\omega} = \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} \quad \dot{c} = \frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} \quad (4.16)$$

## 4.2 Formulação forte e fraca

Para prosseguir na análise do problema baseando-se no Método de Elementos Finitos, é necessário reescrever as equações de governo do problema. A reformulação das equações da forma forte para a fraca permitirá definir como cada variável se comportará dentro das subdivisões do domínio, auxiliando no processo de solução computacional.

### 4.2.1 Formulação forte

A **Formulação Forte** do problema consiste nas equações de governo do mesmo na sua forma diferencial com as condições de contorno. Para o problema em análise, a sua formulação forte é:

$$\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \quad (4.17)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (4.18)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (4.19)$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \quad (4.20)$$

Sendo estas válidas no domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  para as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_\Gamma \text{ em } \Gamma_1 \\ \psi &= \psi_\Gamma \text{ em } \Gamma_2 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\Gamma \text{ em } \Gamma_3 \\ c &= c_\Gamma \text{ em } \Gamma_4 \end{aligned} \quad (4.21)$$

### 4.2.2 Formulação fraca

A **Formulação Fraca**, conforme definida em ANJOS [32], é resultado da ponderação da equação original em sua forma forte e integrada sobre o domínio em que está definida. Em seguida será apresentada a formulação fraca para o problema de escoamento de um fluido monofásico, newtoniano e incompressível utilizando a formulação corrente-vorticidade associada à equação de transporte de espécie química. Para mais detalhes, consultar o trabalho de BRENNER e SCOTT [33]. Dado que a solução do problema a ser obtida é uma aproximação, é razoável assumir que haverá um **Resíduo (R)** nas equações de governo:

$$\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] = R_1 \quad (4.22)$$

$$\nabla^2 \psi + \omega = R_2 \quad (4.23)$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{D}\psi = R_3 \quad (4.24)$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] = R_4 \quad (4.25)$$

Assim como [34], os resíduos serão forçados a serem nulos considerando-os em uma média. Sendo assim:

$$\int_{\Omega} R_1 \cdot \delta d\Omega = 0 \quad (4.26)$$

$$\int_{\Omega} R_2 \cdot \phi d\Omega = 0 \quad (4.27)$$

$$\int_{\Omega} R_3 \cdot \xi d\Omega = 0 \quad (4.28)$$

$$\int_{\Omega} R_4 \cdot \eta d\Omega = 0 \quad (4.29)$$

Sendo  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $\xi$  e  $\eta$  são conhecidas como função peso. A função peso é um conjunto de funções arbitrários dentro de um espaço de funções e que será discutido mais à frente neste trabalho. Deste modo, obtém-se as seguintes integrais:

$$\int_{\Omega} \left\{ \dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \right\} \cdot \delta d\Omega = 0 \quad (4.30)$$

$$\int_{\Omega} \{ \nabla^2 \psi + \omega \} \cdot \phi d\Omega = 0 \quad (4.31)$$

$$\int_{\Omega} \{ \mathbf{v} - \mathbf{D}\psi \} \cdot \xi d\Omega = 0 \quad (4.32)$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \right\} \cdot \eta d\Omega = 0 \quad (4.33)$$

Ao desenvolver as integrais,

$$\int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \omega \delta d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \omega \delta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta d\Omega = 0 \quad (4.34)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega + \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega = 0 \quad (4.35)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega = 0 \quad (4.36)$$

$$\int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta d\Omega = 0 \quad (4.37)$$

Nos termos difusivos presentes nas equações acima (4.34, 4.35 e 4.37), será aplicado o *Teorema de Green*, a fim de diminuir a ordem da derivada e separar o termo avaliado no contorno. Deste modo, o termo difusivo será:

$$-\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \omega \delta d\Omega = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma} \delta \nabla \omega \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (4.38)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \nabla \psi \cdot d\Gamma \quad (4.39)$$

$$-\frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega = \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Gamma} \eta \nabla c \cdot d\Gamma \quad (4.40)$$

Sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal orientado para fora do contorno  $\Gamma$ . Além disso, para o problema em análise, as condições de contorno são do tipo de Dirichlet – também conhecidas como condições essenciais – por todo o contorno  $\Gamma$ . Deste modo, será utilizada a hipótese de que  $\delta = \phi = \eta = 0$  por todo o contorno  $\Gamma$  nas equações acima. Logo, as integrais em  $\Gamma$  serão nulas e os termos difusivos serão:

$$-\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \omega \delta d\Omega = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega \quad (4.41)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega \quad (4.42)$$

$$-\frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega = \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (4.43)$$

O mesmo raciocínio será utilizado sobre os termos de difusividade numérica nas Eqs. (4.34) e (4.37). Os termos serão reescritos como:

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla[\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta d\Omega &= \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega \\
&- \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla[\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta d\Omega &= \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega \\
&- \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Baseando-se na hipótese assumida anteriormente para o termo de condição natural de cada equação, as integrais no contorno de  $\Gamma$  serão anuladas. Logo:

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla[\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega \tag{4.46}$$

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla[\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega \tag{4.47}$$

De posse dos novos termos difusivos, os mesmos serão substituídos nas equações de governo:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \omega \delta d\Omega &+ \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$-\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega = 0 \tag{4.49}$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega = 0 \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega &+ \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Se assumirmos conforme [3]:

$$\begin{aligned}
m_1(\dot{\omega}, \delta) &= \int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\Omega & m_3(\mathbf{v}, \xi) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega \\
g_1(\mathbf{v}, \delta) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \omega \delta d\Omega & g_3(\psi, \xi) &= \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega \\
k_1(\omega, \delta) &= \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega & m_4(\dot{c}, \eta) &= \int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega \\
k_{n1}(\omega, \delta) &= \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega & g_4(\mathbf{v}, \eta) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega \\
k_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega & k_4(c, \eta) &= \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega \\
m_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega & k_{n4}(c, \eta) &= \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega
\end{aligned} \tag{4.52}$$

As equações de governo podem ser reformuladas na sua forma fraca, de modo a ficarem como segue:

$$m_1(\dot{\omega}, \delta) + g_1(\mathbf{v}, \delta) + \frac{1}{Re} k_1(\omega, \delta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n1}(\omega, \delta) = 0 \tag{4.53}$$

$$-k_2(\psi, \phi) + m_2(\psi, \phi) = 0 \tag{4.54}$$

$$m_3(\mathbf{v}, \xi) - g_3(\psi, \xi) = 0 \tag{4.55}$$

$$m_4(\dot{c}, \eta) + g_4(\mathbf{v}, \eta) + \frac{1}{ReSc} k_4(c, \eta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n4}(c, \eta) = 0 \tag{4.56}$$

Dados os conjuntos de funções base:

$$\begin{aligned}
\mathbb{W} &= \left[ \omega \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \omega^2 d\Omega < \infty; \omega = \omega_{\Gamma} \right] \\
\mathbb{P} &= \left[ \psi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega < \infty; \psi = \psi_{\Gamma} \right] \\
\mathbb{V} &= \left[ v \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty; v = v_{\Gamma} \right] \\
\mathbb{C} &= \left[ c \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} c^2 d\Omega < \infty; c = c_{\Gamma} \right]
\end{aligned} \tag{4.57}$$

e dados os espaços de funções peso:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} &= \left[ \delta \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \delta^2 d\Omega < \infty; \delta_{\Gamma} = 0 \right] \\
\mathbb{F} &= \left[ \phi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \phi^2 d\Omega < \infty; \phi_{\Gamma} = 0 \right] \\
\mathbb{X} &= \left[ \xi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \xi^2 d\Omega < \infty; \xi_{\Gamma} = 0 \right] \\
\mathbb{N} &= \left[ \eta \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \eta^2 d\Omega < \infty; \eta_{\Gamma} = 0 \right]
\end{aligned} \tag{4.58}$$

A formulação fraca consiste em encontrar as soluções de  $\omega \in \mathbb{W}$ ,  $\psi \in \mathbb{P}$ ,  $v \in \mathbb{V}$  e  $c \in \mathbb{C}$ , tal que:

$$m_1(\dot{\omega}, \delta) + g_1(\mathbf{v}, \delta) + \frac{1}{Re} k_1(\omega, \delta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n1}(\omega, \delta) = 0 \tag{4.59}$$

$$-k_2(\psi, \phi) + m_2(\psi, \phi) = 0 \tag{4.60}$$

$$m_3(\mathbf{v}, \xi) - g_3(\psi, \xi) = 0 \tag{4.61}$$

$$m_4(\dot{c}, \eta) + g_4(\mathbf{v}, \eta) + \frac{1}{ReSc} k_4(c, \eta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n4}(c, \eta) = 0 \tag{4.62}$$

Sejam satisfeitas para todo  $\delta \in \mathbb{D}$ ,  $\phi \in \mathbb{F}$ ,  $\xi \in \mathbb{X}$  e  $\eta \in \mathbb{N}$ .

### 4.3 Discretização espacial

A discretização espacial a ser utilizada neste trabalho é baseada na formulação de *Galerkin*. Neste caso, são utilizadas como função de forma serão as mesmas das empregadas como funções peso  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $\xi$  e  $\eta$  – que são um conjunto de funções arbitrárias, com infinitas possibilidades – e como função interpoladora da variável em questão ( $\omega, \psi, \mathbf{v}$  e  $c$ ). Desta forma, as Eqs. de (4.48) até (4.51) podem ser apresentadas na forma expandida como:

$$\int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right] d\Omega \quad (4.63)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial \delta}{\partial x} \left[ u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial \delta}{\partial y} \left[ u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] d\Omega = 0$$

$$- \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega = 0 \quad (4.64)$$

$$\int_{\Omega} u \xi d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \xi d\Omega = 0 \quad (4.65)$$

$$\int_{\Omega} v \xi d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi d\Omega = 0 \quad (4.66)$$

$$\int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial c}{\partial x} \eta d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial c}{\partial y} \eta d\Omega + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] d\Omega \quad (4.67)$$

$$+ \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[ u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right] d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[ u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right] d\Omega = 0$$

O próximo passo é discretizar o domínio de acordo com o número total de elementos ( $ne$ ) e o número total de nós ( $np$ ) da malha computacional a ser utilizada. Desta forma, têm-se:

$$\omega(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} \omega_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (4.68)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} \psi_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (4.69)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} v_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (4.70)$$

$$c(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} c_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (4.71)$$

Onde  $\omega_i$ ,  $\psi_i$ ,  $u_i$ ,  $v_i$  e  $c_i$  são vetores com  $np$  elementos e são as incógnitas a serem obtidas que são dependentes apenas do tempo.  $N_i$  são as funções de forma e também possuem  $np$  elementos. Estas funções podem ser escolhidas de modo arbitrário e apresentam a única de restrição de terem que respeitar as condições de contorno. O método de Galerkin permite que utilizar o mesmo tipo de elemento para todas as equações de governo, de modo que as funções base serão as mesmas para todas as

equações.

Na formulação empregada, as funções base são iguais as funções peso, ou seja:

$$\delta(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \delta_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (4.72)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \phi_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (4.73)$$

$$\xi(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \xi_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (4.74)$$

$$\eta(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \eta_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (4.75)$$

Deste modo, as equações de governo na forma variacional discretizada espacialmente serão:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i N_i \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega + u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega \\ & \quad + v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega \\ & + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} \left[ u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega \quad (4.76) \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \left[ u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\ & \quad + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \omega_i N_i \sum_{j=1}^{np} \phi_j N_j d\Omega = 0 \quad (4.77) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} u_i N_i \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega = 0 \quad (4.78)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} v_i N_i \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega = 0 \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i N_i \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega + u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega \\ & + v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega \\ & + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial x} \left[ u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial y} \left[ u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.80)$$

As componentes da velocidade –  $u$  e  $v$  – foram retiradas de dentro das integrais no termo convectivo das Eqs. (4.82) e (4.86) pois as mesmas não são tratadas como incógnita na abordagem proposta. Ou seja, para a equação de vorticidade serão utilizados valores das componentes  $u$  e  $v$  determinadas no passo de tempo anterior, enquanto que para a equação de transporte de espécie química as componentes serão calculadas previamente ao cálculo da equação. Desta forma, as equações estarão linearizadas.

Levando os somatórios para fora das integrais:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{np} \delta_j \left[ \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} \omega_i \left[ u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \phi_j \left[ \sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[ - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right] \right] = 0 \quad (4.82)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \xi_j \left[ \sum_{i=1}^{np} u_i \left[ \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] \right] = 0 \quad (4.83)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \xi_j \left[ \sum_{i=1}^{np} v_i \left[ \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] \right] = 0 \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \eta_j \left[ \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} c_i \left[ u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

Sabendo que  $\sum_{j=1}^{np} \delta_j \neq 0$ ,  $\sum_{j=1}^{np} \phi_j \neq 0$ ,  $\sum_{j=1}^{np} \xi_j \neq 0$  e  $\sum_{j=1}^{np} \eta_j \neq 0$ , logo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \omega_i \left\{ u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ \left. + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[ - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right] = 0 \quad (4.87)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} u_i \left[ \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (4.88)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} v_i \left[ \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} c_i \left\{ u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\
& + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \omega_i \left\{ u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\
& + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \left[ u \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \left[ u \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[ - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \right] = 0 \tag{4.92}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} u_i \left[ \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] = 0 \tag{4.93}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} v_i \left[ \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] = 0 \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} c_i \left\{ u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\
& + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \left[ u \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \left[ u \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.95}$$

## 4.4 Forma matricial

A forma matricial que representará matematicamente o problema está intimamente ligada ao tipo do elemento de malha selecionado para discretizar o domínio. De forma geral, quanto mais elementos de malha utilizados em um mesmo domínio, além da consequente redução geométrica das subdivisões do mesmo, mais precisa é a solução obtida. No entanto, não é apenas o nível de refino da malha que irá garantir um resultado mais próximo do real: é preciso levar em conta a geometria dos elementos de malha e a ordem do polinômio interpolador.

Em ANJOS [32], o autor apresenta uma classificação dos elementos de malha de acordo com a geometria dos mesmos e a ordem do polinômio interpolador:

- Geometria
  - Problemas unidimensionais: reta
  - Problemas bidimensionais: triangulares e retangulares
  - Problemas tridimensionais: tetraédricas, hexaédricas e prismáticas
- Ordem do polinômio interpolador
  - Grau um: linear
  - Grau dois: quadrática
  - Grau três: cúbica

Tanto a escolha da ordem do polinômio interpolador quanto a da geometria do elemento de malha devem levar em consideração as restrições impostas pelas equações do problema e pela geometria do seu domínio. Por exemplo, a equação de *Navier-Stokes* – em razão do forte acoplamento entre a velocidade e a pressão – apresenta a restrição conhecida como BREZZI [35] e BABUŠKA [36] que leva ao uso de funções interpoladores com graus tais que o número de nós sejam diferentes entre as variáveis de velocidade e pressão, ou seja, com grau 2 ou 3.

No entanto, este trabalho utilizou a formulação corrente-vorticidade para a equação de *Navier-Stokes*, desacoplando a velocidade e a pressão. Sendo assim, é possível utilizar um elemento com função interpoladora de grau um, o que também trará uma redução no custo computacional durante os cálculos.

Para a geometria, optou-se pela triangular. A mesma possui um vasto campo de aplicações em MEF e também possui uma grande capacidade para discretizar domínios com geometrias mais complexas, quando comparada com a retangular.

Abaixo é apresentado um elemento de malha triangular linear, caracterizado por ter funções de interpolação planas. As suas matrizes elementares analíticas são facilmente encontradas, dado que o elemento é muito simples e muito empregado.

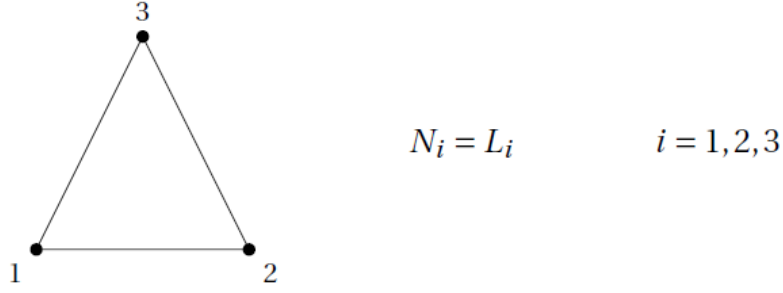


Figura 4.1: Elemento de malha triangular.

Fonte: MARQUES, 2018.

Tendo a malha sido definida, as Eqs. de (4.92) até (4.96) podem ser escritas na sua forma matricial:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\omega} + u \cdot \mathbf{G}_x \omega + v \cdot \mathbf{G}_y \omega + \frac{1}{Re} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \omega & \quad (4.96) \\ + \frac{\Delta t}{2} u [u \mathbf{K}_{xx} + v \mathbf{K}_{yx}] \omega + \frac{\Delta t}{2} v [u \mathbf{K}_{xy} + v \mathbf{K}_{yy}] \omega & = 0 \end{aligned}$$

$$- [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \psi + \mathbf{M}\omega = 0 \quad (4.97)$$

$$\mathbf{M}u - \mathbf{G}_y \psi = 0 \quad (4.98)$$

$$\mathbf{M}v + \mathbf{G}_x \psi = 0 \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{c} + u \cdot \mathbf{G}_x c + v \cdot \mathbf{G}_y c + \frac{1}{ReSc} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] c & \quad (4.100) \\ + \frac{\Delta t}{2} u [u \mathbf{K}_{xx} + v \mathbf{K}_{yx}] c + \frac{\Delta t}{2} v [u \mathbf{K}_{xy} + v \mathbf{K}_{yy}] c & = 0 \end{aligned}$$

Deve se destacar que as matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{G}_x$ ,  $\mathbf{G}_y$ ,  $\mathbf{K}_{xx}$ ,  $\mathbf{K}_{yy}$ ,  $\mathbf{K}_{xy}$  e  $\mathbf{K}_{yx}$  são matrizes de dimensão  $np \times np$ , sendo definidas como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}m^e \quad (4.101)$$

$$\mathbf{G}_x = \mathbf{A}g_x^e \quad (4.102)$$

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{A}g_y^e \quad (4.103)$$

$$\mathbf{K}_{xx} = \mathbf{A}k_{xx}^e \quad (4.104)$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{A}k_{yy}^e \quad (4.105)$$

$$\mathbf{K}_{xy} = \mathbf{A}k_{xy}^e \quad (4.106)$$

$$\mathbf{K}_{yx} = \mathbf{A}k_{yx}^e \quad (4.107)$$

Sendo  $\mathbf{A}$  um operador de montagem das matrizes globais a partir das elementares. A indicação de sobrescrito  $e$  faz referência às matrizes elementares, sendo estas quadradas e com dimensão igual a três devido à malha selecionada. Os componentes elementares são definidos por:

$$m^e = \int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega \quad (4.108)$$

$$g_x^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e d\Omega \quad (4.109)$$

$$g_y^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e d\Omega \quad (4.110)$$

$$k_{xx}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega \quad (4.111)$$

$$k_{yy}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega \quad (4.112)$$

$$k_{xy}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega \quad (4.113)$$

$$k_{yx}^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega \quad (4.114)$$

Deste modo, pode-se apresentar a forma final das equações de governo – a serem resolvidas pelo código implementado – na sua forma adimensional e discretizadas segundo o MEF com termo de convecção implícito:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega^{n+1} + \frac{1}{Re} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \omega^{n+1} + u \cdot \mathbf{G}_x \omega^n + v \cdot \mathbf{G}_y \omega^n & \quad (4.115) \\ + \frac{\Delta t}{2} u [u \mathbf{K}_{xx} + v \mathbf{K}_{yx}] \omega^n + \frac{\Delta t}{2} v [u \mathbf{K}_{xy} + v \mathbf{K}_{yy}] \omega^n = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega^n \end{aligned}$$

$$[\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \psi = \mathbf{M} \omega \quad (4.116)$$

$$\mathbf{M} u = \mathbf{G}_y \psi \quad (4.117)$$

$$\mathbf{M} v = -\mathbf{G}_x \psi \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} c^{n+1} + \frac{1}{ReSc} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] c^{n+1} + u \cdot \mathbf{G}_x c^n + v \cdot \mathbf{G}_y c^n & \quad (4.119) \\ + \frac{\Delta t}{2} u [u \mathbf{K}_{xx} + v \mathbf{K}_{yx}] c^n + \frac{\Delta t}{2} v [u \mathbf{K}_{xy} + v \mathbf{K}_{yy}] c^n = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} c^n \end{aligned}$$

# Capítulo 5

## Código numérico

Neste capítulo, é apresentada a estruturação do código utilizado para resolução do problema proposto, contemplando toda a lógica aplicada. O código foi desenvolvido na linguagem Python 2.7, em razão do seu uso bastante difundido no meio acadêmico.

A estruturação do código ocorre em cinco etapas principais. Na primeira, faz-se a importação do arquivo de malha e obtém-se as informações relevantes desta etapa. Em seguida, cria-se as matrizes globais a partir das matrizes elementares locais. Na terceira etapa, as condições de contorno são inseridas, para assim ser realizada a resolução do problema e posterior exportação dos resultados na extensão *.vtk*. A exportação nesse formato permite um pós-processamento mais adequado das informações obtidas, melhorando a resposta gráfica do problema.

A figura 5.1 representa o fluxograma com a lógica do código.

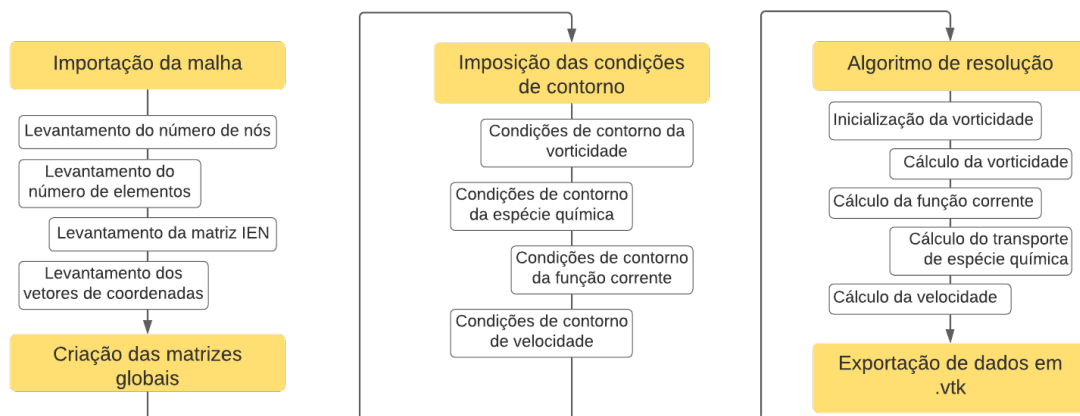


Figura 5.1: Fluxograma de funcionamento do código.

## 5.1 Importação da malha

A malha é o conjunto de subdivisões espaciais de um determinado do domínio, de modo a discretizá-lo através de pequenos elementos, cada qual com um número específico de nós. Conforme definido anteriormente, neste trabalho os elementos são do tipo triangular linear, fazendo com que cada elemento possua três nós associados a ele. O MEF é baseado em funções interpoladoras que conectam os nós e, conseqüentemente, os elementos.

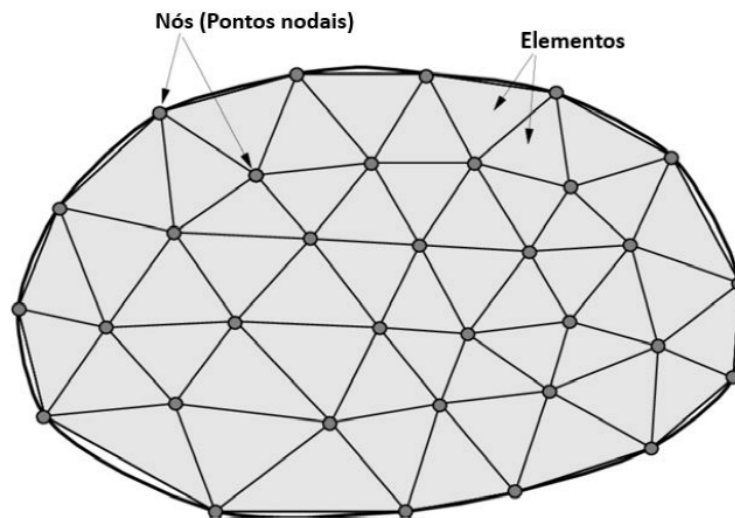


Figura 5.2: Esquemático de uma malha genérica.

O domínio é constituído por uma malha não estruturada gerada pelo software livre *GMSH*. O arquivo *.msh* resultante é importado para a simulação com o auxílio da biblioteca *meshio* do *Python*, de modo a transformar os dados existentes em listas. Todas as malhas foram geradas através do *GMSH 4.7.0*.

---

```
import meshio                                     #importar biblioteca meshio

msh = meshio.read(filename.msh)                  #leitura do arquivo .msh
X = msh.points[:,0]                               #lista com os valores de X
Y = msh.points[:,1]                               #lista com os valores de Y
IEN = msh.cells['triangle']                       #matriz IEN
IENbound = msh.cells['line']                     #matriz para o contorno
cc = np.unique(IENbound.reshape(IENbound.size))  # lista nos
                                                    # do contorno
```

---

O trecho do código descrito anteriormente traz as informações imprescindíveis

à simulação, tais como a identificação dos nós em geral e dos nós de contorno, o número de elementos, os vetores de coordenadas X e Y, a matriz IEN – ou matriz de conectividade – e a matriz com os elementos de contorno.

## 5.2 Criação das matrizes globais

As equações (4.116) a (4.120) representam as equações de governo na sua forma matricial. Desta forma, a seguinte estrutura foi inserida, a fim de realizar a montagem das matrizes globais a partir das elementares:

---

```

for e in range(0,ne):           #loop nos elementos da malha

    for i in range(0,3):         #
        iglobal = IEN[e,i]       #montagem das matrizes
                                   #globais relacionando os
    for j in range(0,3):         #índices globais e locais
        jglobal = IEN[e,j]      #

        K[iglobal ,jglobal]      += kxele[i ,j] + kyele[i ,j]
        Kest[iglobal ,jglobal]   += kest_ele[i ,j]
        M[iglobal ,jglobal]      += mele[i ,j]
        Gx[iglobal ,jglobal]     += gxele[i ,j]
        Gy[iglobal ,jglobal]     += gyele[i ,j]

```

---

Relembrando que as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}_{est}$  são, respectivamente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{K}_{est} = \mathbf{K}_{estx} + \mathbf{K}_{esty} \quad (5.2)$$

Com exceção da matriz  $\mathbf{K}_{est}$ , todas as demais são geradas apenas uma vez, ao inicializar o código. A matriz de estabilidade  $\mathbf{K}_{est}$ , definida através do Método de Taylor-Galerkin, depende das componentes horizontal e vertical da velocidade, conforme abaixo, e por não pode ser inicializada apenas uma vez.

$$\mathbf{K}_{estx} = \frac{\Delta t}{2} u [u\mathbf{K}_{xx} + v\mathbf{K}_{yx}] \quad (5.3)$$

$$\mathbf{K}_{esty} = \frac{\Delta t}{2} v [u\mathbf{K}_{xy} + v\mathbf{K}_{yy}] \quad (5.4)$$

Dessa forma, é necessário recriá-la a cada passo de tempo, dentro do algoritmo de solução. Sendo assim, a estrutura para criação da mesma é a que segue:

---

```

for n in range(0, niter):           #loop para cada iteracao

    for e in range(0, ne):           #loop nos elementos da malha

        for i in range(0, 3):         #
            iglobal = IEN[e, i]       #montagem das matrizes
                                       #globais relacionando os
        for j in range(0, 3):         #índices globais e locais
            jglobal = IEN[e, j]      #

            Kest[iglobal, jglobal] += kest_ele[i, j]

```

---

Para montagem das matrizes elementares de cada global, considerando elementos triangulares lineares de malha, foi utilizado as definições apresentadas em LEWIS *et al.* [31].

### 5.3 Imposição das condições de contorno

Estando as matrizes globais determinadas, é necessário inserir as condições de contorno ao problema. Conforme apresentado anteriormente, durante a importação da malha é identificado quais pontos e elementos irão compor o contorno do domínio estudado. Os nós que possuem seus valores pré-estabelecidos representam a *Condição de Dirichlet*. Como eles devem se manter constantes durante toda a análise do problema, a linha da matriz global identificada a partir do índice do nó em condição de Dirichlet é zerada, substituindo em seguida o elemento na diagonal pelo valor unitário 1. No vetor ao lado direito da equação, o elemento também referenciado pelo índice do ponto em condição de Dirichlet é substituído pelo valor pré-estabelecido.

A fim de exemplificação, considera-se uma matriz quadrada de dimensão

$(np \times np)$  e o nó 1 está localizado no contorno do domínio, sendo do tipo de Dirichlet. O processo descrito no parágrafo anterior pode ser entendido conforme abaixo:

1. Localizar o nó de condição de contorno na matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Figura 5.3: Identificação do ponto com condição de contorno de Dirichlet.

2. Zerar a linha referente ao índice 1 na matriz global e adicionar o valor unitário na diagonal:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Figura 5.4: Tratando a linha com condição de contorno de Dirichlet.

3. Substituir no vetor do lado direito o valor da incógnita na entrada pelo valor da condição de Dirichlet ( $cc_1$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cc_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Figura 5.5: Substituindo o valor no vetor solução.

4. Identificar o próximo nó de contorno e executar o passo-a-passo novamente.

Para exemplificar a implementação da metodologia, segue o trecho do código onde são inseridas as condições de contorno de Dirichlet para o cálculo da função corrente:

---

```
for i in cc:                                #loop pelos nos de contorno
    if ccName[i] in ['upwall', 'upstrut']: #verificacao do no
        Ap[i, :] = 0.0                      #passo 2
        Ap[i, i] = 1.0                      #passo 2
        bpsi[i] = cc1                       #passo 3

    if ccName[i] in ['downwall', 'downstrut']: #verificacao
                                                #do no
        Ap[i, :] = 0.0                      #passo 2
        Ap[i, i] = 1.0                      #passo 2
        bpsi[i] = cc0                       #passo 3

    if ccName[i] == 'inlet':                 #verificacao do no
        Ap[i, :] = 0.0                      #passo 2
        Ap[i, i] = 1.0                      #passo 2
        bpsi[i] = Y[i]                     #passo 3

# solucao do sistema linear Ap * psi = bpsi + cc
psi = np.linalg.solve(Ap, bpsi)
```

---

O software *GMSH* permite que seja definida uma lista com a identificação dos elementos que constituem o contorno do domínio, sendo esta equivalente à lista com a matriz de conectividade dos elementos lineares que constituem o contorno. Este fato permite percorrer a lista *cc*, a qual possui todos nós localizados nos contornos, e verificar em *ccName* qual a identificação atribuída a cada elemento. Desta forma, pode-se inserir condições de contorno diversas, realizando a validação individual dos pontos e atribuir os valores correspondentes.

Além das *Condições de Dirichlet*, este trabalho também possui *Condições de Neumann Homogêneo*. No entanto, esta condição não aplica nenhuma alteração no sistema linear, como pode ser percebido no exemplo a seguir para o termo de na equação de contorno (4.40):

$$\frac{1}{ReSc} \int_{\Gamma} \eta \nabla c \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \longrightarrow \nabla c = 0 \quad (5.5)$$

Onde  $\nabla c = 0$  indica que o fluxo através da região determinada será nulo. Sendo assim, considerando a condição de Neumann Homogêneo para um problema linear geral  $Ac = b + cc$ , tem-se que  $cc = 0$  e o sistema linear se manterá como  $Ac = b$ .

Para demonstrar a implementação das *Condições de Neumann*, pode-se consultar o trabalho de MARQUES [3].

## 5.4 Algoritmo de solução

A etapa de resolução das equações de governo e da obtenção dos valores das variáveis, é demonstrada através do fluxograma da figura . Na representação, há uma etapa em que é realizada fora do *loop* temporal, enquanto as demais são recalculadas a cada passo de tempo. Em seguida, cada passo do algoritmo será detalhado.

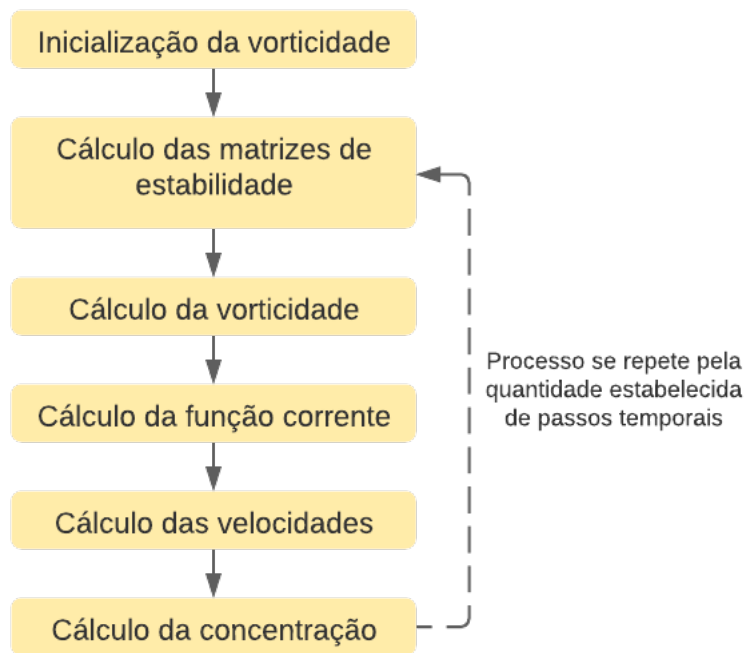


Figura 5.6: Fluxograma do algoritmo de solução.

### 5.4.1 Inicialização da vorticidade

O primeiro passo consiste no cálculo da vorticidade do problema no instante de tempo  $t = 0$  s, ou seja, antes de iniciar o *loop* com as soluções. Sendo assim, inicialmente são montadas duas listas zeradas para  $u$  e  $v$ , com a posterior aplicação das condições de contorno pertinentes. Em seguida, estas listas são utilizadas na equação já descrita anteriormente:

$$M\omega = G_x v - G_y u \quad (5.6)$$

Resolvendo o sistema linear associado à equação, obtém-se o valor inicial para  $\omega$ . Inicialmente, a velocidade é nula por todo o domínio, apenas havendo distinção nos pontos do contorno e isto acarretará na obtenção da vorticidade nestes mesmos nós. Este vetor resultante será empregado na resolução da vorticidade no terceiro passo.

### 5.4.2 Cálculo das matrizes de estabilidade

Esta etapa já foi explicada mais detalhadamente na seção 5.2. Cabe rerepresentar os cálculos necessários neste passo, dado a sua importância para as próximas etapas:

$$\mathbf{K}_{estx} = \frac{\Delta t}{2} u [u\mathbf{K}_{xx} + v\mathbf{K}_{yx}] \quad (5.7)$$

$$\mathbf{K}_{esty} = \frac{\Delta t}{2} v [u\mathbf{K}_{xy} + v\mathbf{K}_{yy}] \quad (5.8)$$

$$\mathbf{K}_{est} = \mathbf{K}_{estx} + \mathbf{K}_{esty} \quad (5.9)$$

### 5.4.3 Cálculo da vorticidade

No terceiro passo do algoritmo, realiza-se o cálculo da equação da função corrente-vorticidade adimensionalizada, onde  $\omega^{n+1}$  representa a vorticidade a ser calculada e  $\omega^n$  é a vorticidade calculada no passo de tempo anterior. Sendo assim, a seguinte relação – já apresentada – é calculada:

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega^{n+1} + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \omega^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega^n - v \cdot \mathbf{G}_y \omega^n - u \cdot \mathbf{G}_x \omega^n - \mathbf{K}_{est} \omega^n \quad (5.10)$$

Para garantir a correta resolução, é necessário aplicar as respectivas condições de contorno em ambos os lados da equação (5.10), de acordo com a metodologia apresentada na seção 5.3.

#### 5.4.4 Cálculo da função corrente

De posse dos valores de  $\omega$ , a próxima etapa consiste em calcular a função corrente  $\psi$ , através da equação já apresentada anteriormente:

$$\mathbf{K}\psi = \mathbf{M}\omega \quad (5.11)$$

Para assegurar a correta resolução, é necessário aplicar as respectivas condições de contorno na matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e no vetor de  $\mathbf{M}\omega$ , de acordo com a metodologia apresentada na seção 5.3.

#### 5.4.5 Cálculo das velocidades

A partir dos valores da função corrente  $\psi$ , faz-se a resolução da seguinte relação apresentada anteriormente:

$$\mathbf{M}u = \mathbf{G}_y\psi \quad (5.12)$$

$$\mathbf{M}v = -\mathbf{G}_x\psi \quad (5.13)$$

Após o cálculo, é necessário inserir as condições de contorno de  $u$  e  $v$  para assim obter a solução correta do sistema.

#### 5.4.6 Cálculo da concentração

Assim como no cálculo da vorticidade, para obter os valores da concentração, faz-se o cálculo da equação da função de transporte da espécie química adimensionalizada, onde  $c^{n+1}$  é a concentração a ser calculada e  $c^n$  representa a concentração calcula no passo de tempo anterior. Desta forma, a seguinte relação – anteriormente apresentada – é calculada:

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t}c^{n+1} + \frac{1}{ReSc}\mathbf{K}c^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t}c^n - u \cdot \mathbf{G}_xc^n - v \cdot \mathbf{G}_yc^n - \mathbf{K}_{est}c^n \quad (5.14)$$

Para assegurar a correta resolução do sistema, é necessário incluir as condições de contorno em ambos os lados da equação (5.14).

### 5.4.7 Retornar ao passo 2

Por fim, esta etapa irá assegurar que a simulação retorne à etapa 2 do algoritmo e seja recalculada para cada passo de tempo ainda a ocorrer.

### 5.4.8 Resolução dos sistemas lineares

Para explicar o processo de resolução dos sistemas lineares utilizado no algoritmo de solução, todos os sistemas serão apresentados a partir de um sistema genérico descrito como  $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ . A seguir, a função corrente será utilizada como exemplo de cálculo deste sistema:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\psi &= \mathbf{M}\omega \\ \mathbf{A} &= \mathbf{K} \text{ e } \mathbf{b} = \mathbf{M}\omega \\ \text{Logo, } \mathbf{A}\psi &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

---

```
for n in range(0, niter):  
  
    Ap = K.copy()                #definicao de A como  
                                #copia de K  
    bpsi = np.dot( M, wz )       #definicao do vetor b  
    psi = np.linalg.solve(Ap, bpsi) #calculo do vetor de psi
```

---

No trecho apresentado acima, são representadas 3 etapas do processo de resolução. No primeiro passo, a matriz  $\mathbf{A}$  (no trecho como **Ap**) é definida, a qual está sempre multiplicando o vetor de interesse. Na segunda etapa, é definido o vetor  $\mathbf{b}$  (no trecho como **bpsi**), o qual representa todo o lado direito do sistema linear. Por fim, a última etapa prevê o cálculo do vetor solução do sistema, o qual é realizado através da biblioteca *numpy*, identificada como *np* no código. Essa mesma metodologia foi empregada para todos os sistemas lineares existentes no código, bem como a inserção de todas as condições de contorno pertinentes, embora não tenham sido representadas no trecho acima.

# Capítulo 6

## Validação do código numérico

Estando o código numérico implementado em *Python*, é necessário avaliar se o mesmo se comportará adequadamente em problemas de referência, a fim de corroborar os resultados obtidos para o problema a ser analisado neste trabalho. Foram quatro cenários que foram avaliados:

- escoamento de *Hagen-Poiseuille*;
- *Lid-Driven Cavity Flow*;
- escoamento em degrau;
- dispersão de droga em artéria coronária com geometria aproximada.

### 6.1 Escoamento de *Hagen-Poiseuille*

O *Escoamento de Hagen-Poiseuille* é um dos poucos casos em que a equação de Navier-Stokes possui solução analítica. Neste problema, analisa-se um escoamento monofásico, permanente e completamente desenvolvido de um fluido newtoniano, viscoso e incompressível é impelido entre duas placas paralelas e fixas, pela ação de um gradiente de pressão  $\partial p/\partial x$  constante.

A solução analítica utilizada é a apresentada por SANTOS [37]. Para uma dada altura  $y$  do fluido a partir da placa inferior, a velocidade é calculada como:

$$u(y) = \frac{6}{L^2}y(L - y) \quad (6.1)$$

No primeiro teste realizado, a equação de corrente-vorticidade foi simulada em um canal reto de altura unitária ( $h = 1$ ) e comprimento igual à seis unidades ( $L =$

$6h$ ), tendo os resultados sido obtidos no meio do canal ( $x = 3h$ ), região na qual o escoamento já se encontra hidrodinamicamente desenvolvido. A geometria do canal foi definida desta forma devido aos cálculos serem feitos na forma adimensional das equações de governo.

### 6.1.1 Malha selecionada

A malha foi gerada com elementos triangulares, apresentando a seguinte especificação:

- Número de elementos = 6080
- Número de nós = 3181

### 6.1.2 Condições de contorno

- Condição de entrada: definida em  $x = 0.0$ , o valor de  $\psi$  varia de 0 a 1 de forma linear com  $y$  ( $\psi = y$ ). Da velocidade, a componente horizontal é unitária ( $u = 1$ ), enquanto que a componente vertical é nula ( $v = 0.0$ ). Todas são do tipo de Dirichlet;
- Condição de saída: definida em  $x = L$ , a derivada de ambos os componentes da velocidade são nulos  $\partial u / \partial n = \partial v / \partial n = 0.0$ .
- Condição de não-escorregamento nas paredes: definidas em  $y = 0$  e  $y = 1$ , as componentes de velocidade serão nulas ( $u = v = 0$ ). Para  $\psi$ , será  $\psi = 0$  na parede inferior e será  $\psi = 1$  na parede superior.

### 6.1.3 Resultados obtidos

Na figura 6.1 os valores numéricos da velocidade horizontal obtidos foram comparados com a solução analítica de referência. Em seguida, são apresentados os valores obtidos para  $\psi$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $\omega_z$  ao longo de todo o canal. A simulação foi realizada com  $Re = 100$ , com o intervalo de tempo de  $\Delta t = 0,01$  e em 700 iterações, com os resultados visualizados partir do software *ParaView*.

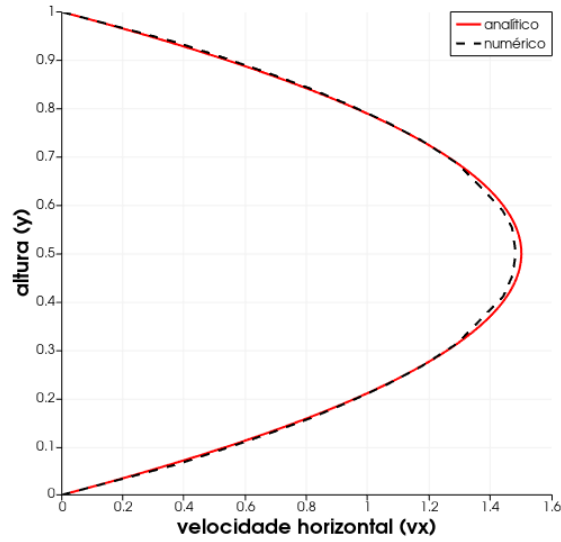
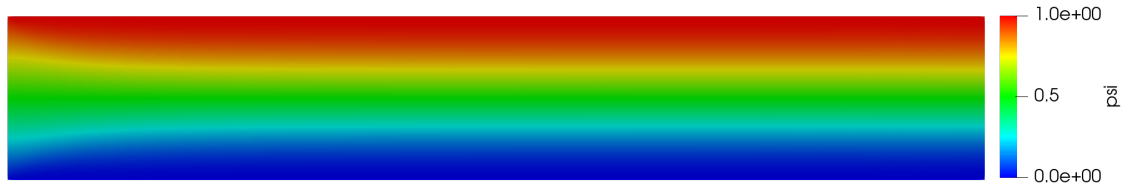


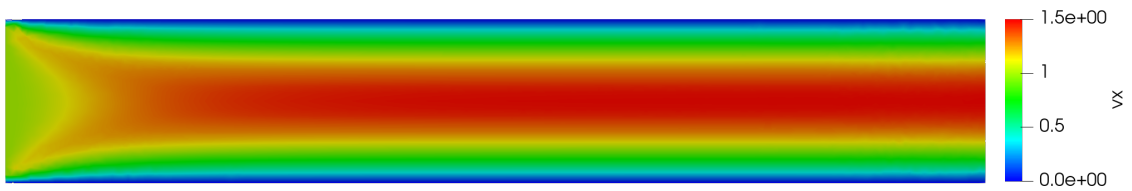
Figura 6.1: Gráfico comparativo para a velocidade horizontal em razão da altura do canal para  $Re = 100$  em  $x = 3 R$  e  $t = 7 s$ .



(a) Função corrente ( $\psi$ )



(b) Vorticidade ( $\omega_z$ )



(c) Velocidade horizontal ( $v_x$ )



(d) Velocidade vertical ( $v_y$ )

Figura 6.2: Resultados para canal em  $t = 7 s$ .

## 6.2 Lid-Driven Cavity Flow

O *Lid-Driven Cavity Flow* é definido como um escoamento dentro de uma cavidade quadrada com paredes laterais e inferior fixas e uma tampa superior deslizante de velocidade constante. O escoamento é representado esquematicamente na imagem abaixo.

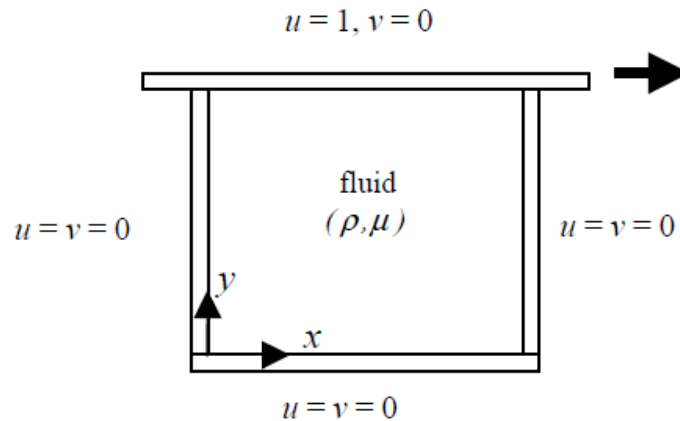


Figura 6.3: Representação *Lid-Driven Cavity Flow*.

Fonte: MARCHI *et al.*, 2009.

A referência utilizada para validar os resultados obtidos é o trabalho desenvolvido por MARCHI *et al.* [7]. Na publicação, os autores realizaram um vasto estudo sobre o problema e trouxeram resultados para  $Re = 0, 01, 10, 100, 400$  e  $1000$ . Uma vez que a análise do problema deste trabalho será para  $Re = 109$ , a equação corrente-vorticidade foi simulada para  $Re = 100$ .

### 6.2.1 Malha selecionada

A malha foi gerada com elementos triangulares, apresentando a seguinte especificação:

- Número de elementos = 1636
- Número de nós = 872

### 6.2.2 Condições de contorno

- Condição de entrada: definida na parede superior móvel –  $y = L$ , sendo  $L = 1$  – que possuirá as componentes de velocidade definidas como  $u = 1$  e  $v = 0$ . A função corrente nesta condição é definida como  $\psi = 0$ .

- Condição de não escorregamento nas paredes: definida nas paredes laterais e inferior –  $y = 0, x = 0$  e  $x = L$  – de modo que  $u$  e  $v$  são nulos, além da função corrente também ser definida como  $\psi = 0$  em todas as paredes.

### 6.2.3 Resultados obtidos

A seguir, há um comparativo entre os resultados obtidos no trabalho de MARCHI *et al.* [7] e os gerados através da simulação desempenhada neste trabalho, para um  $Re = 100$ . O intervalo de tempo selecionado para obtenção dos resultados foi  $\Delta t = 0,01$  e foram realizadas 700 iterações, com os resultados visualizados partir do software *ParaView*.

A figura 6.4 traz o comparativo dos valores de  $v_x$  observados em  $x = 0,5$  ao longo de toda a altura da cavidade, enquanto que a figura 6.5 faz o comparativo dos valores de  $v_y$  em  $y = 0,5$ . Em seguida, são apresentados os valores para  $\psi$ ,  $\omega_z$ ,  $v_x$  e  $v_y$  em regime permanente, para  $t = 7s$ .

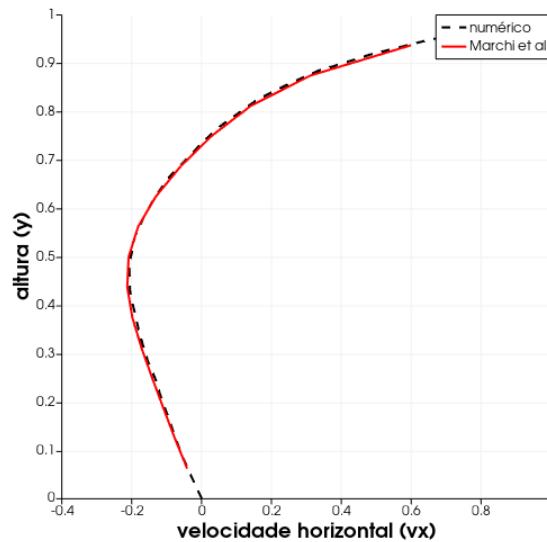


Figura 6.4: Gráfico comparativo para a velocidade horizontal em razão da altura da cavidade para  $Re = 100$  em  $x = 0,5$  e  $t = 7 s$ .

## 6.3 Escoamento em degrau

O *Escoamento em degrau* também é um problema físico muito conhecido e com vasta coletânea de trabalhos sobre o tema. Dada a sua geometria descontínua, é possível verificar as recirculações existentes em razão da variação de seção, fornecendo um indício dos efeitos da variação geométrica do canal sobre o fluxo.

Dentre as referências, foi selecionado o trabalho de THOMAS *et al.* [8]. Dentre os estudos realizados, ele traz a validação do escoamento para  $Re = 73$ , valor

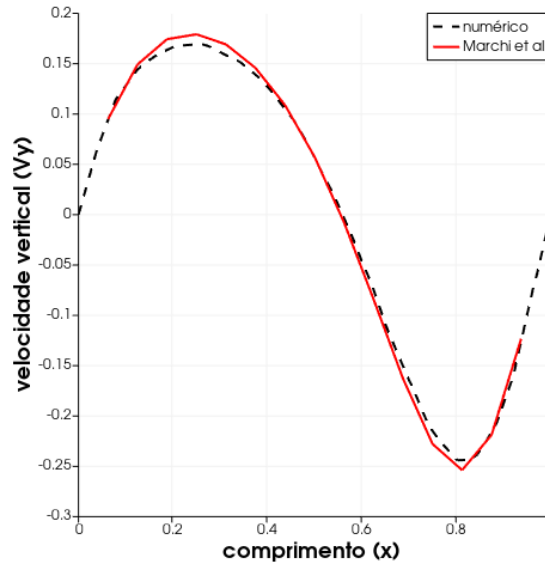


Figura 6.5: Gráfico comparativo para a velocidade vertical em razão do comprimento da cavidade para  $Re = 100$  em  $y = 0,5$  e  $t = 7 s$ .

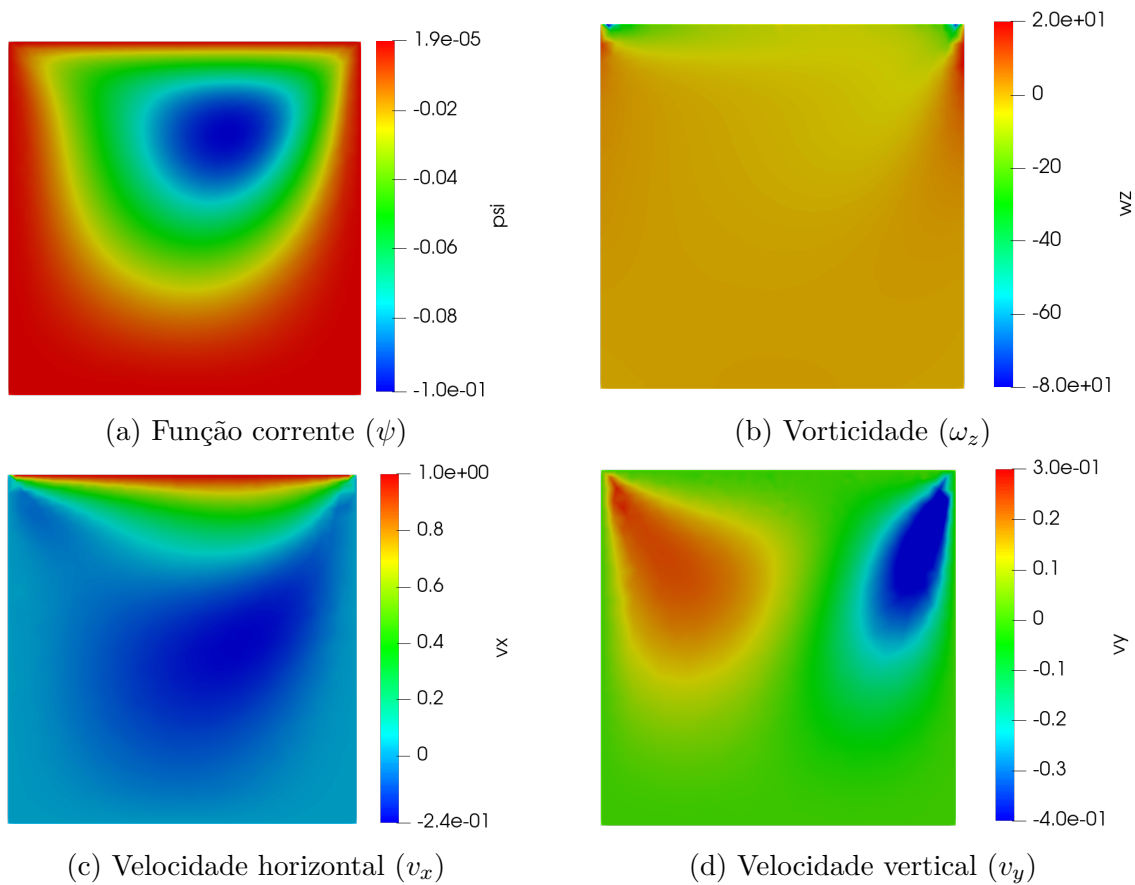


Figura 6.6: Resultados para cavidade quadrada em  $t = 7 s$ .

próximo do  $Re$  utilizado nas análises numéricas da próxima seção. No trabalho de referência, o autor compara valores obtidos computacionalmente através do Método de Elementos Finitos, aos resultados encontrados experimentalmente e aos apresen-

tados por ATKINS *et al.* [38]. O detalhamento da geometria está apresentado na figura 6.7.

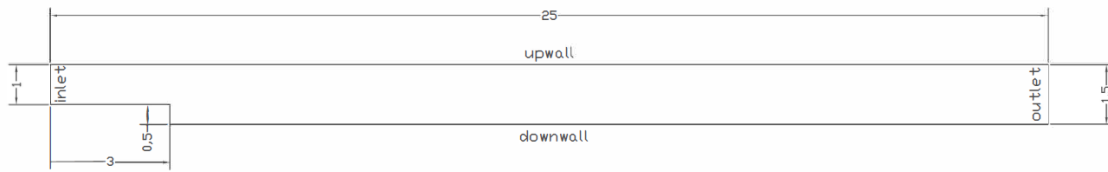


Figura 6.7: Geometria do canal utilizada com as condições de contorno.

Fonte: adaptado de THOMAS *et al.*, 1981.

### 6.3.1 Malha selecionada

A malha foi gerada com elementos triangulares, apresentando a seguinte especificação:

- Número de elementos = 4243
- Número de nós = 2301

### 6.3.2 Condições de contorno

- Condição de entrada: definida na entrada do canal –  $x = 0$  – e que possuirá as componentes de velocidade definidas como  $v = 0$  e  $u = 1$ .
- Condição de saída: definida em  $x = L$ , a derivada de ambos os componentes da velocidade são nulos  $\partial u / \partial n = \partial v / \partial n = 0$ .
- Condição de não escorregamento nas paredes: definida nas paredes superior e inferior, além da parede do degrau, impondo que  $u$  e  $v$  são nulos. A função de corrente será  $\psi = 0$  ao longo da parede inferior e na superfície do degrau, além de ser  $\psi = 1$  na parede superior.

### 6.3.3 Resultados obtidos

A seguir, há um comparativo entre os resultados obtidos no trabalho de THOMAS *et al.* [8] e os gerados através da simulação desempenhada neste trabalho, para um  $Re = 73$ . O intervalo de tempo selecionado para obtenção dos resultados foi  $\Delta t = 0,01$  e foram realizadas 5000 iterações, com os resultados visualizados a partir do software *ParaView*. Na figura 6.8, são comparados os perfis de velocidade horizontal nas posições  $x = 3,4$  e  $x = 4$ .

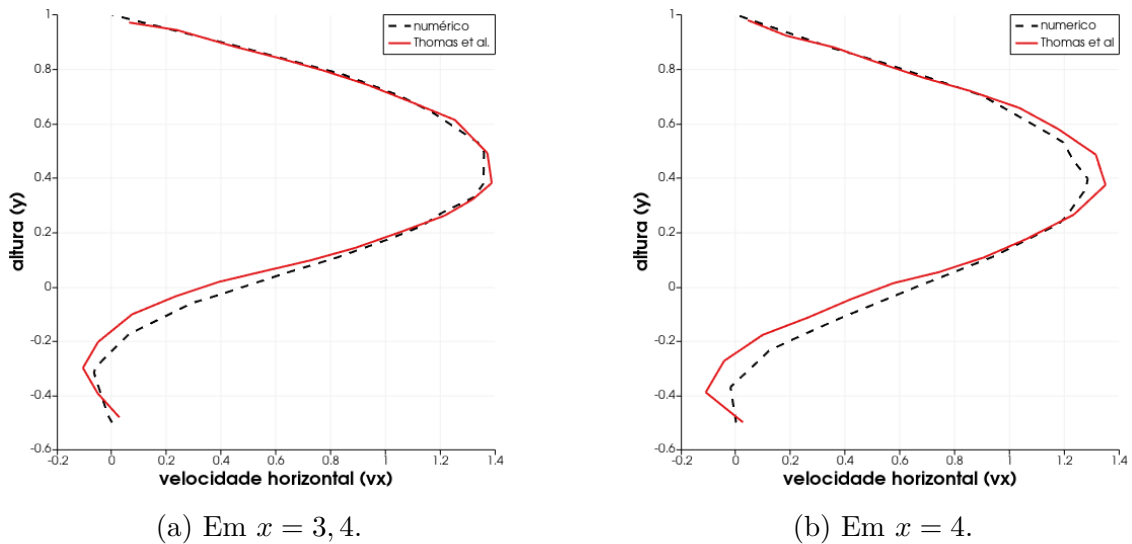


Figura 6.8: Perfil da velocidade horizontal em  $t = 50$  s.

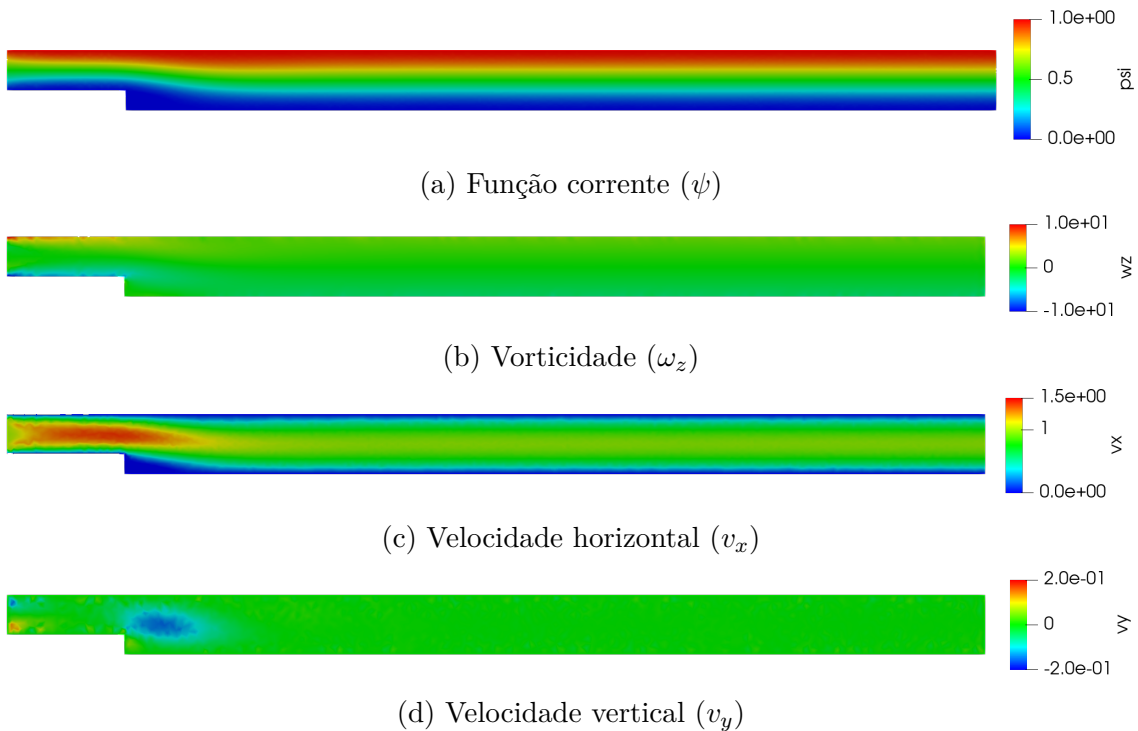


Figura 6.9: Resultados para o canal em  $t = 50$  s.

## 6.4 Dispersão de droga em artéria coronária com geometria aproximada

Para a quarta e última verificação do código implementado, foi realizada a verificação do mesmo a partir do artigo de MARQUES e ANJOS [9]. No artigo, são gerados resultados para três geometrias de canal, com quatro valores distintos para o número de Schmidt. Neste trabalho, foi feita a verificação para as geometrias de

canal reto e curvo, ambos com *stent* e  $Sc = 1,0$ . A representação geométrica dos mesmos é conforme abaixo:

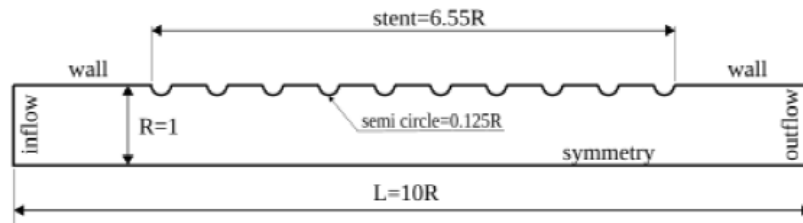


Figura 6.10: Representação do meio canal reto com *stent*.

Fonte: MARQUES e ANJOS, 2021.

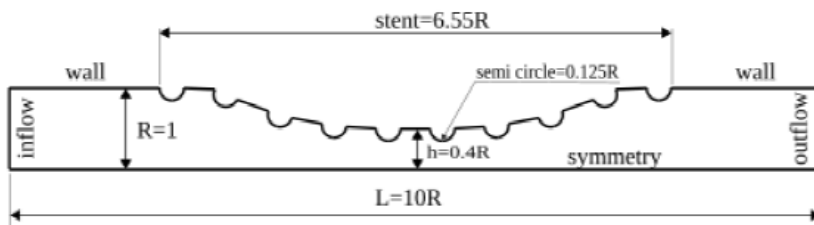


Figura 6.11: Representação do meio canal curvo com *stent*.

Fonte: MARQUES e ANJOS, 2021.

#### 6.4.1 Malha selecionada

A malha foi gerada com elementos triangulares, apresentando a seguinte especificação:

- Canal reto
  - Número de elementos = 1887
  - Número de nós = 1045
- Canal curvo
  - Número de elementos = 2035
  - Número de nós = 1138

#### 6.4.2 Condições de contorno

- Condição de entrada: definida na entrada do canal –  $x = 0$  – e que possuirá as componentes de velocidade definidas como  $v_0 = 0$  e  $u_0$  será dada pela

expressão do escoamento completamente desenvolvido entre placas paralelas e planas, conforme abaixo. A função corrente nesta condição é definida como  $\psi = 0$  em  $y = 0$  e  $\psi = \int (u_0 dy - v_0 dx)$  ao longo dos valores de  $y$ .

$$u_0(y) = 1,5 \left[ 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right] \quad (6.2)$$

- Condição de saída: definida em  $x = L$ , a derivada de ambos os componentes da velocidade são nulos  $\partial u / \partial n = \partial v / \partial n = 0$ .
- Condição de não escorregamento nas paredes: definida nas paredes de canal fora dos *stents*, impondo que  $u$  e  $v$  são nulos e a função de corrente será  $\psi = 1$ .
- Condição de superfície livre: definida de forma a caracterizar o eixo de simetria do canal, em  $y = 0$ , acarretando na imposição de  $v = 0$  e a função corrente será  $\psi = 0$ .
- Condição de concentração no *stent*: definida ao longo do perímetro dos *stents*, de modo que  $u = v = 0$  e  $e = e_0$ , onde  $e_0 = 1$ .

### 6.4.3 Resultados obtidos

Em ambos os casos, o intervalo de tempo selecionado para obtenção dos resultados foi  $\Delta t = 0,01$  e foram realizadas 700 iterações. A partir do software *ParaView*, os resultados foram visualizados e os mesmos são apresentados a seguir.

A seguir, as figuras 6.12 e 6.13 trazem os resultados obtidos para o canal reto, enquanto que as figuras 6.14 e 6.15 apresentam os resultados para o canal com curvatura.

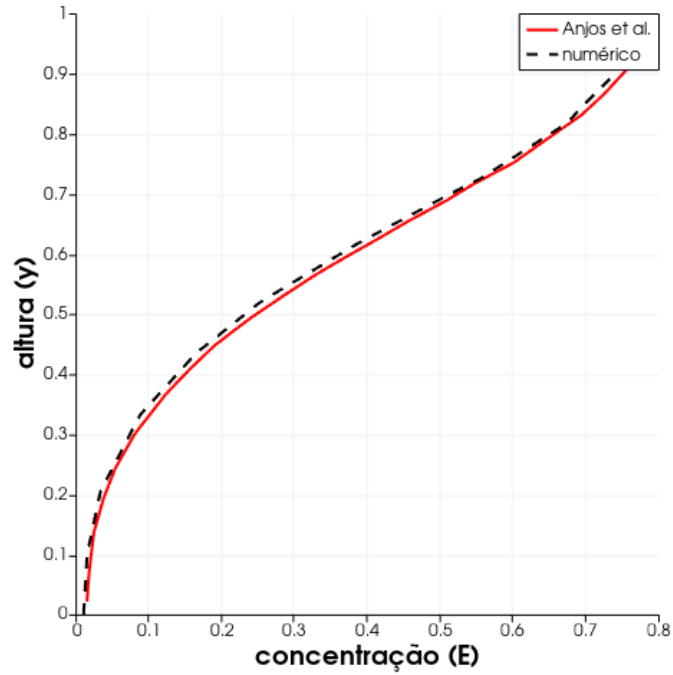


Figura 6.12: Gráfico comparativo para a concentração de droga em razão da altura do canal para  $Sc = 1$  em  $x = 5 R$  e  $t = 7 s$ .

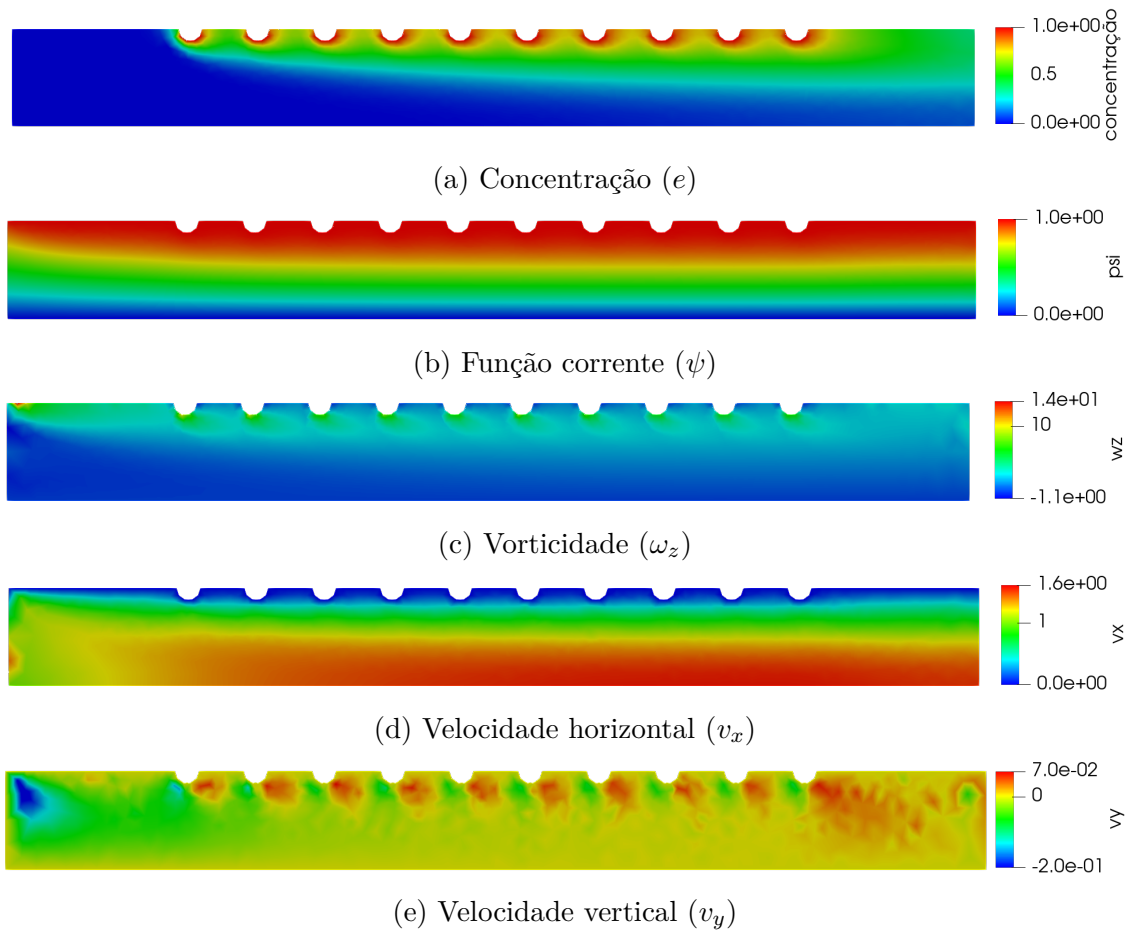


Figura 6.13: Resultados para canal reto em  $t = 7 s$ .

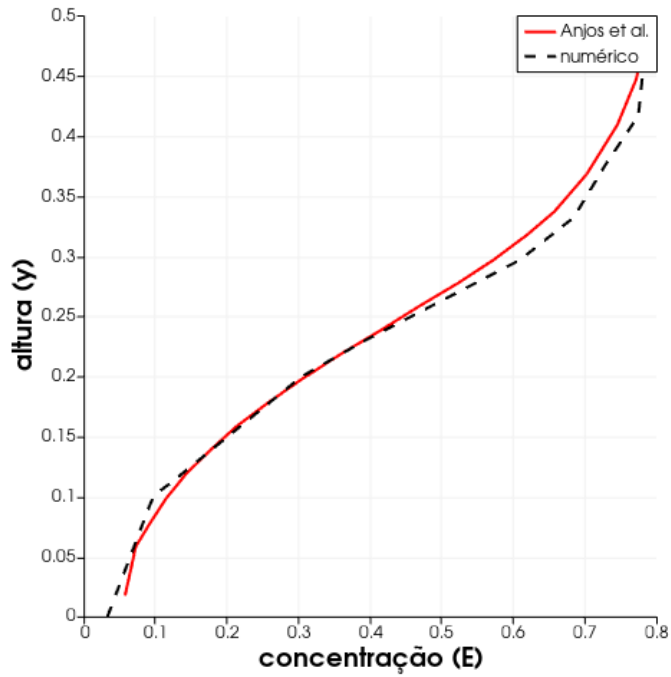


Figura 6.14: Gráfico comparativo para a concentração de droga em razão da altura do canal para  $Sc = 1$  em  $x = 5 R$  e  $t = 7 s$ .

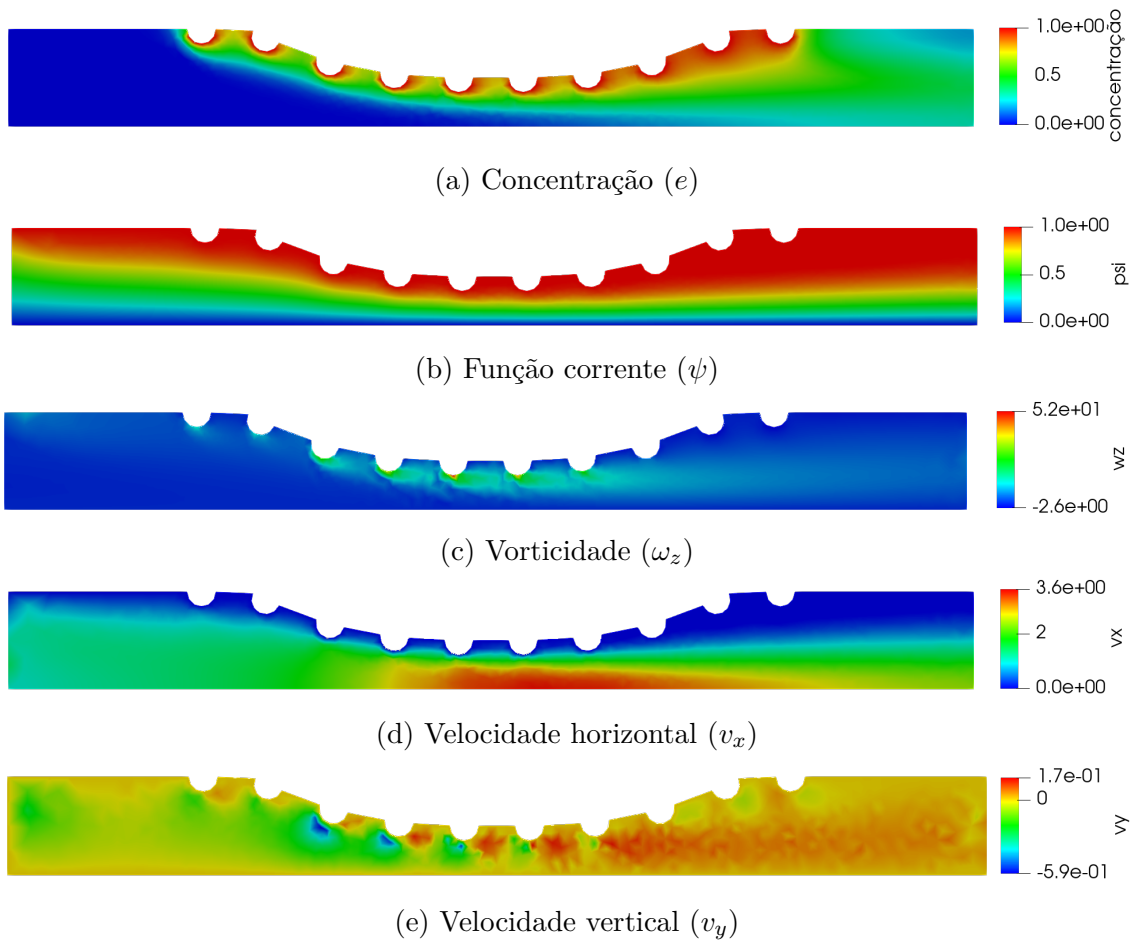


Figura 6.15: Resultados para canal curvo em  $t = 7 s$ .

# Capítulo 7

## Resultados

Uma vez verificado o código a partir de casos de referência, obteve-se as geometrias necessárias para gerar as malhas não estruturadas, bem como foram definidos os parâmetros necessários para a simulação.

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos no trabalho. Primeiro foi feita a definição da geometria e dos parâmetros a serem utilizados na geração das malhas. Em seguida, foram definidos os parâmetros físicos e as condições de contorno aplicáveis ao problema. Por fim, os resultados numéricos das simulações foram apresentados, assim como a análise pertinente.

Todos os resultados apresentados neste capítulo, bem como no anterior, foram gerados a partir de simulações realizadas no Python 2.7 em um computador com processador *Intel® Core™ i7-3630QM CPU @ 2.40 GHz*.

### 7.1 Definição dos parâmetros de malha

Antes de serem gerados os dados, foi necessário definir o grau de refinamento das malhas utilizadas, bem como determinar qual geometria iria gerar um resultado com menor erro relativo: se em meio canal ou em canal completo, a fim de garantir um resultado numérico dentro de um intervalo considerado como aceitável. Desta forma, foram realizadas 10 verificações numéricas a partir do caso físico de escoamento de Hagen-Poiseuille em meio canal e foram realizadas mais 10 verificações em canal completo, onde houve a comparação entre o valor máximo da velocidade horizontal ( $v_x$ ) obtida através das iterações numéricas com o valor analítico de referência.

Para realizar a variação das malhas verificadas, dois parâmetros principais foram testados no software **GMSH**: o algoritmo 2D e o **element size factor (ESF)**. Dentre os diversos parâmetros que o **GMSH** permite serem variados para alterar as características das malhas, estes dois são os mais simples e fundamentais. O primeiro parâmetro refere-se ao algoritmo utilizado na geração das malhas, enquanto que o

outro é responsável por definir um intervalo para o tamanho dos elementos que irão compor as malhas.

Dentre os diversos algoritmos disponíveis no software, apenas dois foram validados, sendo ambos utilizados na geração de malhas não estruturadas - o algoritmo de *Delauney* e o *Mesh Adapt*. Consultando a documentação do software **GMSH** [39] e o trabalho de ANJOS [32], as definições para ambos são:

- *Delauney*: a triangulação consiste em conectar os pontos de um dado conjunto através de segmentos de reta, de forma que cada ponto seja vértice de pelo menos um triângulo formado. Adicionalmente, os círculos circunscritos aos triângulos não podem conter outros pontos que não sejam os vértices do triângulo inscrito;
- *Mesh Adapt*: o método consiste em modificações locais na malha, de modo a dividir arestas muito grandes, colapsar arestas menores ou substituí-las para obter melhores configurações geométricas.

Sobre o **element size factor (ESF)**, maiores informações podem ser obtidas a partir do manual online do software, disponível gratuitamente para acesso.

Além dos parâmetros já apresentados, as verificações foram feitas com  $x$  iterações numéricas e  $\Delta t = 0,001$  em um escoamento com  $Re = 50$  e geometria do canal adimensionalizada, com  $y = [0, 1]$  e  $x = [0, 6]$ . A verificação foi realizada com malhas geradas a partir dos dois algoritmos e das duas geometrias citados anteriormente e com ESF variando de 0,25 até 0,05 – conforme nas tabelas 7.1, 7.2, 7.3 e 7.4. Os valores mínimos de ESF foram estabelecidos em razão da limitação computacional da máquina utilizada em todo o trabalho e os resultados apresentados nas tabelas abaixo foram coletados em  $x = 5, 5$ .

ESF	$N^\circ$ de elementos	$N^\circ$ de pontos	Tempo [s]	Valor máximo	Erro relativo
0,25	256	157	32,72	1,3671	8,86%
0,20	398	235	47,48	1,4028	6,48%
0,15	698	397	117,31	1,4092	6,05%
0,10	1552	847	410,91	1,4210	5,27%
0,05	6220	3251	9998,24	1,4279	4,80%

Tabela 7.1: Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Delauney em meio canal.

Com base nos resultados apresentados nas tabelas, a abordagem feita em canal completo apresentou os menores erros relativos em geral. Além disso, foi observada a tendência de ao reduzir o valor de ESF, os resultados apresentarem maior convergência, porém sem haver muito discrepância entre os valores dependendo do algoritmo utilizado para gerar a malha. Por fim, há a limitação computacional que deve ser considerada na análise.

ESF	$N^\circ$ de elementos	$N^\circ$ de pontos	Tempo [s]	Valor máximo	Erro relativo
0,25	242	150	29,09	1,4058	6,28%
0,20	416	244	51,63	1,3901	7,32%
0,15	656	376	106,51	1,4128	5,82%
0,10	1278	710	364,88	1,4121	5,86%
0,05	6080	3181	8949,76	1,4306	4,62%

Tabela 7.2: Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Mesh Adapt em meio canal.

ESF	$N^\circ$ de elementos	$N^\circ$ de pontos	Tempo [s]	Valor máximo	Erro relativo
0,25	256	157	36,75	1,3887	7,42%
0,20	398	235	77,91	1,4049	6,34%
0,15	698	397	211,71	1,4485	3,43%
0,10	1552	847	669,54	1,4576	2,83%
0,05	6220	3251	9998,24	1,4831	1,13%

Tabela 7.3: Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Delauney em canal completo.

ESF	$N^\circ$ de elementos	$N^\circ$ de pontos	Tempo [s]	Valor máximo	Erro relativo
0,25	242	150	36,44	1,416	5,60%
0,20	416	244	94,38	1,4094	6,04%
0,15	656	376	179,77	1,4356	4,29%
0,10	1278	710	352,2	1,4474	3,51%
0,05	6080	3181	9897,01	1,4863	0,91%

Tabela 7.4: Resultados para malhas geradas pelo algoritmo de Mesh Adapt em canal completo.

Desta forma, a geometria escolhida foi o canal completo, com a malha gerada através do algoritmo de Delauney e o tamanho dos elementos definido através do ESF de 0,1. A escolha foi feita pois o erro relativo apresentado foi menor do que 3% e o custo computacional foi inferior quando comparado aos casos com ESF igual a 0,05.

## 7.2 Parâmetros físicos e condições de contorno

Para todas as geometrias simuladas neste trabalho, os parâmetros para escoamento do fluido foram os mesmos para todos os casos, assim como e as condições de contorno. De acordo com a abordagem adimensional das equações de governo, foi necessário definir o número de Reynolds e de Schmidt para assim resolver as equações matriciais (4.116) até (4.120).

O número de Reynolds foi definido a partir dos valores utilizados por BOZSAK *et al.* [19] em seu estudo para a massa específica, o diâmetro do canal sem aterosoma e a viscosidade dinâmica. enquanto que a velocidade do fluido foi considerada a obtida no trabalho de KESSLER *et al.* [40]:

- massa específica ( $\rho$ ) =  $1060,0 \frac{kg}{m^3}$
- diâmetro do canal sem ateroma ( $d$ ) =  $3,0 \times 10^{-3} m$
- viscosidade dinâmica ( $\mu$ ) =  $3,5 \times 10^{-3} Pa \cdot s$
- velocidade ( $u$ ) =  $0,12 \frac{m}{s}$

Desta forma, o número de Reynolds é:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} \approx 109,0 \quad (7.1)$$

O número de Schmidt foi obtido considerando uma droga que possui coeficiente de difusividade ( $D$ ) =  $3,0 \times 10^{-6} m^2/s$ , junto às outras propriedades do fluido, conforme definido anteriormente:

Desta forma, o número de Schmidt é:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D} \approx 1,0 \quad (7.2)$$

Em seguida, as condições de contorno foram definidas conforme abaixo:

- condição de entrada: ocorre em  $x = 0$ , traz a função corrente definida linearmente com a altura do canal, variando de 0 a  $1 - \psi = y$ . A derivada do campo de concentração é nula,  $\partial c / \partial n = 0$ . Para as condições de velocidade,  $v = 0$  e  $u$  sendo igual à velocidade horizontal obtida para o escoamento completamente desenvolvido em um canal reto para escoamento laminares ( $Re < 2300$ ), conforme abaixo:

$$u(y) = \frac{6}{L^2} y(L - y) \quad (7.3)$$

- condição de saída: a derivada das componentes da velocidade, da concentração e da função corrente são nulas, isto é,  $\partial u / \partial n = 0$ ,  $\partial v / \partial n = 0$ ,  $\partial c / \partial n = 0$  e  $\partial \psi / \partial n = 0$ .

- condição de não escorregamento: condição para o domínio definido nas paredes do canal e na superfície externa do stent. A função corrente é definida como  $\psi = 0$  no contorno inferior do canal, enquanto que possui valor  $\psi = 1$  no contorno superior do canal. As componentes tangencial e normal da velocidade são nulas  $v = u = 0$ . Nas paredes do canal, também tem-se que a derivada do campo de concentração é nula, isto é,  $\partial c / \partial n = 0$ .
- condição de concentração no stent: definido ao longo da superfície do stent em contato com o fluido, de modo que o valor da concentração é definido como  $e = 1, 0$ . Por sua vez, as componentes da velocidade são nulas, ou seja,  $v = u = 0$ .

### 7.3 Geometrias e resultados

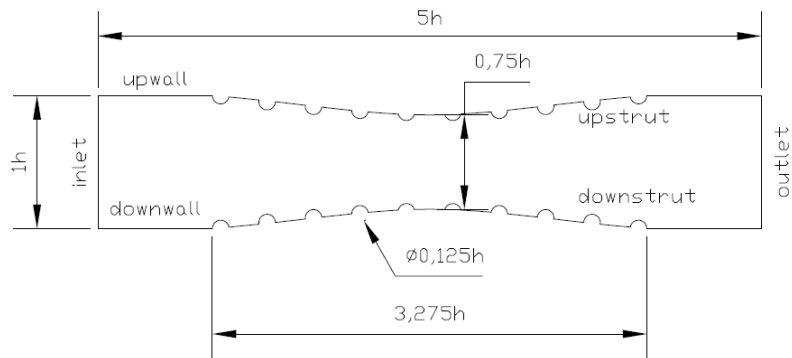
Todas as geometrias utilizadas para gerar as malhas utilizadas neste trabalho foram geradas diretamente através do software GMSH. As representações esquemáticas apresentadas neste capítulo foram feitas a partir do software *AutoCAD 2020*, por meio da licença gratuita para estudantes.

Sobre a confecção das geometrias – e posteriormente das malhas – o estreitamento nos canais foi feito através da função *bpspline* do GMSH, de modo a obter as diferentes configurações testadas. Além disso, as condições de contorno do problema foram definidas conforme abaixo:

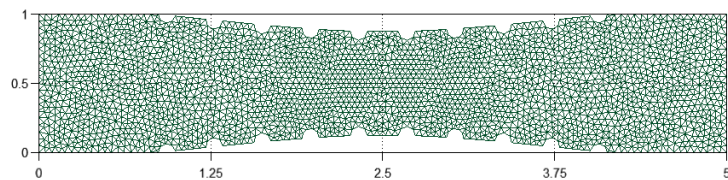
- condição de entrada: *inlet*;
- condição de saída: *outlet*;
- condição de não escorregamento: *upwall* e *downwall*;
- condição de concentração no stent: *upstrut* e *downstrut*.

### 7.3.1 Geometria 1: restrição de 25% e *stents* circulares

A geometria 01 traz um ateroma que representa uma restrição de 25 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é circular, com as dimensões conforme indicado na figura 7.1a. Enquanto isso, a figura 7.1b traz a malha gerada a partir da geometria 01, tendo ela 5328 elementos, 2812 nós e tempo de processamento de 22416 s para as 2000 iterações.



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.1: Geometria 01.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

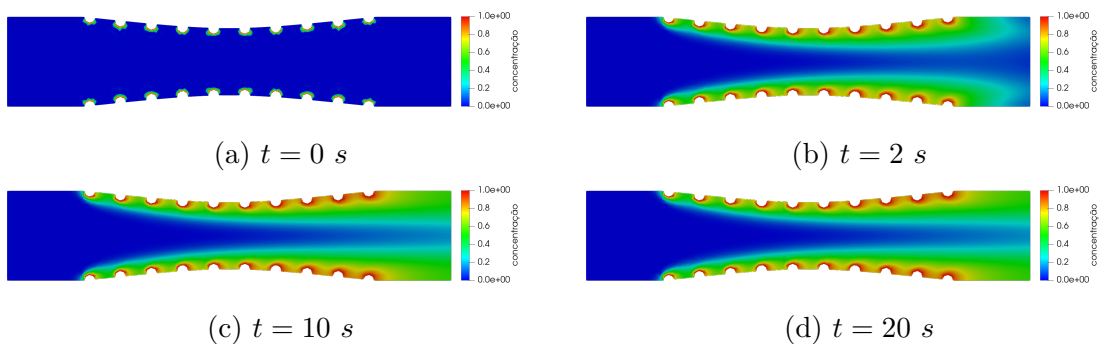


Figura 7.2: Campo de concentração para a geometria 01.

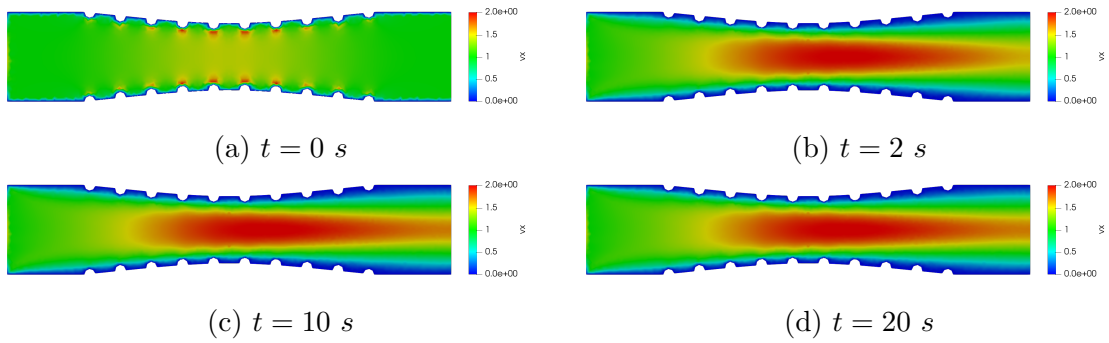


Figura 7.3: Campo de velocidade horizontal para a geometria 01.

### 7.3.2 Geometria 2: restrição de 50% e *stents* circulares

A geometria 02 traz um ateroma que representa uma restrição de 50 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é circular, com as dimensões conforme indicado na figura 7.4a. Enquanto isso, a figura 7.4b traz a malha gerada a partir da geometria 02, tendo ela 5188 elementos, 2750 nós e tempo de processamento de 19005 s para as 2000 iterações.

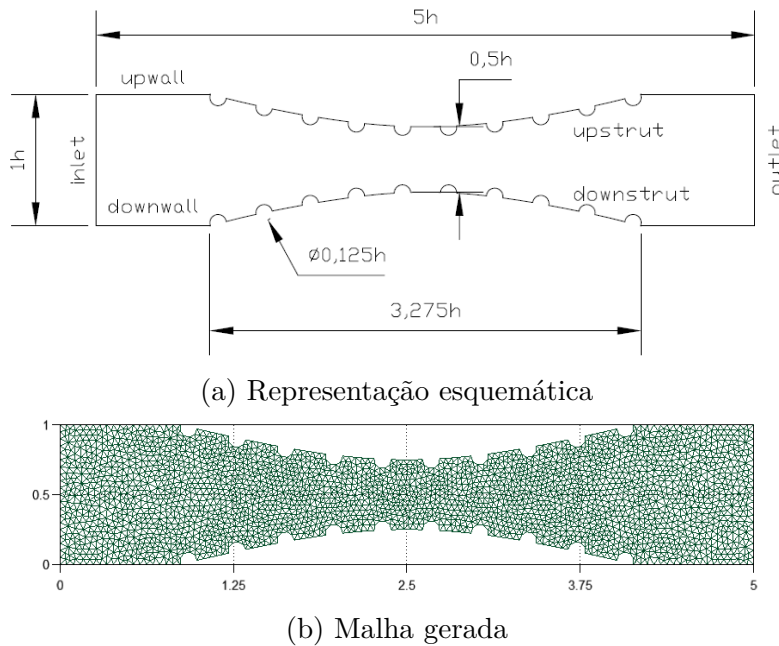


Figura 7.4: Geometria 02.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

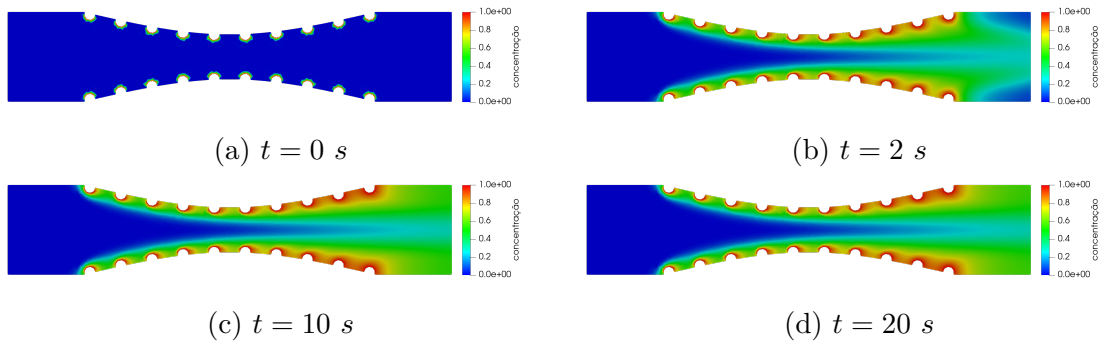


Figura 7.5: Campo de concentração para a geometria 02.

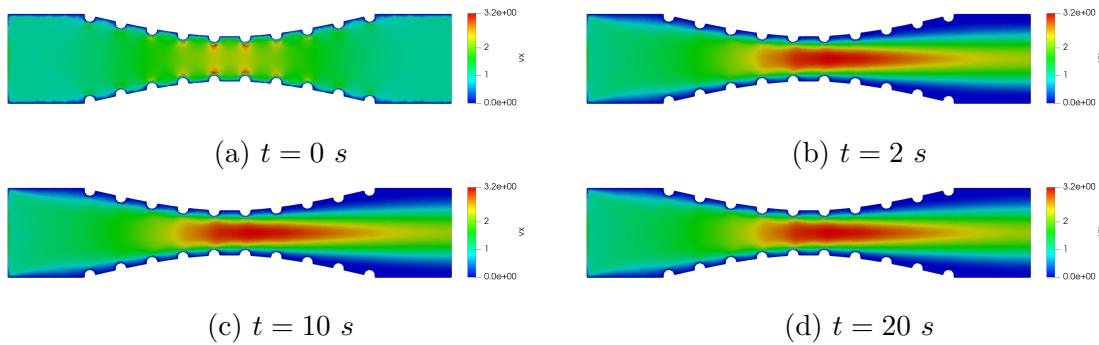
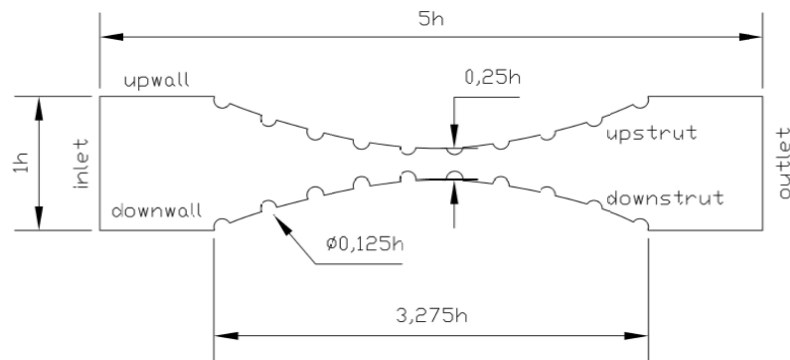
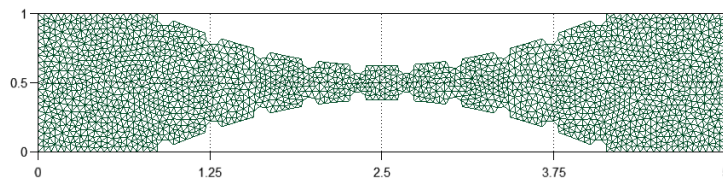


Figura 7.6: Campo de velocidade horizontal para a geometria 02.

### 7.3.3 Geometria 3: restrição de 75% e *stents* circulares



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.7: Geometria 03.

A geometria 03 traz um ateroma que representa uma restrição de 75 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é circular, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.7a. Enquanto isso, a



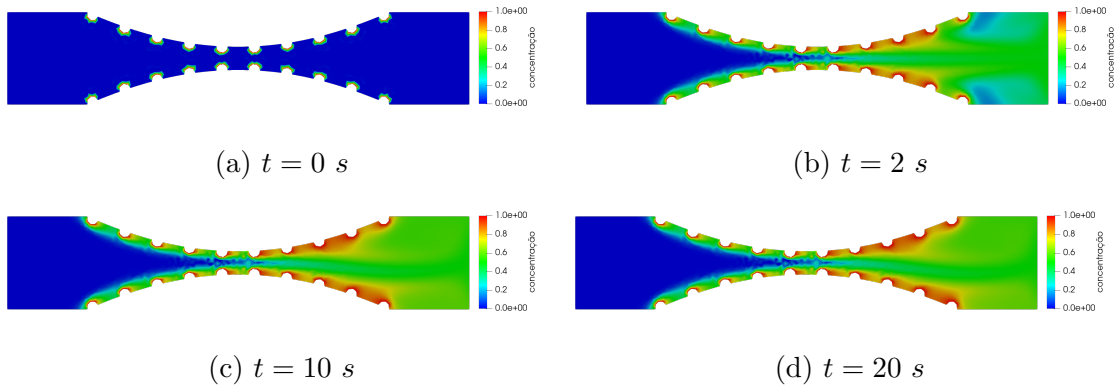


Figura 7.10: Novo campo de concentração para a geometria 03.

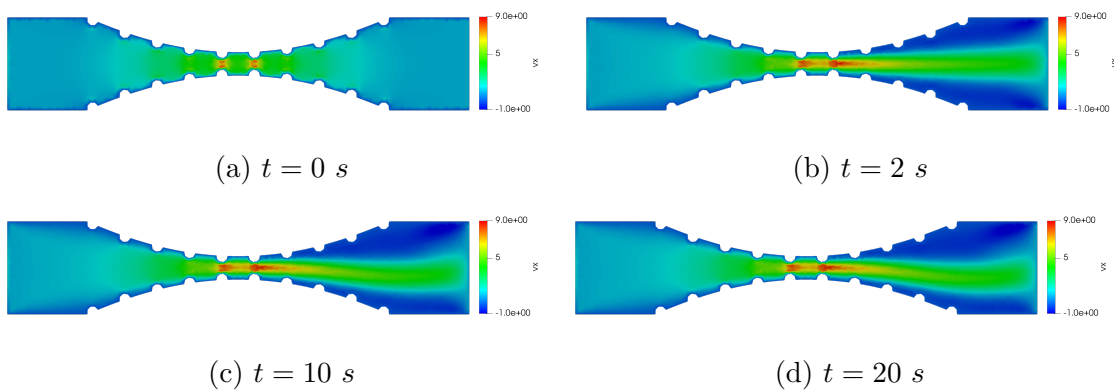
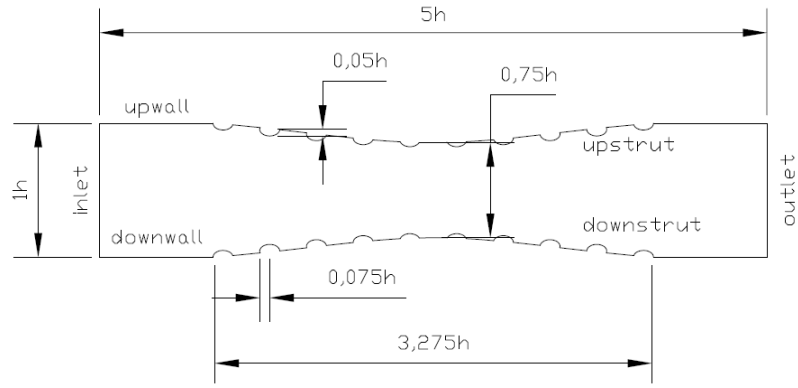


Figura 7.11: Novo campo de velocidade horizontal para a geometria 03.

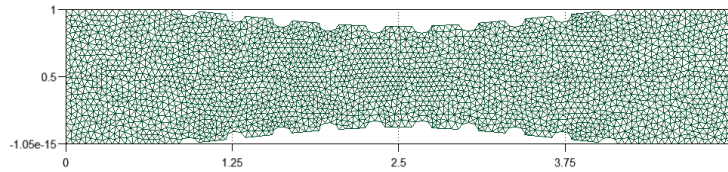
### 7.3.4 Geometria 4: restrição de 25% e *stents* elípticos (raio menor)

A geometria 04 traz um ateroma que representa uma restrição de 25 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio menor perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.12a. Enquanto isso, a figura 7.12b traz a malha gerada a partir da geometria 04, tendo ela 5218 elementos, 2749 nós e tempo de processamento de 18731 s para as 2000 iterações.

Os campos de concentração e velocidade horizontal conforme a evolução temporal são apresentados, respectivamente, nas figuras 7.13 e 7.14.



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.12: Geometria 04.

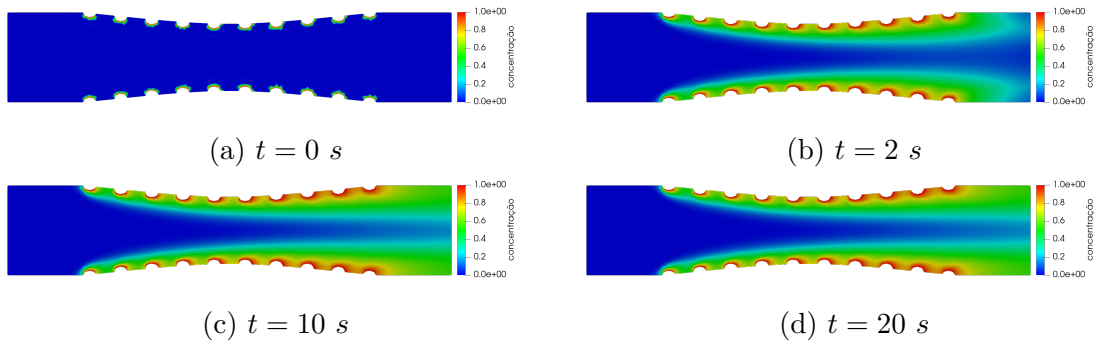


Figura 7.13: Campo de concentração para a geometria 04.

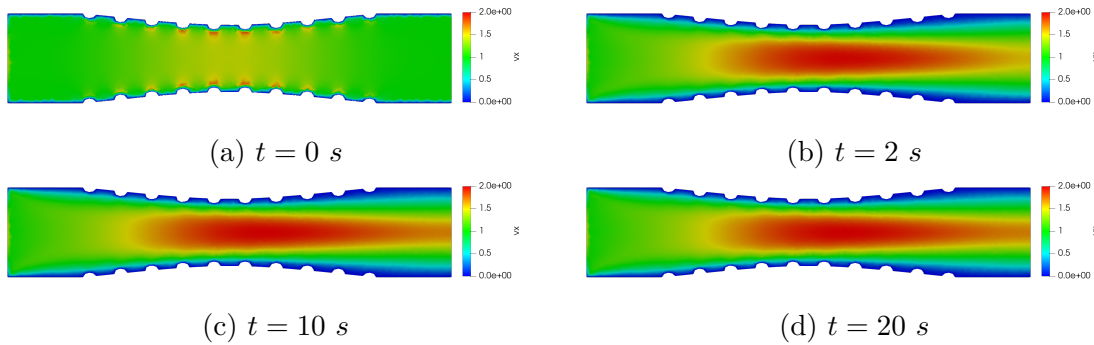
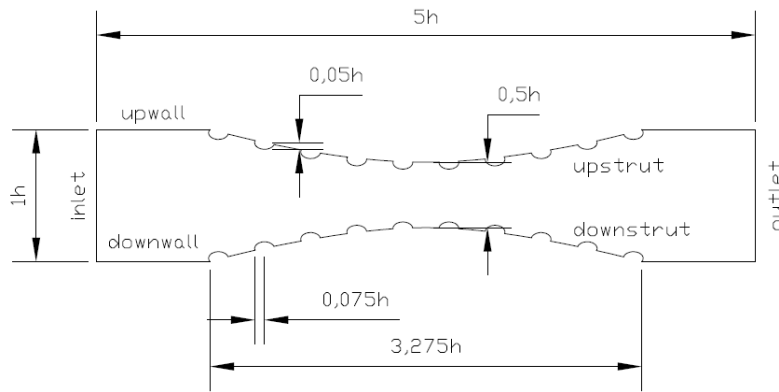


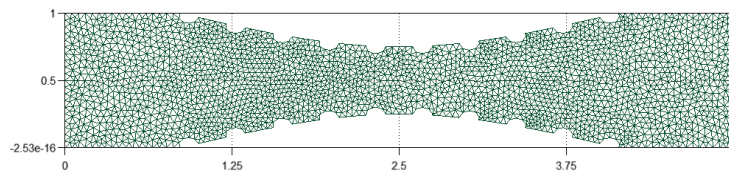
Figura 7.14: Campo de velocidade horizontal para a geometria 04.

### 7.3.5 Geometria 5: restrição de 50% e *stents* elípticos (raio menor)

A geometria 05 traz um ateroma que representa uma restrição de 50 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio menor perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.15a. Enquanto isso, a figura 7.15b traz a malha gerada a partir da geometria 05, tendo ela 4828 elementos, 2563 nós e tempo de processamento de 15771 s para as 2000 iterações.



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.15: Geometria 05.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

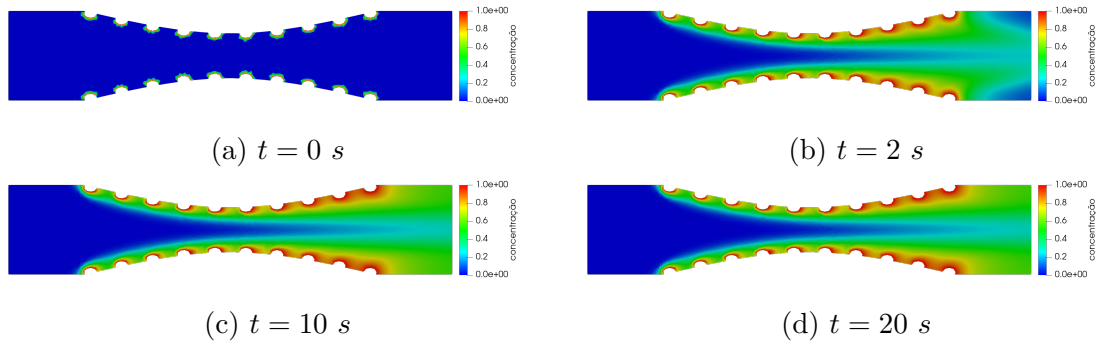


Figura 7.16: Campo de concentração para a geometria 05.

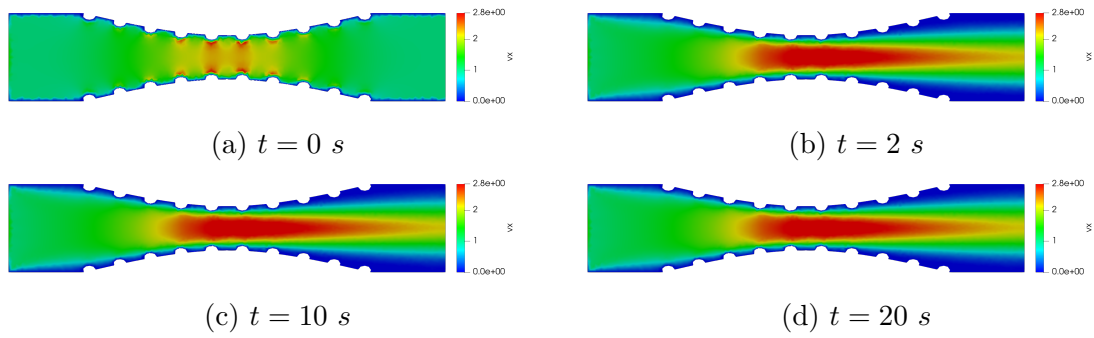


Figura 7.17: Campo de velocidade horizontal para a geometria 05.

### 7.3.6 Geometria 6: restrição de 75% e *stents* elípticos (raio menor)

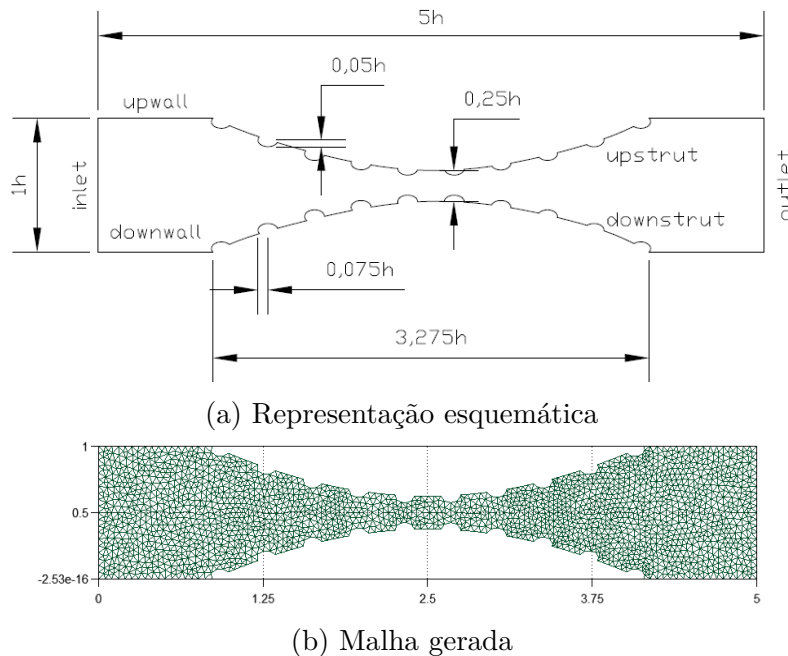


Figura 7.18: Geometria 06.

A geometria 06 traz um ateroma que representa uma restrição de 75 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio menor perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.18a. Enquanto isso, a figura 7.18b traz a malha gerada a partir da geometria 06, tendo ela 3844 elementos, 2066 nós e tempo de processamento de 9711 s para as 2000 iterações.

Os campos de concentração e velocidade horizontal conforme a evolução temporal são apresentados, respectivamente, nas figuras 7.19 e 7.20. Os resultados só foram apresentados até  $t = 4$  s. A partir deste ponto, os mesmos passam a apresentar inconsistências, uma vez que os resultados crescem indefinidamente.

Em razão deste fato, foi realizada uma pequena alteração nas condições de contorno. Para a condição de saída do escoamento (*outlet*) foi implementado que os valores no contorno deveriam ser assim como na condição de entrada (*inlet*), ou seja  $\psi = y$ . Os novos campos de concentração e velocidade horizontal podem ser vistos nas figuras 7.21 e 7.22, respectivamente. O novo tempo de processamento foi de 8542 s

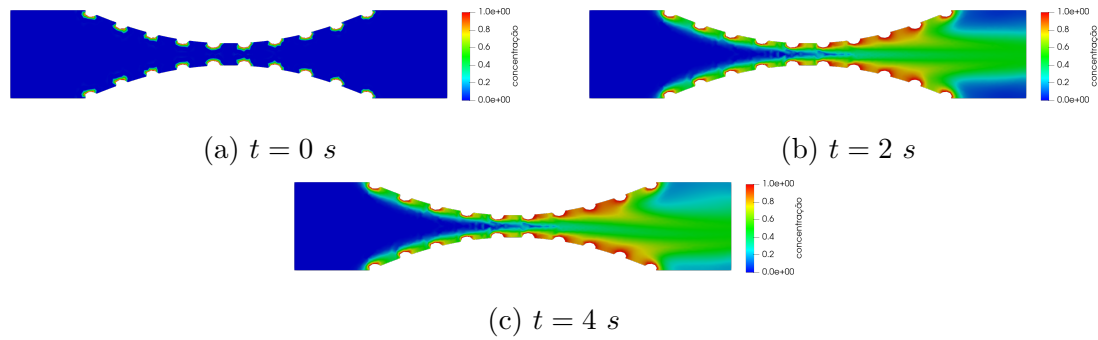


Figura 7.19: Campo de concentração para a geometria 06.

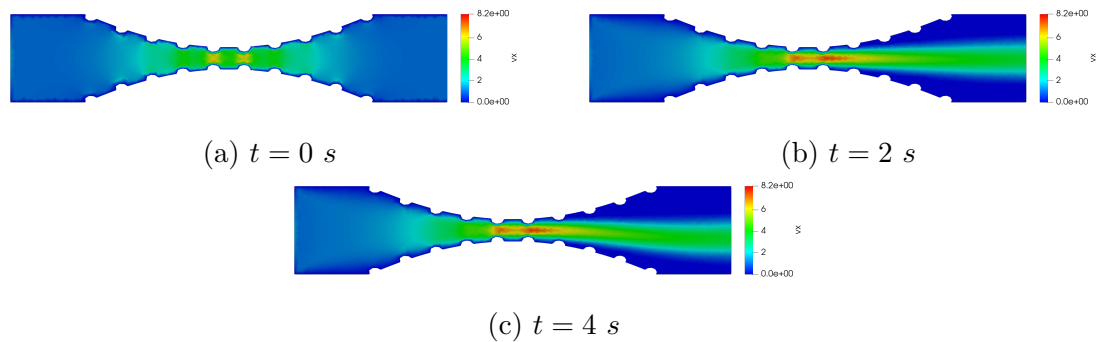


Figura 7.20: Campo de velocidade horizontal para a geometria 06.

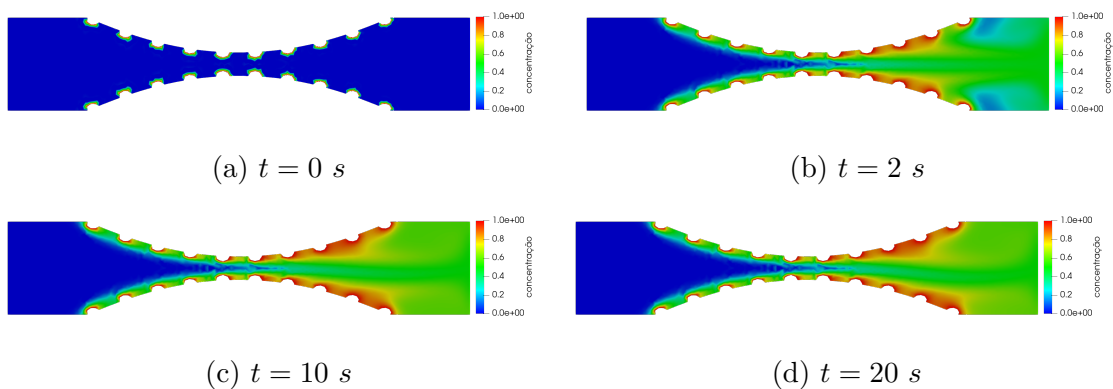


Figura 7.21: Novo campo de concentração para a geometria 06.

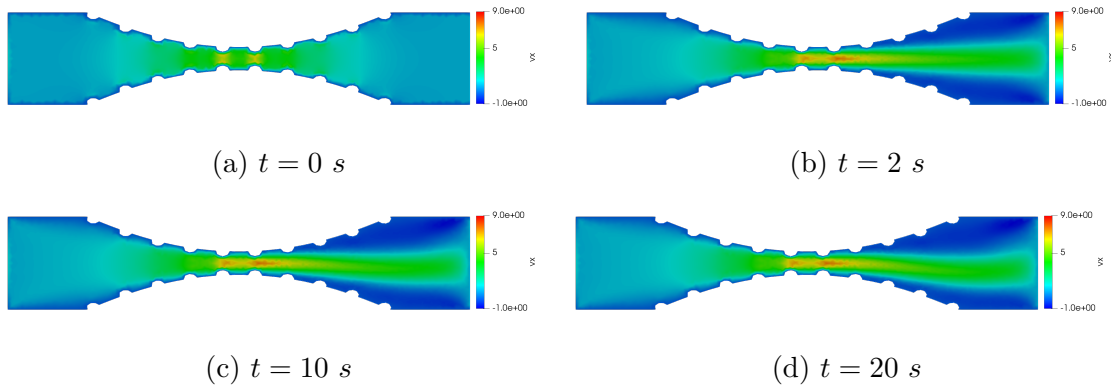
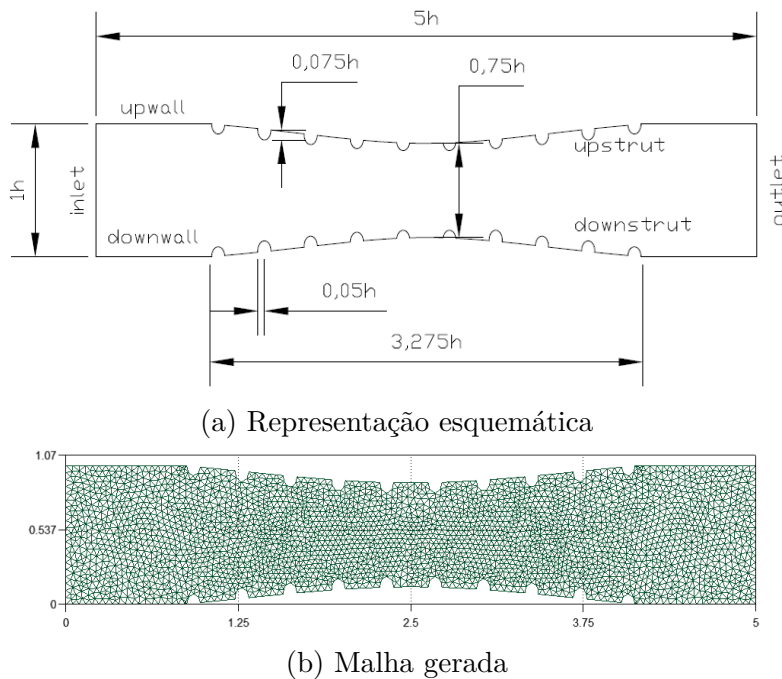


Figura 7.22: Novo campo de velocidade horizontal para a geometria 06.

### 7.3.7 Geometria 7: restrição de 25% e *stents* elípticos (raio maior)

A geometria 07 traz um ateroma que representa uma restrição de 25 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio maior perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.23a. Enquanto isso, a figura 7.23b traz a malha gerada a partir da geometria 07, tendo ela 5876 elementos, 3090 nós e tempo de processamento de 28223 s para as 2000 iterações.



(a) Representação esquemática

(b) Malha gerada

Figura 7.23: Geometria 07.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

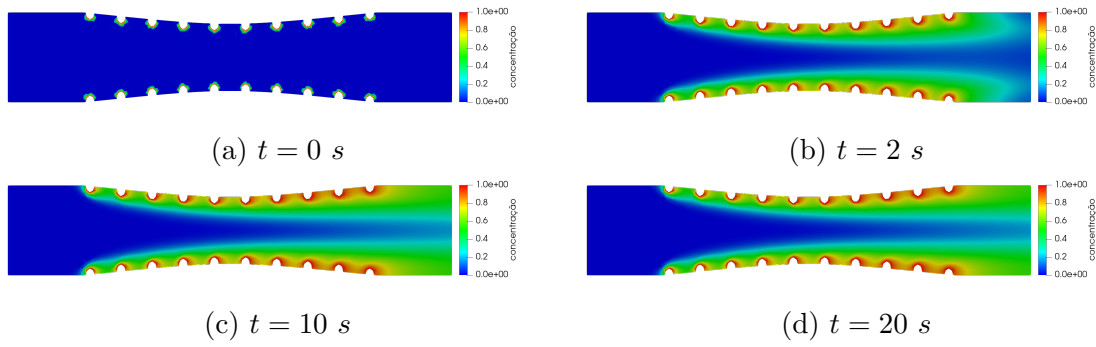


Figura 7.24: Campo de concentração para a geometria 07.

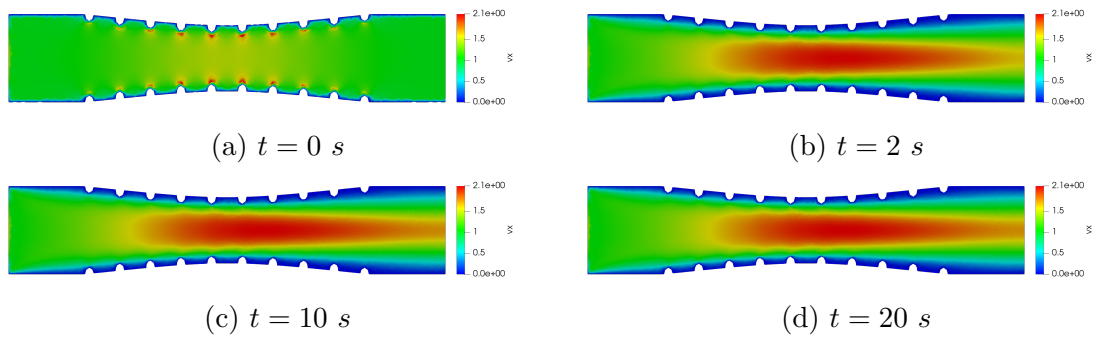


Figura 7.25: Campo de velocidade horizontal para a geometria 07.

### 7.3.8 Geometria 8: restrição de 50% e *stents* elípticos (raio maior)

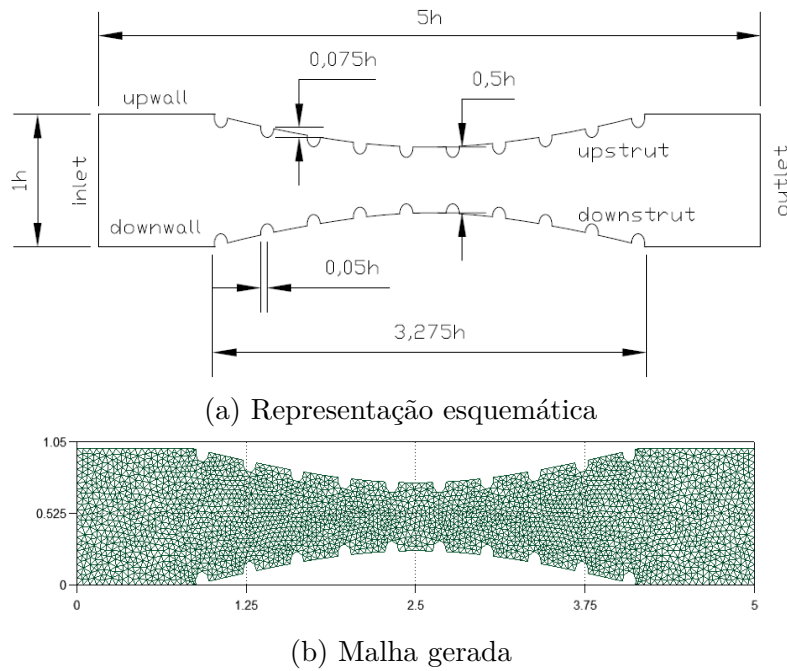


Figura 7.26: Geometria 08.

A geometria 08 traz um ateroma que representa uma restrição de 50 % ao fluxo

sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio maior perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.26a. Enquanto isso, a figura 7.26b traz a malha gerada a partir da geometria 08, tendo ela 5404 elementos, 2860 nós e tempo de processamento de 22361 s para as 2000 iterações.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

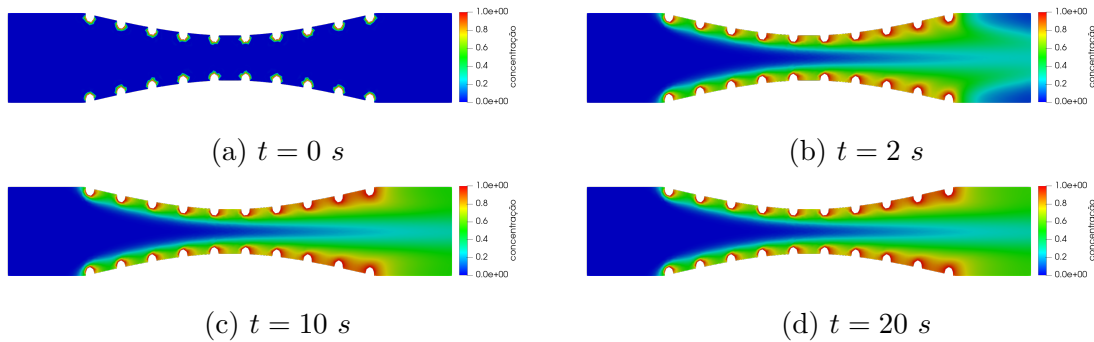


Figura 7.27: Campo de concentração para a geometria 08.

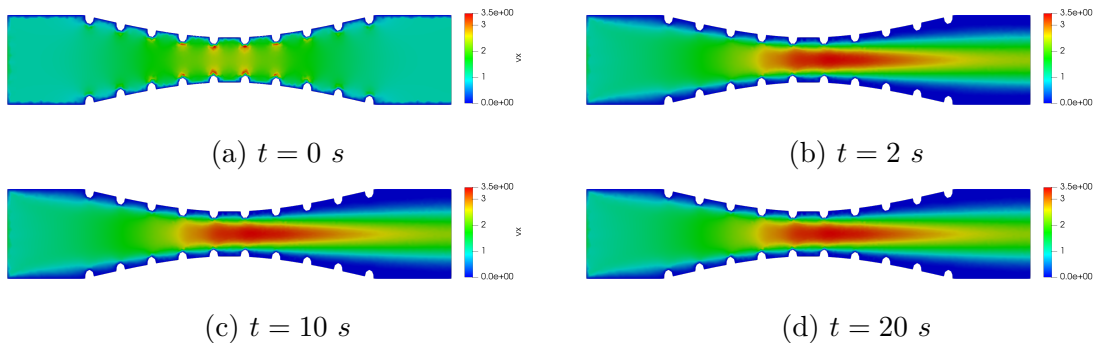
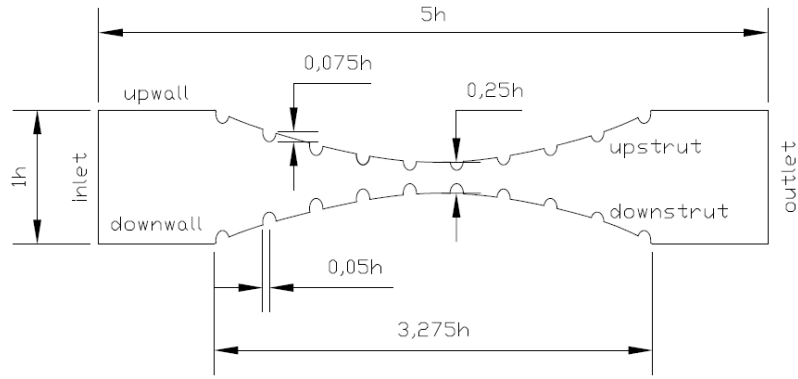


Figura 7.28: Campo de velocidade horizontal para a geometria 08.

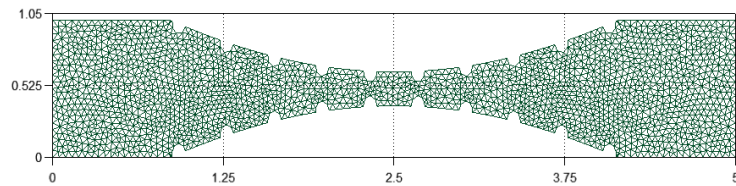
### 7.3.9 Geometria 9: restrição de 75% e *stents* elípticos (raio maior)

A geometria 09 traz um ateroma que representa uma restrição de 75 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio menor perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.29a. Enquanto isso, a figura 7.29b traz a malha gerada a partir da geometria 09, tendo ela 4108 elementos, 2210 nós e tempo de processamento de 10748 s para as 2000 iterações.

Os campos de concentração e velocidade horizontal conforme a evolução temporal são apresentados, respectivamente, nas figuras 7.30 e 7.31. Os resultados só foram



(a) Representação esquemática

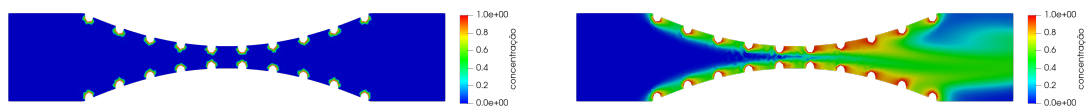


(b) Malha gerada

Figura 7.29: Geometria 09.

apresentados até  $t = 2$  s. A partir deste ponto, os mesmos passam a apresentar inconsistências, uma vez que os resultados crescem indefinidamente.

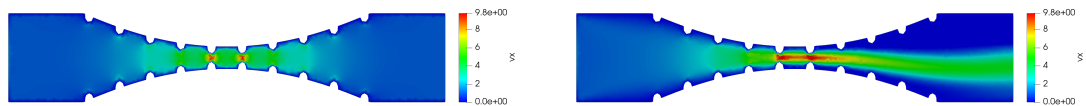
Em razão deste fato, foi realizada uma pequena alteração nas condições de contorno. Para a condição de saída do escoamento (*outlet*) foi implementado que os valores no contorno deveriam ser assim como na condição de entrada (*inlet*), ou seja  $\psi = y$ . Os novos campos de concentração e velocidade horizontal podem ser vistos nas figuras 7.32 e 7.33, respectivamente. O novo tempo de processamento foi de 10393 s



(a)  $t = 0$  s

(b)  $t = 2$  s

Figura 7.30: Campo de concentração para a geometria 09.



(a)  $t = 0$  s

(b)  $t = 2$  s

Figura 7.31: Campo de velocidade horizontal para a geometria 09.

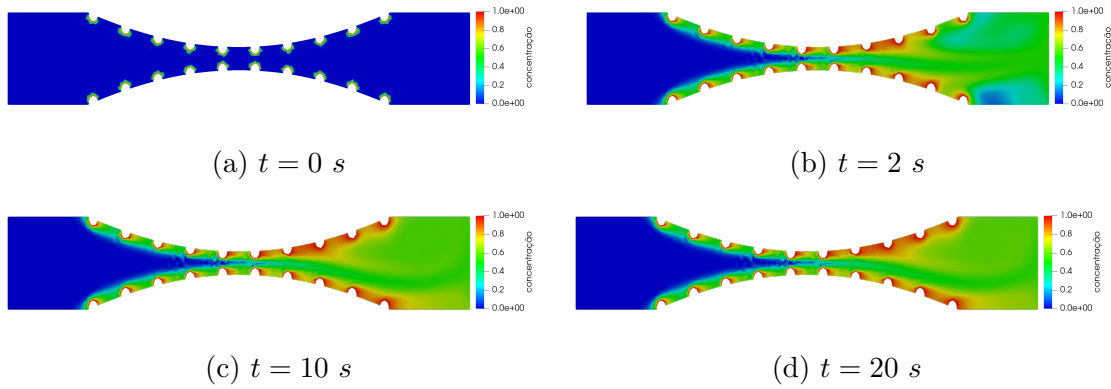


Figura 7.32: Novo campo de concentração para a geometria 09.

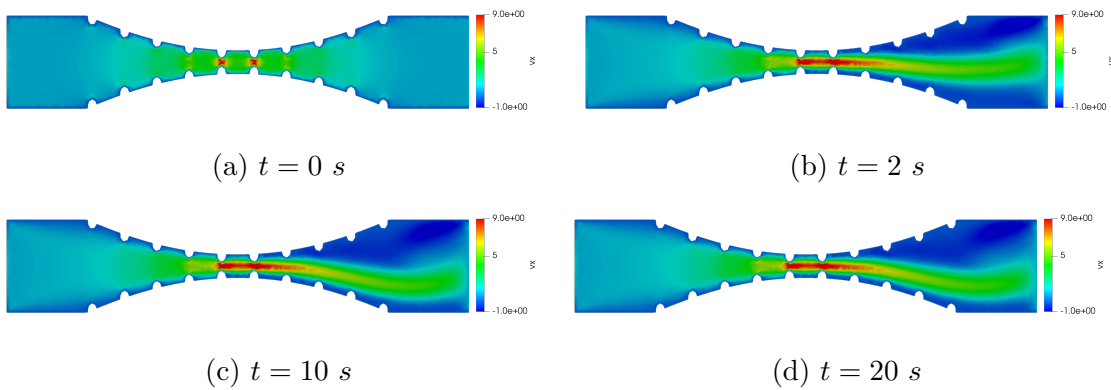
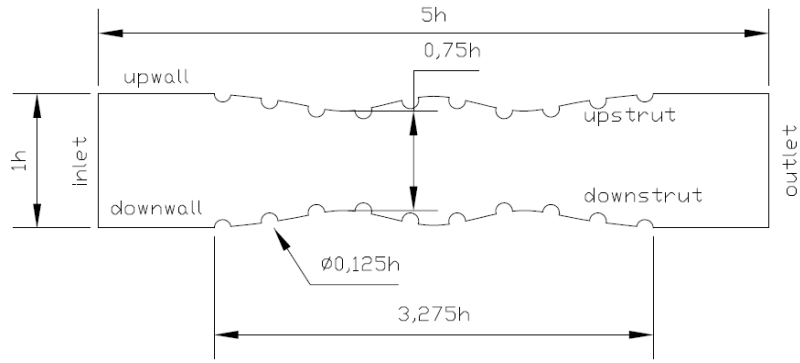


Figura 7.33: Novo campo de velocidade horizontal para a geometria 09.

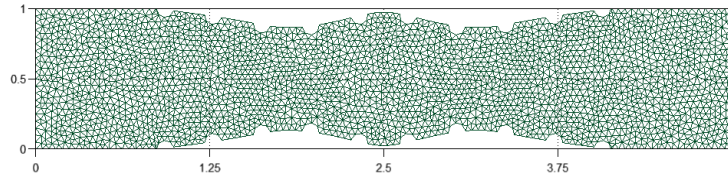
### 7.3.10 Geometria 10: duas restrições de 25% e *stents* circulares

A geometria 10 traz dois ateromas em sequência que representam uma restrição de 25 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária, onde o arranjo representa uma aproximação simplificada do cenário real. Além disso, a seção transversal do *stent* é circular, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.34a. Enquanto isso, a figura 7.34b traz a malha gerada a partir da geometria 10, tendo ela 5294 elementos, 2793 nós e tempo de processamento de 21416 s para as 2000 iterações.

Os campos de concentração e velocidade horizontal conforme a evolução temporal são apresentados, respectivamente, nas figuras 7.35 e 7.36.



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.34: Geometria 10.

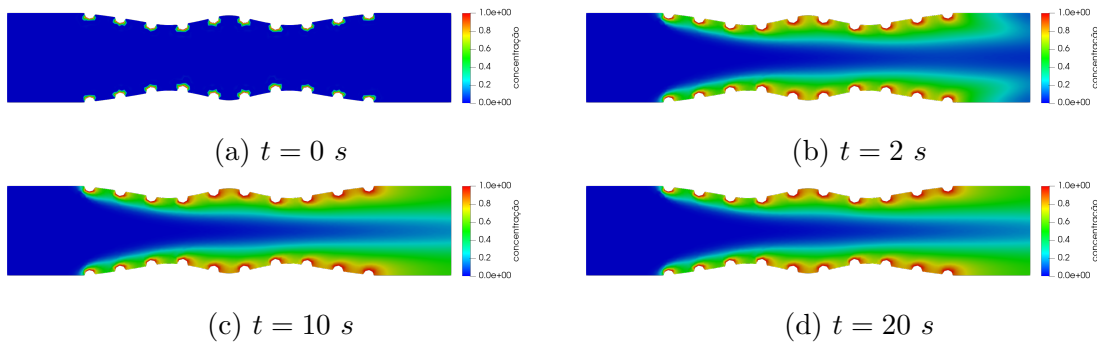


Figura 7.35: Campo de concentração para a geometria 10.

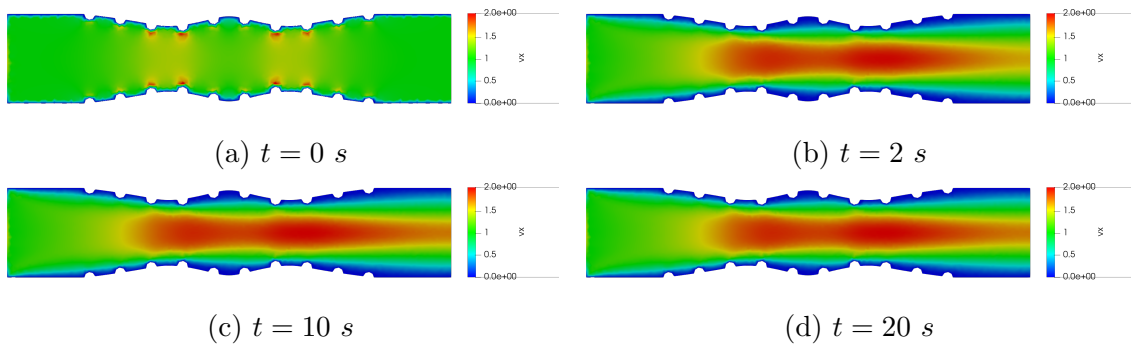


Figura 7.36: Campo de velocidade horizontal para a geometria 10.

### 7.3.11 Geometria 11: duas restrições de 50% e *stents* circulares

A geometria 11 traz dois ateromas em sequência que representam uma restrição de 50 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária, onde o arranjo representa

uma aproximação simplificada do cenário real. Além disso, a seção transversal do *stent* é circular, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.37a. Enquanto isso, a figura 7.37b traz a malha gerada a partir da geometria 11, tendo ela 4796 elementos, 2552 nós e tempo de processamento de 15489 s para as 2000 iterações.

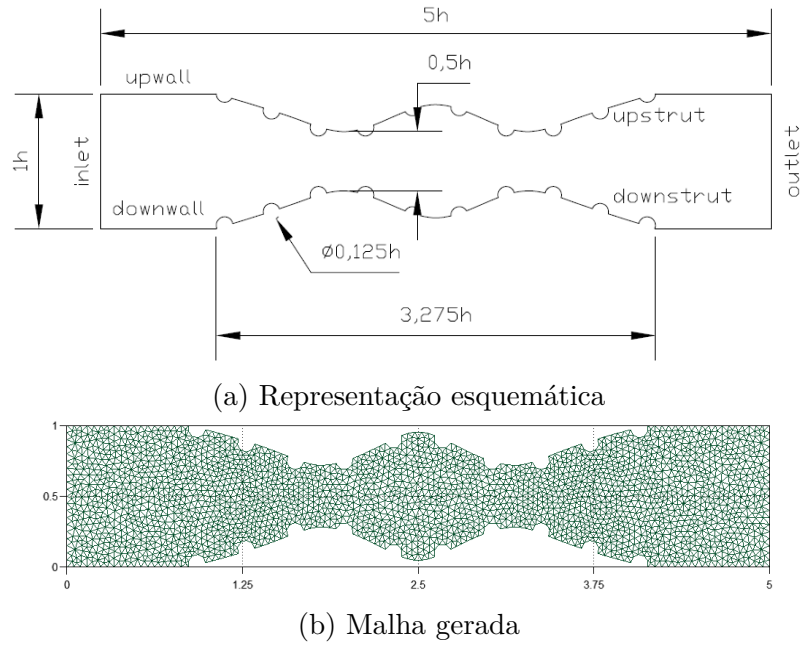


Figura 7.37: Geometria 11.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

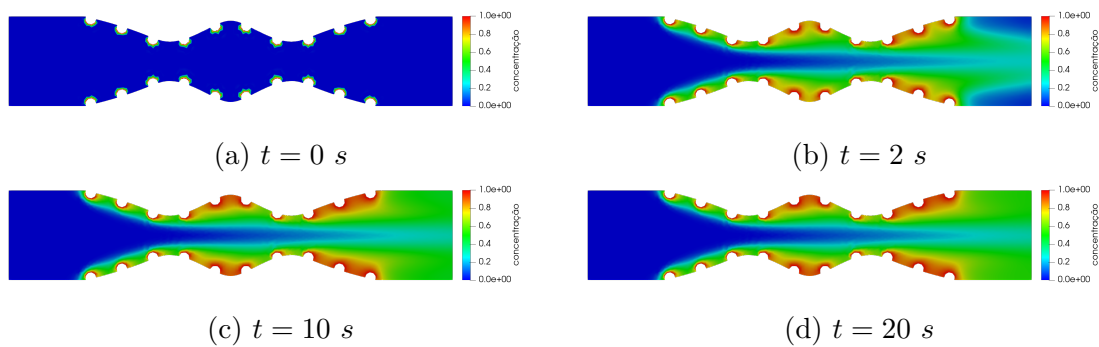


Figura 7.38: Campo de concentração para a geometria 11.

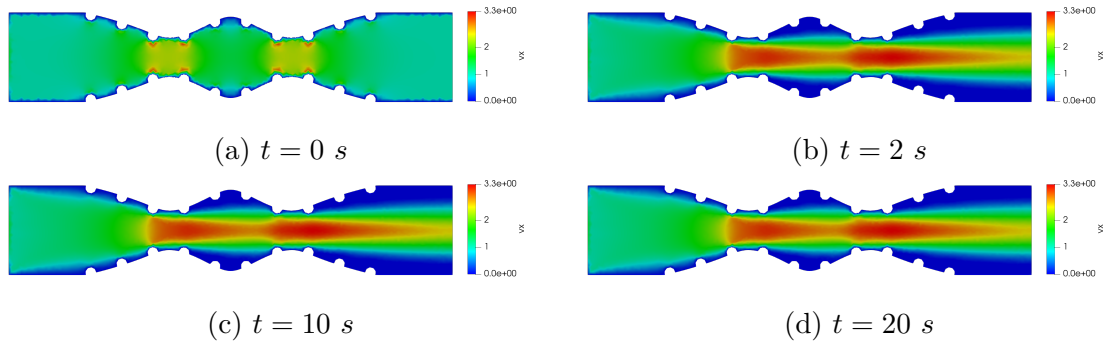
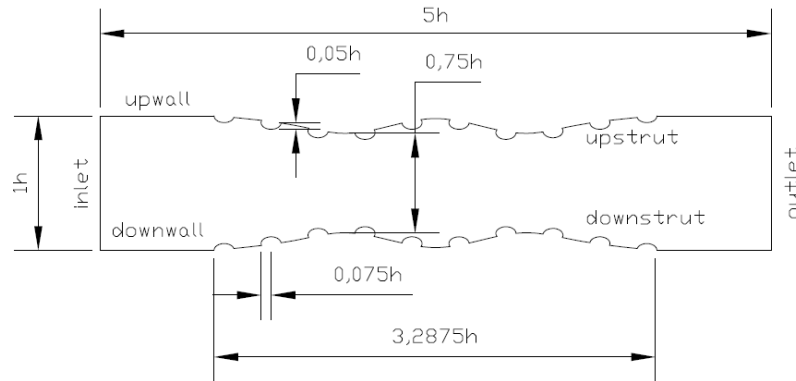


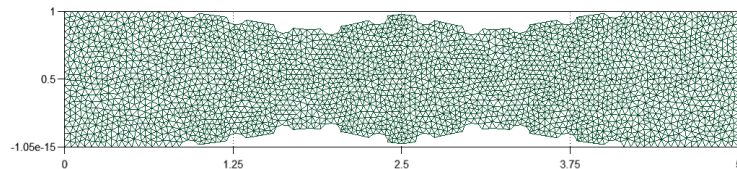
Figura 7.39: Campo de velocidade horizontal para a geometria 11.

### 7.3.12 Geometria 12: duas restrições de 25% e *stents* elípticos (raio menor)

A geometria 12 traz dois ateromas em sequência que representam uma restrição de 25 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária, onde o arranjo representa uma aproximação simplificada do cenário real. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio menor perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.40a. Enquanto isso, a figura 7.40b traz a malha gerada a partir da geometria 12, tendo ela 5282 elementos, 2783 nós e tempo de processamento de 20502 s para as 2000 iterações.



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.40: Geometria 12.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

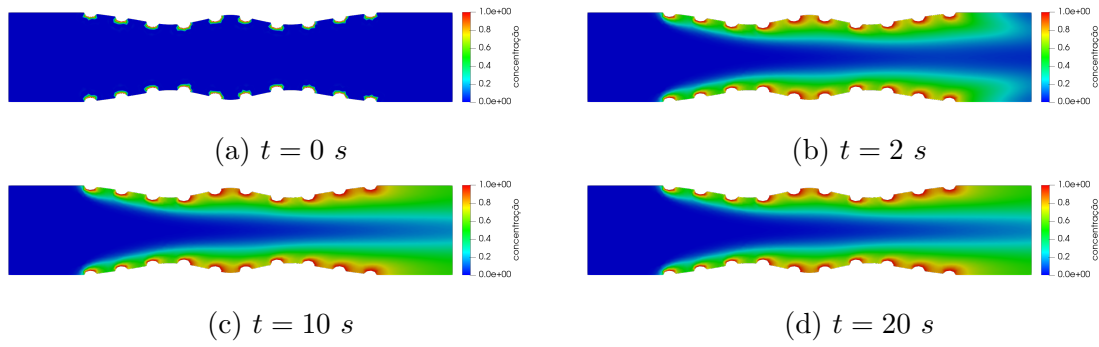


Figura 7.41: Campo de concentração para a geometria 12.

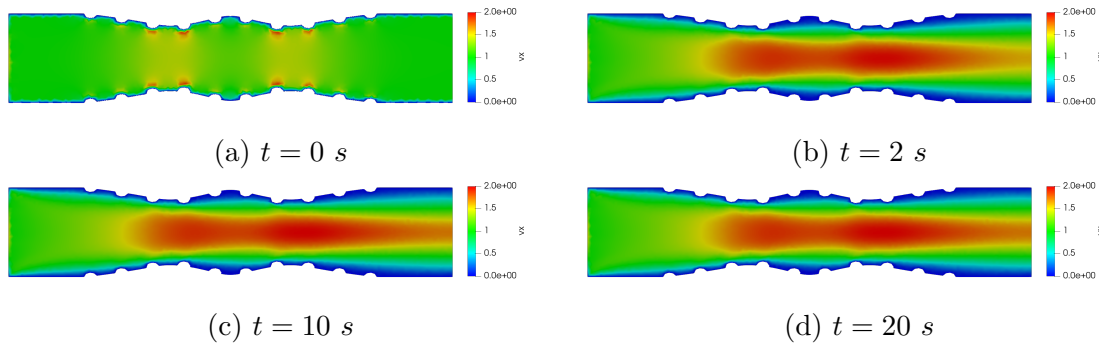
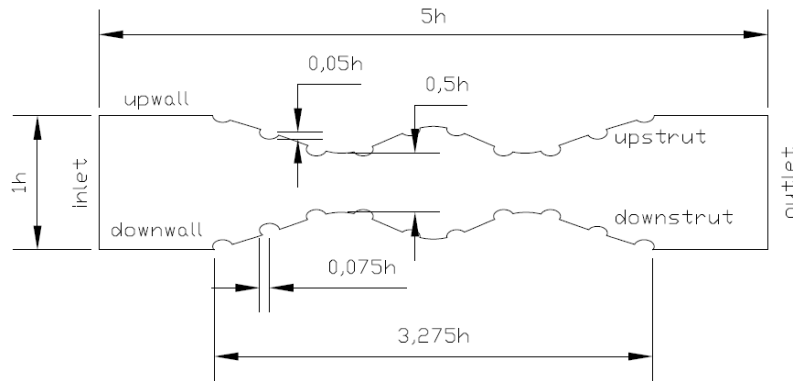
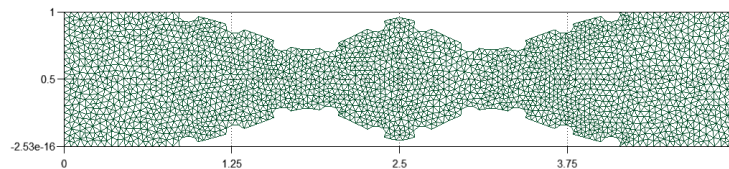


Figura 7.42: Campo de velocidade horizontal para a geometria 12.

### 7.3.13 Geometria 13: duas restrições de 50% e *stents* elípticos (raio menor)



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.43: Geometria 13.

A geometria 13 traz dois ateromas em sequência que representam uma restrição

de 50 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária, onde o arranjo representa uma aproximação simplificada do cenário real. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio menor perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.43a. Enquanto isso, a figura 7.43b traz a malha gerada a partir da geometria 13, tendo ela 4818 elementos, 2556 nós e tempo de processamento de 15397 s para as 2000 iterações.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

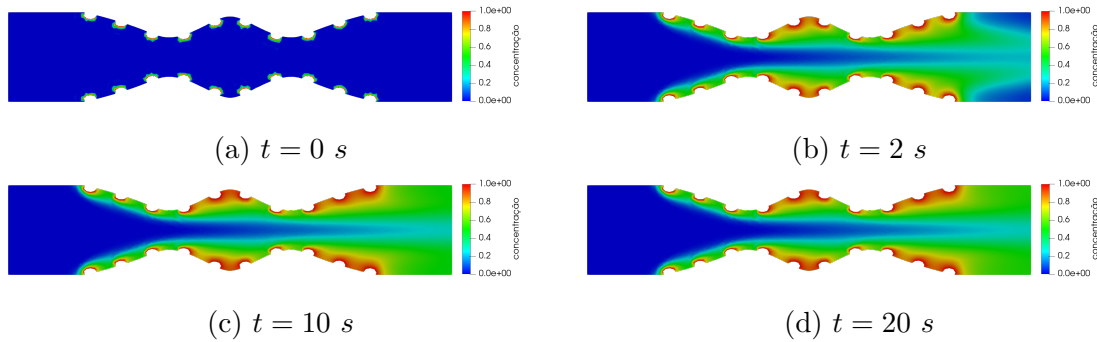


Figura 7.44: Campo de concentração para a geometria 13.

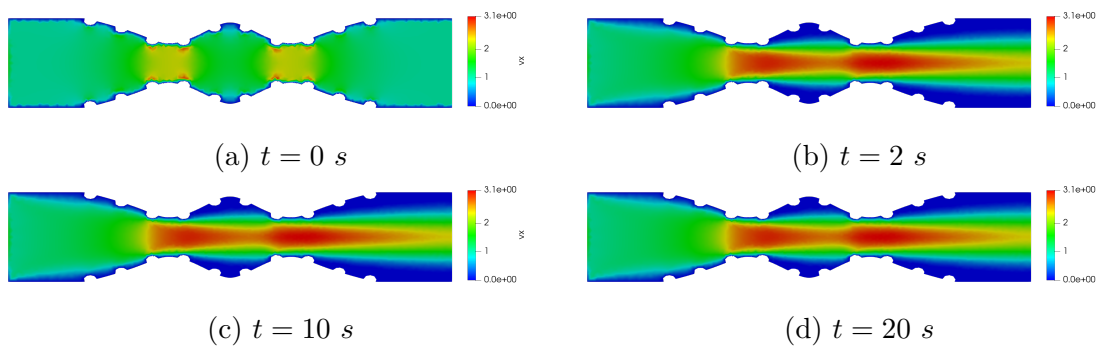
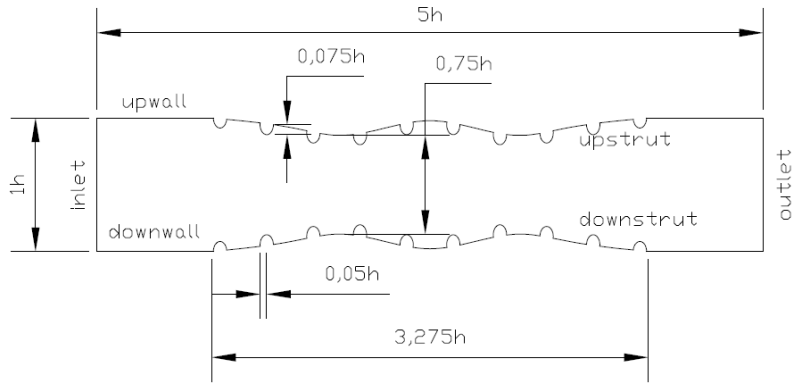


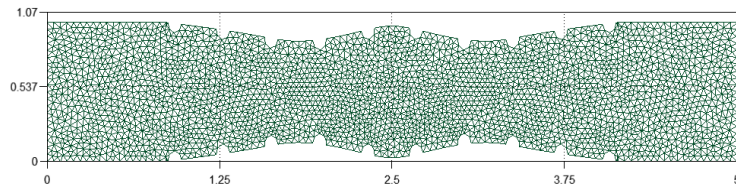
Figura 7.45: Campo de velocidade horizontal para a geometria 13.

### 7.3.14 Geometria 14: duas restrições de 25% e *stents* elípticos (raio maior)

A geometria 14 traz dois ateromas em sequência que representam uma restrição de 25 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária, onde o arranjo representa uma aproximação simplificada do cenário real. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio maior perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.46a. Enquanto isso, a figura 7.46b traz a malha gerada a partir da geometria 14, tendo ela 5840 elementos, 3069 nós e tempo de processamento de 25506 s para as 2000 iterações.



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.46: Geometria 14.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

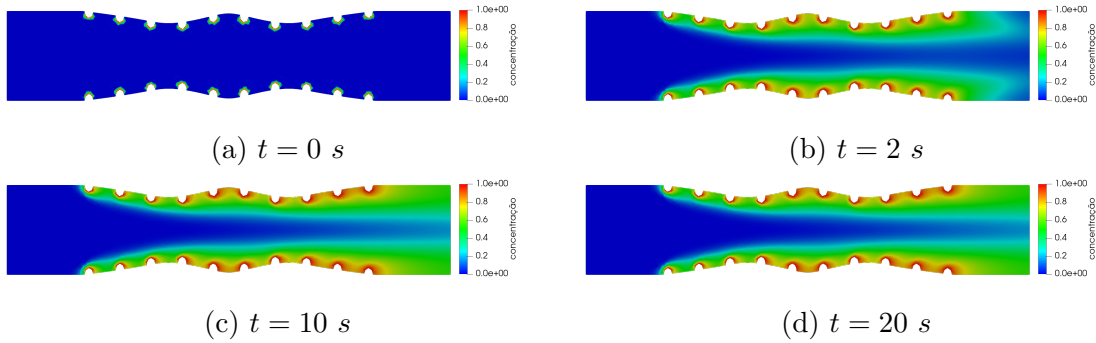


Figura 7.47: Campo de concentração para a geometria 14.

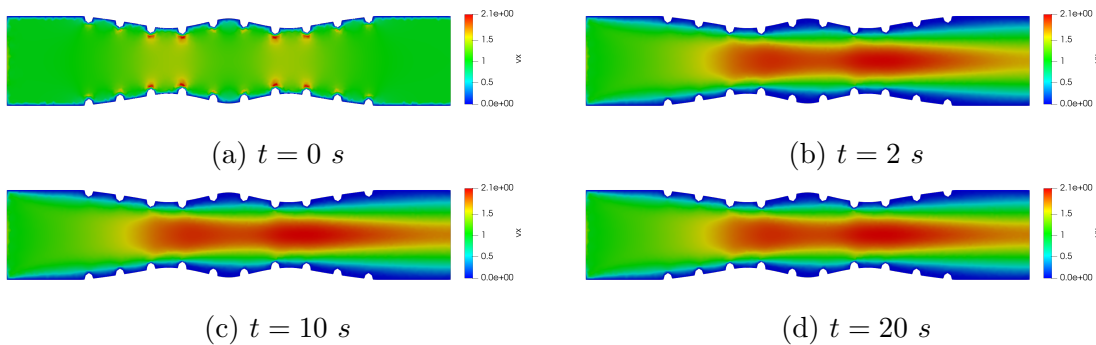
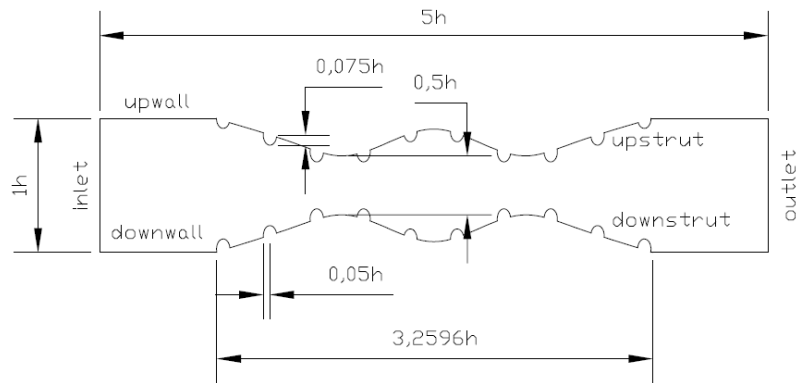


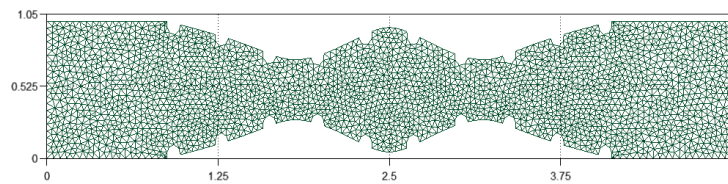
Figura 7.48: Campo de velocidade horizontal para a geometria 14.

### 7.3.15 Geometria 15: duas restrições de 50% e *stents* elípticos (raio maior)

A geometria 15 traz dois ateromas em sequência que representam uma restrição de 50 % ao fluxo sanguíneo dentro da artéria coronária, onde o arranjo representa uma aproximação simplificada do cenário real. Além disso, a seção transversal do *stent* é elíptica e com o raio maior perpendicular ao fluxo, sendo as dimensões conforme indicado na figura 7.46a. Enquanto isso, a figura 7.46b traz a malha gerada a partir da geometria 14, tendo ela 5162 elementos, 2742 nós e tempo de processamento de 19481 s para as 2000 iterações.



(a) Representação esquemática



(b) Malha gerada

Figura 7.49: Geometria 15.

A seguir, são apresentados os campos de velocidade horizontal e concentração conforme a evolução temporal.

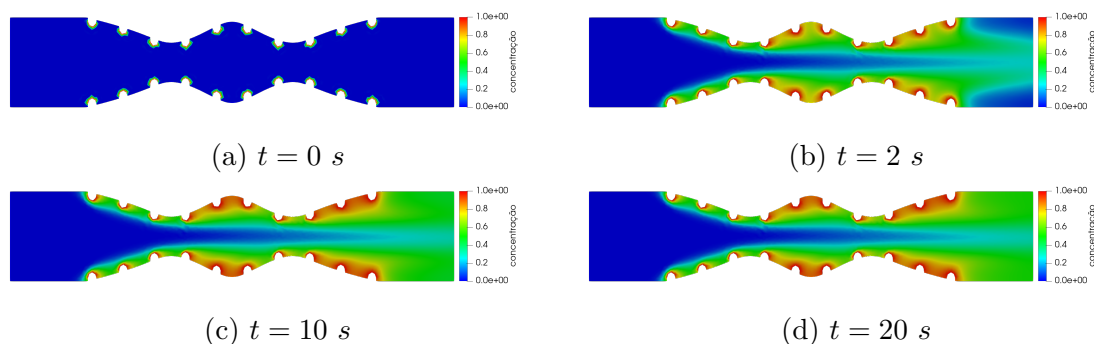


Figura 7.50: Campo de concentração para a geometria 15.

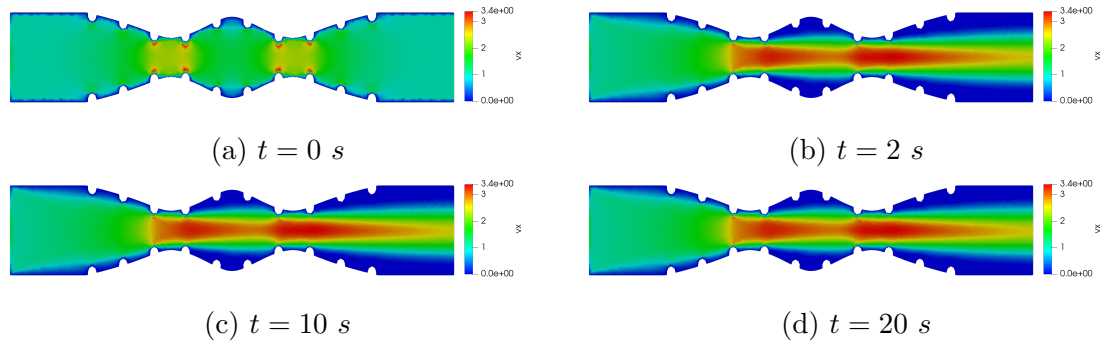
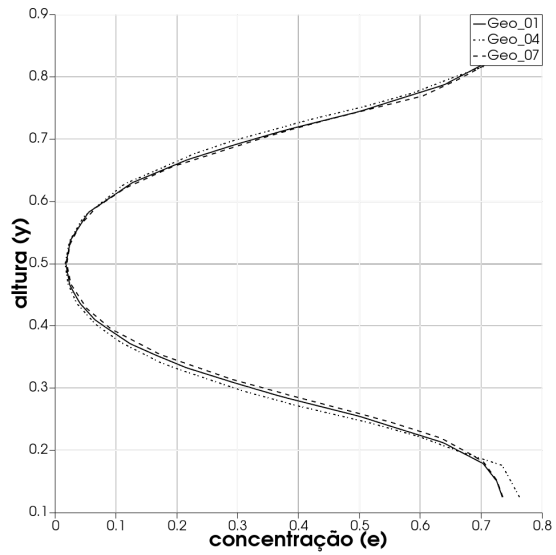


Figura 7.51: Campo de velocidade horizontal para a geometria 15.

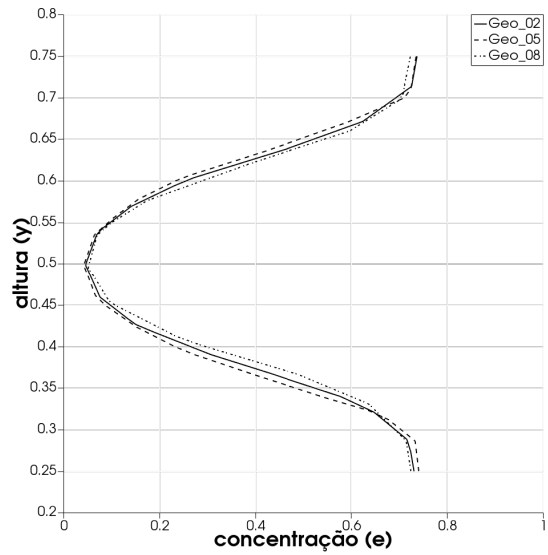
## 7.4 Comparação de resultados

A partir dos resultados obtidos para cada geometria, foram realizadas as comparações entre os perfis de velocidade no meio do canal, em  $x = 2,5h$ . Foram comparados os valores de acordo com a geometria dos *stents* para os mesmos perfis de restrição de fluxo.

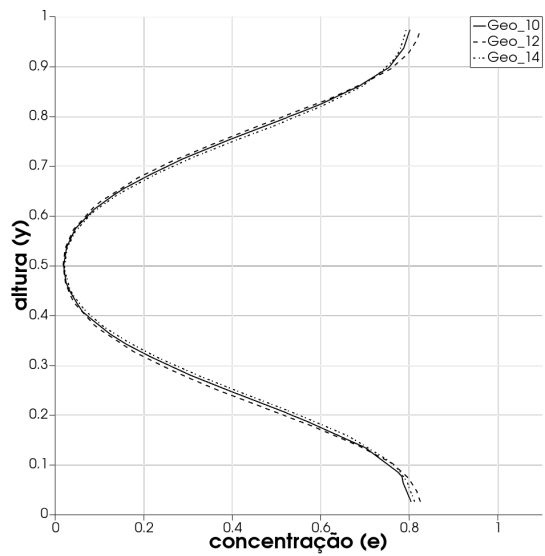
A figura 7.52 apresenta os perfis obtidos para a concentração da droga liberada na artéria coronária em razão da altura da mesma. Apesar das diferenças geométricas no perfil transversal do *stent*, as variações não foram suficientes para causar alterações significativas nos resultados obtidos. No entanto, ao analisar os perfis de velocidade horizontal, a diferença se torna mais perceptível conforme a visualização se aproxima da linha de centro do canal, como pode ser visto na figura 7.53.



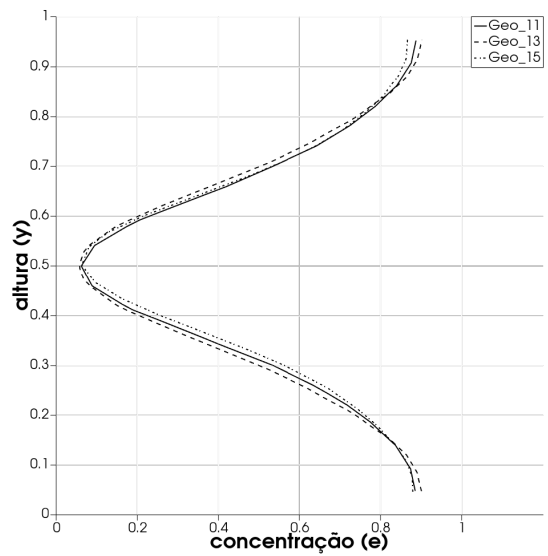
(a) Restrição de 25%



(b) Restrição de 50%

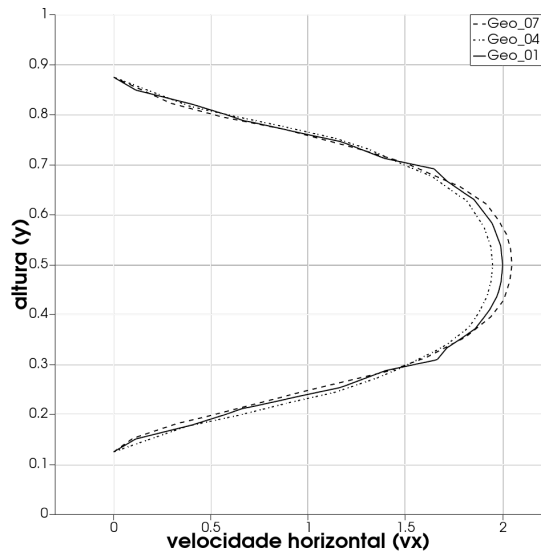


(c) Restrições de 25%

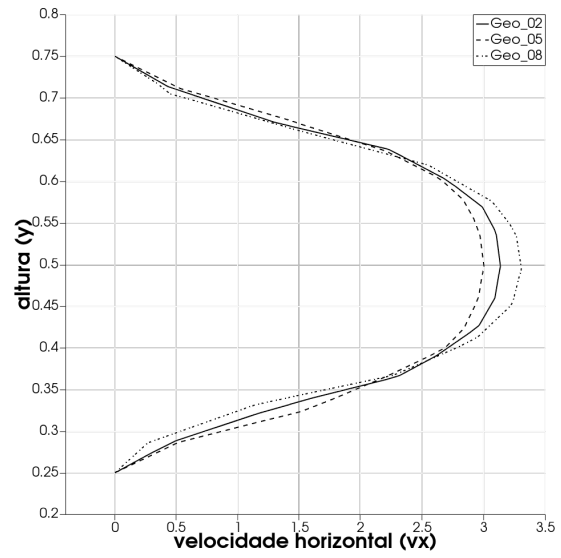


(d) Restrições de 50%

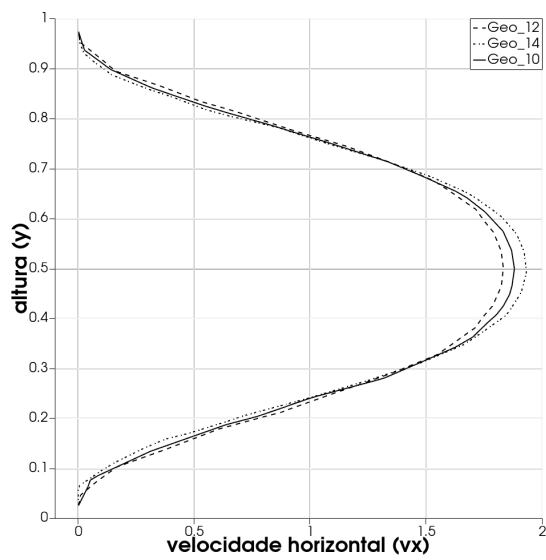
Figura 7.52: Comparações dos perfis de concentração.



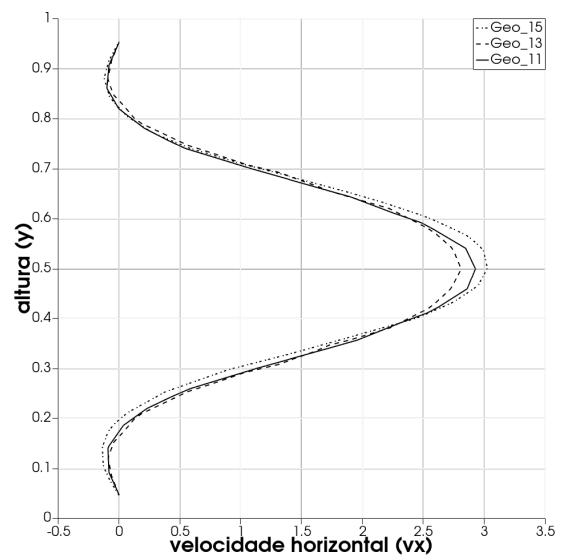
(a) Restrição de 25%



(b) Restrição de 50%



(c) Restrições de 25%



(d) Restrições de 50%

Figura 7.53: Comparações dos perfis de velocidade horizontal.

# Capítulo 8

## Conclusão

Neste trabalho, utilizou-se o Método de Elementos Finitos para realizar os cálculos da equação de Navier-Stokes, a qual foi escrita através da formulação corrente-vorticidade, junto com a equação de transporte da espécie química. As equações foram discretizadas através do esquema de Taylor-Galerkin e utilizando elementos triangulares lineares para a implementação do código, uma vez que é empregada a formulação corrente-vorticidade e a mesma permite desacoplar velocidade e pressão, assim como reescrever as equações em função de variáveis escalares.

Para as validações realizadas, o código numérico apresentou resultados satisfatórios em todos os casos apresentados. No escoamento de *Hagen-Poiseuille*, foi verificado o comportamento do perfil da velocidade horizontal, conforme as condições de contorno impostas. No trabalho de MARCHI *et al.* [7], comparou-se os perfis de velocidade horizontal e vertical encontrados com os obtidos pelos autores. Também foi verificado o escoamento em degrau, o qual permitiu analisar a influência da variação abrupta da seção no escoamento dentro de um canal, em comparação aos trabalhos de THOMAS *et al.* [8]. Por fim, foi analisada a interação entre a equação de Navier-Stokes com a equação de difusão da espécie química, tendo como referência a publicação de MARQUES e ANJOS [9].

Este trabalho tinha por objetivo avaliar o comportamento da difusão de espécie química, juntamente com o escoamento do fluido, para diferentes restrições de fluxo e três configurações para geometria do *stent*. De forma geral, é possível perceber que, para as restrições de 25 % e 50 %, a concentração da droga é maior nas proximidades das paredes da artéria, enquanto reduz ao se aproximar do centro do canal. O cenário inverso ocorre na velocidade horizontal.

Também é possível verificar que as configurações geométricas testadas não alteraram de forma significativa os campos gerados.

Por fim, as geometrias com restrições de 75 % apresentaram instabilidade numérica ao utilizar as condições de contorno definidas inicialmente. Esse fato pode ter ocorrido em razão da alta velocidade existente na região central, ocasionando

em um número de Reynolds alto, o qual gera instabilidade numérica em razão do método empregado. Em razão das limitações computacionais existentes, não foi possível realizar um refino maior da malha e nem reduzir o  $\Delta t$ , dado que os custos computacionais se tornam muito elevados.

Sendo assim, as sugestões para trabalhos futuros são:

- Explorar as geometrias dos casos com alta restrição de fluxo para avaliar se a Formulação de Taylor-Galerkin ainda é aplicável ou se é necessário implementar outros esquemas que reduzam as oscilações espúrias;
- Realizar validações com números de Schmidt mais próximos aos valores reais de difusão de substâncias químicas;
- Analisar o problema através de fluido multifásico;
- Verificar a aplicação do problema em geometrias mais realistas, buscando variar as restrição ao fluxo.

# Referências Bibliográficas

- [1] OMS. “Cardiovascular diseases”. Disponível em: <https://www.who.int/health-topics/cardiovascular-diseases>. Acesso em: 27/06/2021.
- [2] OMS. “The top 10 causes of death”. Disponível em: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/the-top-10-causes-of-death>. Acesso em: 27/06/2021.
- [3] MARQUES, L. *Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em Artéria Coronária*. Monografia, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.
- [4] AMARAL, T. *Análise CFD de Difusão da Espécie Química para Diferentes Geometrias de Stent Farmacológico*. Monografia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.
- [5] DONEA, J. “A TaylorGalerkin method for convective transport problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, n. 1, pp. 101–119, 1984.
- [6] ZIENKIEWICZ, O., TAYLOR, R. *The Finite Element Method - volume 3: Fluid Dynamics*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [7] MARCHI, C. H., SUERO, R., ARAKI, L. K. “The Lid-Drive Square Cavity Flow: Numerical Solution with a 1024 x 1024 Grid”, *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, v. 31, n. 3, pp. 186–198, 2009.
- [8] THOMAS, C., MORGAN, K., TAYLOR, C. “A finite element analysis of flow over a backward facing step”, *Computers Fluids*, v. 9, n. 3, pp. 265–278, 1981.
- [9] MARQUES, L., ANJOS, G. R. D. “Numerical Study of Bloodstream Diffusion of the New Generation of Drug-Eluting Stents in Coronary Arteries”, *Fluids*, v. 6, 2021.
- [10] DOTTER, C. T., JUDKINS, M. P. “Transluminal Treatment of Arteriosclerotic Obstruction”, *Circulation*, v. 30, n. 5, pp. 654–670, 1964.

- [11] GRÜNTZIG, A. R., SENNING, ., SIEGENTHALER, W. E. “Nonoperative Dilatation of Coronary-Artery Stenosis”, *New England Journal of Medicine*, v. 301, n. 2, pp. 61–68, 1979.
- [12] SBC. “Análise do Impacto Clínico e Custo-Efetividade da Medida do FFR em Comparação com a Angiografia em Pacientes Multiarteriais Submetidos à ICP”. Disponível em: <http://publicacoes.cardiol.br/portal/abc/portugues/2019/v11201/analise-do-impacto-clinico-e-custo-efetividade-da-medida-do-ffr-em-comparacao-com-a-angiografia-em-pacientes-multiarteriais.asp>. Acesso em: 04/07/2021.
- [13] SIGWART, U., PUEL, J., MIRKOVITCH, V., et al. “Intravascular Stents to Prevent Occlusion and Re-Stenosis after Transluminal Angioplasty”, *New England Journal of Medicine*, v. 316, n. 12, pp. 701–706, 1987.
- [14] SERRUYS, P. W., DE JAEGERE, P., KIEMENEIJ, F., et al. “A Comparison of Balloon-Expandable-Stent Implantation with Balloon Angioplasty in Patients with Coronary Artery Disease”, *New England Journal of Medicine*, v. 331, n. 8, pp. 489–495, 1994.
- [15] SOUSA, J. E., COSTA, M. A., ABIZAID, A., et al. “Lack of Neointimal Proliferation After Implantation of Sirolimus-Coated Stents in Human Coronary Arteries”, *Circulation*, v. 103, n. 2, pp. 192–195, 2001.
- [16] SAÚDE, R. “Cardiologia Intervencionista Uso de Stent Coronariano Bioabsorvível”. Disponível em: <https://rsaude.com.br/cuiaba/materia/cardiologia-intervencionista-uso-de-stent-coronariano-bioabsorvivel/8122>. Acesso em: 04/07/2021.
- [17] MOSES, J. W., LEON, M. B., POPMA, J. J., et al. “Sirolimus-Eluting Stents versus Standard Stents in Patients with Stenosis in a Native Coronary Artery”, *New England Journal of Medicine*, v. 349, n. 14, pp. 1315–1323, 2003.
- [18] HWANG, C.-W., WU, D., EDELMAN, E. R. “Physiological Transport Forces Govern Drug Distribution for Stent-Based Delivery”, *Circulation*, v. 104, n. 5, pp. 600–605, 2001.
- [19] BOZSAK, F., CHOMAZ, J.-M., BARAKAT, A. I. “Modeling the transport of drugs eluted from stents: physical phenomena driving drug distribution in the arterial wall”, *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, v. 13, n. 2, pp. 327347, 2014.

- [20] LUCENA, R., MANGIAVACCHI, N., PONTES, J., et al. “Modeling the transport of drugs eluted from stents: physical phenomena driving drug distribution in the arterial wall”, *24<sup>th</sup> ABCM International Congress of Mechanical Engineering*, 2017.
- [21] WANG, H., MCGINTY, S., LUCENA, R., et al. “Dynamics of blood flow in coronary artery”, *24<sup>th</sup> ABCM International Congress of Mechanical Engineering*, 2017.
- [22] COURANT, R. “Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 49, n. 1, pp. 1 – 23, 1943.
- [23] CLOUGH, R. *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*. Pittsburgh, American Society of Civil Engineers, 1960.
- [24] CHRISTIE, I., GRIFFITHS, D. F., MITCHELL, A. R., et al. “Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, n. 6, pp. 1389–1396, 1976.
- [25] HEINRICH, J., HUYAKORN, P., ZIENKIEWICZ, O., et al. “An ‘upwind’ finite element scheme for two-dimensional convective transport equation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, n. 1, pp. 131–143, jan. 1977.
- [26] BROOKS, A. N., HUGHES, T. J. “Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1, pp. 199–259, 1982.
- [27] PIRONNEAU, O. “On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations”, *Numer. Math.*, v. 38, n. 3, pp. 309–332, 1982.
- [28] LÖHNER, R., MORGAN, K., ZIENKIEWICZ, O. C. “The solution of nonlinear hyperbolic equation systems by the finite element method”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 4, n. 11, pp. 1043–1063, 1984.
- [29] PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia. Volume 1: Fundamentos*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2013.

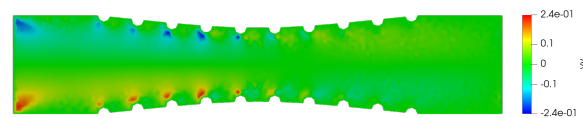
- [30] FOX, R., MCDONALD, A., PRITCHARD, P. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. São Paulo, LTC, 2014.
- [31] LEWIS, R. W., NITHIARASU, P., SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. Nova Jersey, John Wiley Sons Ltd, 2004.
- [32] ANJOS, G. R. D. *Hydrodynamics Field Solution Of Electrochemical Cells Through Finite Element Method*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.
- [33] BRENNER, S., SCOTT, L. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Nova Iorque, Springer, 2008.
- [34] FINLAYSON, B. A. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Nova Iorque, Academic Press, 1972.
- [35] BREZZI, F. “On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers”, *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, v. 8, n. R2, pp. 129–151, 1974.
- [36] BABUŠKA, I. “Error-Bounds for Finite Element Method”, *Numer. Math.*, v. 16, n. 4, pp. 322–333, 1971.
- [37] SANTOS, F. O. D. *Simulação Numérica de escoamentos de Fluidos Utilizando Diferenças Finitas Generalizadas*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.
- [38] ATKINS, D. J., MASKELL, S. J., PATRICK, M. A. “Numerical Prediction of Separated Flows”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, n. 1, pp. 129–144, 1980.
- [39] GMSH. “Reference Manual”. Disponível em: <https://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.pdf>. Acesso em: 06/05/2021.
- [40] KESSLER, W., MOSHAGE, W., GALLAND, A., et al. “Assessment of coronary blood flow in humans using phase difference MR imaging. Comparison with intracoronary Doppler flow measurement”, *International journal of cardiac imaging*, v. 14, n. 3, pp. 17986; discussion 1879, 1998.

# Apêndice A

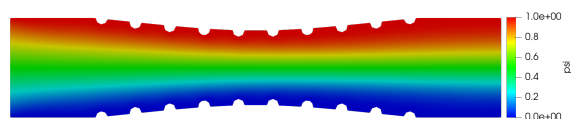
## Resultados complementares

Neste apêndice são apresentados os demais resultados permanentes obtidos para cada geometria, os quais não foram apresentados no Capítulo 7 deste trabalho. Sendo assim, é possível visualizar os resultados para o campo de velocidade vertical, da função corrente e da vorticidade para cada geometria testada.

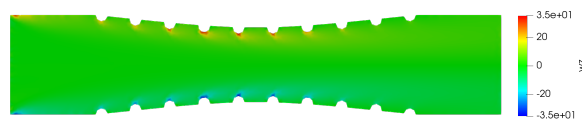
### A.1 Geometria 1: restrição de 25% e *stents* circulares



(a) velocidade vertical



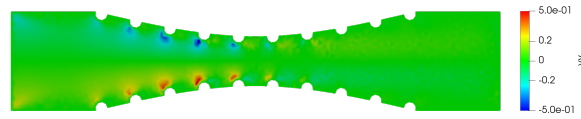
(b) função corrente



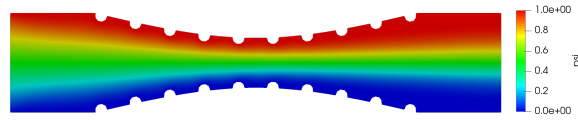
(c) vorticidade

Figura A.1: Resultados para a geometria 01.

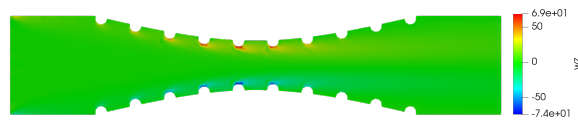
## A.2 Geometria 2: restrição de 50% e *stents* circulares



(a) velocidade vertical



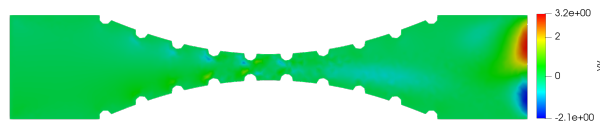
(b) função corrente



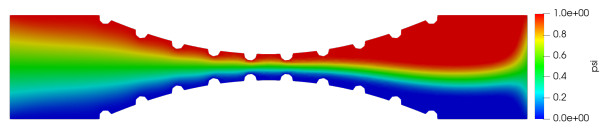
(c) vorticidade

Figura A.2: Resultados para a geometria 02.

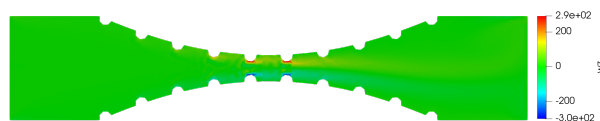
## A.3 Geometria 3: restrição de 75% e *stents* circulares



(a) velocidade vertical



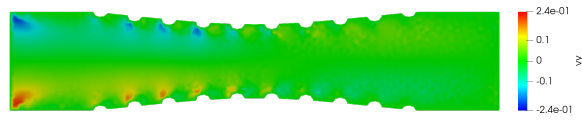
(b) função corrente



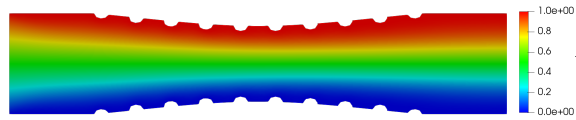
(c) vorticidade

Figura A.3: Resultados para a geometria 03 após ajuste das condições de contorno.

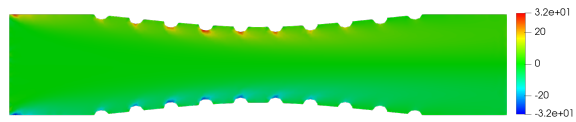
#### A.4 Geometria 4: restrição de 25% e *stents* elípticos (raio menor)



(a) velocidade vertical



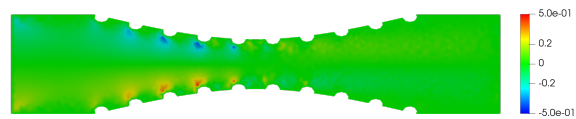
(b) função corrente



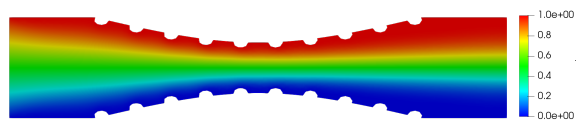
(c) vorticidade

Figura A.4: Resultados para a geometria 04.

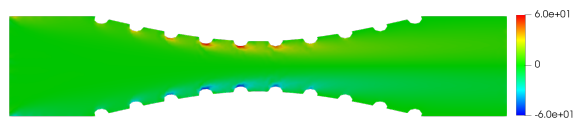
#### A.5 Geometria 5: restrição de 50% e *stents* elípticos (raio menor)



(a) velocidade vertical



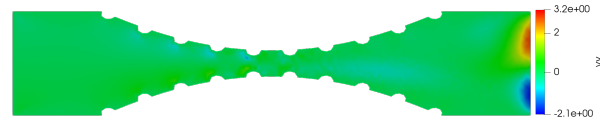
(b) função corrente



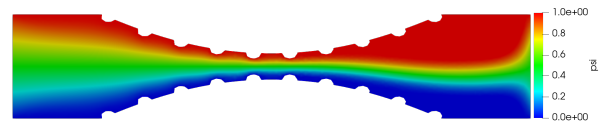
(c) vorticidade

Figura A.5: Resultados para a geometria 05.

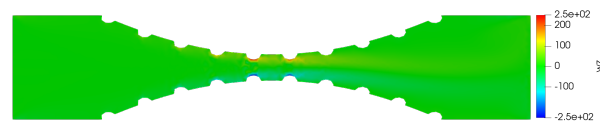
## A.6 Geometria 6: restrição de 75% e *stents* elípticos (raio menor)



(a) velocidade vertical



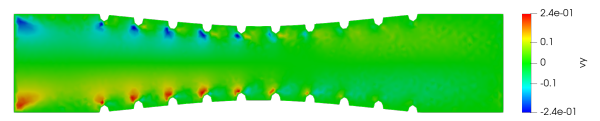
(b) função corrente



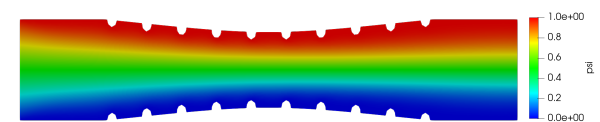
(c) vorticidade

Figura A.6: Resultados para a geometria 06 após ajuste das condições de contorno.

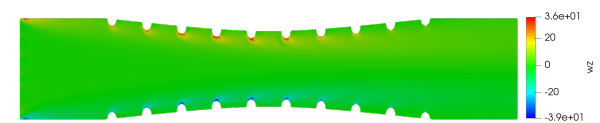
## A.7 Geometria 7: restrição de 25% e *stents* elípticos (raio maior)



(a) velocidade vertical



(b) função corrente



(c) vorticidade

Figura A.7: Resultados para a geometria 07.

## A.8 Geometria 8: restrição de 50% e *stents* elípticos (raio maior)

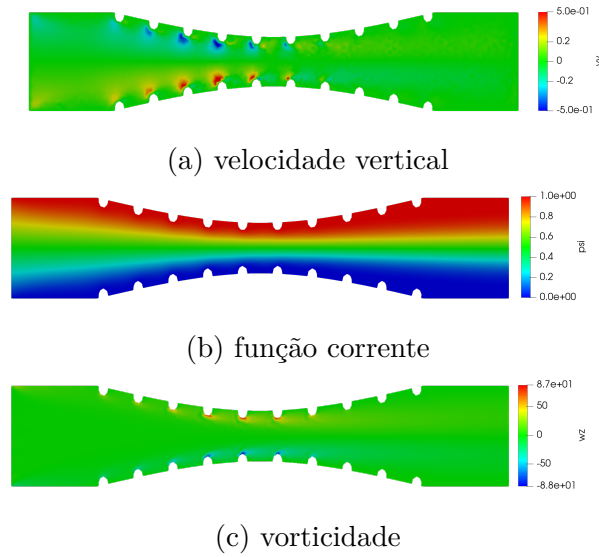


Figura A.8: Resultados para a geometria 08.

## A.9 Geometria 9: restrição de 75% e *stents* elípticos (raio maior)

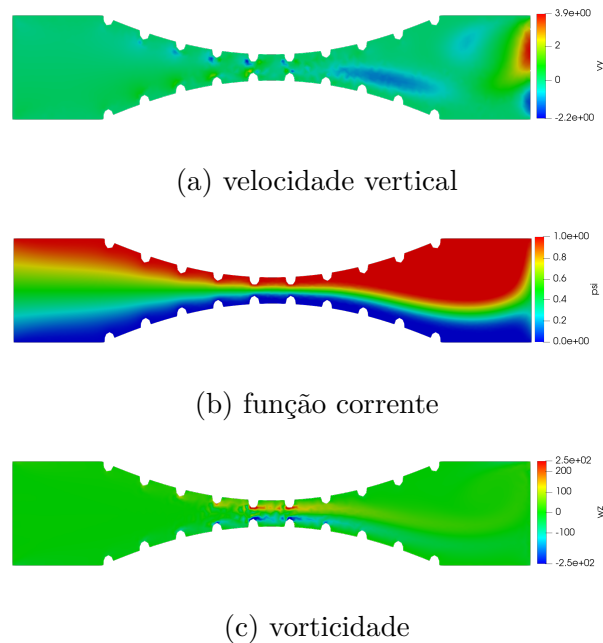
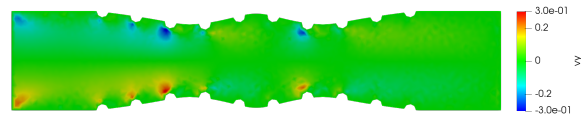
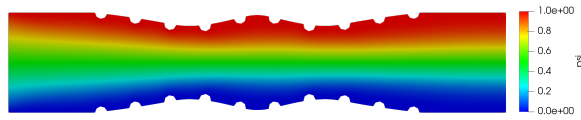


Figura A.9: Resultados para a geometria 09 após ajuste das condições de contorno.

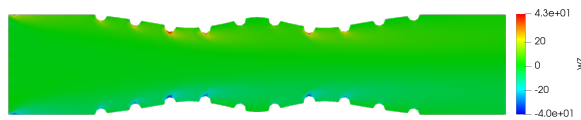
## A.10 Geometria 10: duas restrições de 25% e *stents* circulares



(a) velocidade vertical



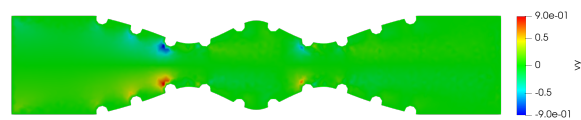
(b) função corrente



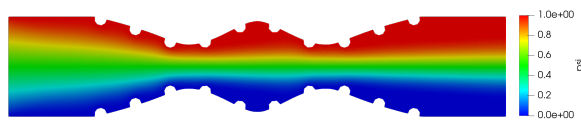
(c) vorticidade

Figura A.10: Resultados para a geometria 10.

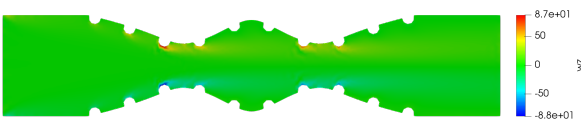
## A.11 Geometria 11: duas restrições de 50% e *stents* circulares



(a) velocidade vertical



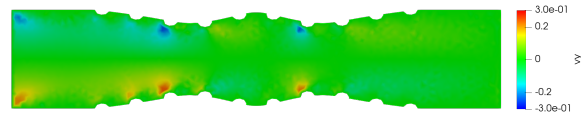
(b) função corrente



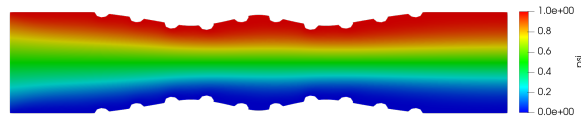
(c) vorticidade

Figura A.11: Resultados para a geometria 11.

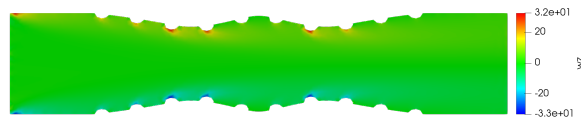
## A.12 Geometria 12: duas restrições de 25% e *stents* elípticos (raio menor)



(a) velocidade vertical



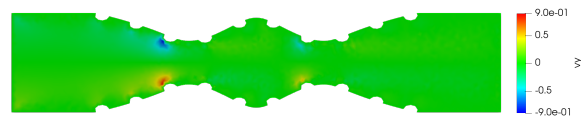
(b) função corrente



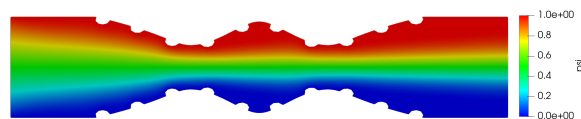
(c) vorticidade

Figura A.12: Resultados para a geometria 12.

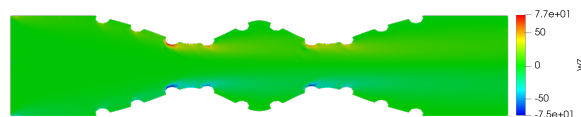
## A.13 Geometria 13: duas restrições de 50% e *stents* elípticos (raio menor)



(a) velocidade vertical



(b) função corrente



(c) vorticidade

Figura A.13: Resultados para a geometria 13.

### A.14 Geometria 14: duas restrições de 25% e *stents* elípticos (raio maior)

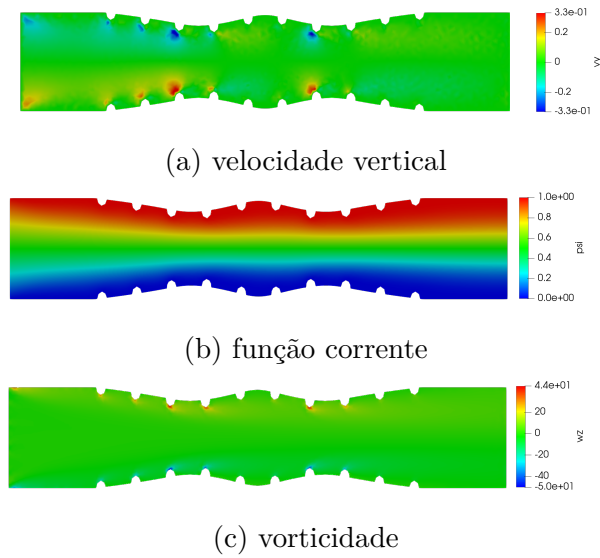


Figura A.14: Resultados para a geometria 14.

### A.15 Geometria 15: duas restrições de 50% e *stents* elípticos (raio maior)

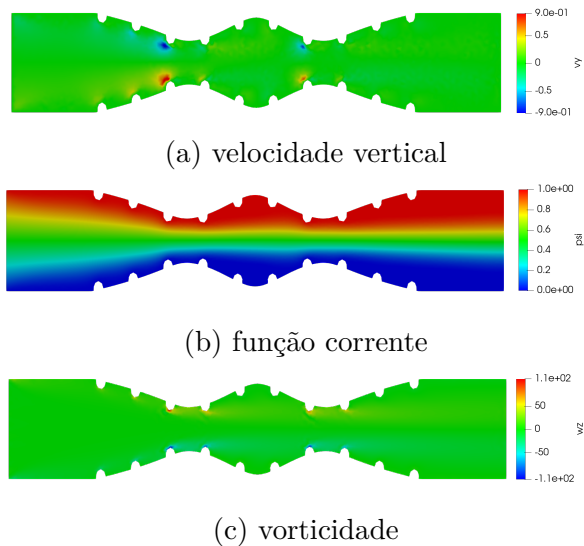


Figura A.15: Resultados para a geometria 15.