



Universidade Federal
do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

APLICAÇÃO DA DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL NA AVALIAÇÃO
DO DESLOCAMENTO DE GOTÍCULAS NO CONTEXTO DA PANDEMIA DE
COVID-19

Vitor Tavares Fontenele

Projeto de Graduação, apresentado ao curso
de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica,
Universidade Federal do Rio de Janeiro, como
parte dos requisitos necessários à obtenção
do título de Engenheiro Mecânico

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos


Rio de Janeiro
Julho de 2021

APLICAÇÃO DA DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL NA AVALIAÇÃO
DO DESLOCAMENTO DE GOTÍCULAS NO CONTEXTO DA PANDEMIA DE
COVID-19

Vitor Tavares Fontenele

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Examinado por:



Gustavo Rabello dos Anjos, Ph.D.



Fernando Pereira Duda, D. Sc.



Antonio MacDowell de Figueiredo, Dr. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
JULHO DE 2021

Fontenele, Vitor Tavares

Aplicação da Dinâmica de Fluidos Computacional na avaliação do deslocamento de gotículas no contexto da pandemia de COVID-19/Vitor Tavares Fontenele - Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2021.

XIV, 115 p.: il.; 29,7cm

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação - UFRJ/ Escola Politécnica/
Curso de Engenharia Mecânica, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 67-69

1. Formulação Corrente-Vorticidade
2. Método de Elementos Finitos
3. Formulação de Taylor-Galerkin
4. COVID-19. Rabello, Gustavo dos Anjos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Engenharia Mecânica. III. Aplicação da Dinâmica de Fluidos Computacional na avaliação do deslocamento de gotículas no contexto da pandemia de COVID-19.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais, José e Márcia, que me deram o apoio necessário em tudo o que precisei para chegar até aqui. Também agradeço à minha irmã, Vivian, por sua cumplicidade e amizade.

Agradeço a todos os meus amigos; sejam aqueles que conheci na Universidade, como Gabriel Oliveira, que se tornou um irmão para a vida; sejam os meus amigos de longa data que têm me apoiado fora da Universidade há tempos.

Agradeço ao meu orientador Gustavo Rabello dos Anjos, por sua prestreza e disposição em ajudar os seus alunos, além de sua excelente didática.

Agradeço a todo contribuinte brasileiro que torna a existência da Universidade Federal do Rio de Janeiro possível. Agradeço a todos aqueles que ajudaram na construção das Universidades públicas brasileiras. Todas essas pessoas colaboraram para o sonho de um Brasil mais desenvolvido e mais justo.

Agradeço especialmente ao secretário do curso de Engenharia Mecânica, Tito Lívio, por sempre ajudar os alunos em tudo que lhe é possível e por ter me ajudado diversas vezes quando precisei ao longo da minha formação.

Também não posso deixar de agradecer ao meu supervisor de estágio na Eletrobras Eletronuclear, Allan Domingos de Andrade, por ter ajudado no meu desenvolvimento pessoal e acreditado nas minhas capacidades. Agradeço também a todo o corpo de excelentes servidores da empresa que me ajudaram a ser um profissional melhor.

Por último, agradeço a todos aqueles que contribuíram para a minha jornada de alguma forma e aqui não foram mencionados. Sejam os funcionários terceirizados da Universidade, professores cujos nomes não foram citados ou mesmo aqueles que construíram todo o arcabouço científico que torna esse trabalho possível.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

APLICAÇÃO DA DINÂMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL NA AVALIAÇÃO DO DESLOCAMENTO DE GOTÍCULAS NO CONTEXTO DA PANDEMIA DE COVID-19

Vitor Tavares Fontenele

Julho/2021

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Curso: Engenharia Mecânica

A pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2, da doença conhecida como COVID-19, trouxe um desafio para países de todos os continentes, afetando a qualidade de vida das populações humanas em uma escala global. Desde o momento em que o vírus foi detectado pela primeira vez, surgiram questionamentos a respeito de quais seriam as melhores maneiras de prevenir a disseminação do vírus e, conseqüentemente, diminuir o crescimento do número de infectados.

Assim, conforme o vírus se espalhou ao ponto de a Organização Mundial da Saúde reconhecer que se estava diante de uma pandemia, medidas voltadas para o isolamento e distanciamento social foram adotadas ou recomendadas pelos governos de diversas nações, bem como, por exemplo, a ampla utilização de máscaras.

Focado na questão do distanciamento social, este trabalho pretende, através do uso de técnicas de Dinâmica de Fluidos Computacional, avaliar como se dá o movimento de partículas contendo o vírus. Através de simulações computacionais, é possível responder a diferentes questionamentos e entender como se comportam as variáveis relacionadas ao movimento dessas partículas, o que é de suma importância para se estabelecer medidas eficazes de distanciamento.

Palavras-chave: Sars-CoV-2, COVID-19, Pandemia, CFD, Elementos Finitos.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

APPLICATION OF COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS IN THE EVALUATION OF MOTION OF DROPLETS IN THE CONTEXT OF THE COVID-19 PANDEMIC

Vitor Tavares Fontenele

July/2021

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos
Graduation: Mechanical Engineering

The pandemic caused by the Sars-Cov-2 virus, of the disease known as COVID-19, brought a challenge to countries all over the world, harming the quality of life of human populations in a global scale. Since the first detection of the virus, questions about the best measures to prevent the virus spread were raised and, as a result, to reduce the growing number of infected people.

So, as the virus spread to the point that the World Health Organization recognized that the world was facing a pandemic scenario, measures related to social isolation and social distancing were adopted or recommended by the governments of many nations, as well as the wide using of face masks.

Focusing on the social distancing issue, the present work aims, through Computational Fluid Dynamics, to evaluate the motion of droplets that could potentially contain the virus. Through computational simulations, it's possible to answer to different questions and understand the behaviour of variables related to the motion of these particles, which is of great importance to choose efficient measures regarding social distancing.

Keywords: Sars-CoV-2, COVID-19, Pandemic, CFD, Finite Element.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Apresentação	1
1.2	Estrutura do trabalho	1
2	Revisão Bibliográfica	3
2.1	COVID-19	3
2.2	Método de Elementos Finitos	4
2.3	Movimento de uma gotícula	5
3	Metodologia	7
3.1	Formulação matemática	7
3.1.1	Princípio da Conservação de Massa	7
3.1.2	Aceleração de um elemento de fluido	8
3.1.3	Forças sobre um elemento de fluido	9
3.1.4	Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento	10
3.1.5	Equação de corrente-vorticidade	14
3.1.6	Formulação adimensional	16
3.1.7	Equação de movimento para a gotícula	17
3.2	Formulação numérica	19
3.2.1	Discretização do domínio e geração da malha	21
3.2.2	Elemento bidimensional triangular	22
3.2.3	Formulação forte e formulação fraca	24
3.2.4	Método de Galerkin	25
3.2.5	Aplicação sobre a Equação de Poisson para função corrente ϕ	27
3.2.6	Expansão da vorticidade em Série de Taylor para Taylor-Galerkin	28
3.2.7	Aplicação sobre a equação de transporte da vorticidade	31
3.2.8	Aplicação para obtenção da velocidade do escoamento	35
3.2.9	Montagem das matrizes	36
3.2.10	Discretização da equação de movimento da gotícula	39
4	Código	40
4.1	Importação da malha do Gmsh	40
4.2	Criação das matrizes globais	41
4.3	Imposição das condições de contorno	42
4.4	Algoritmo de resolução do problema	42
4.4.1	Avaliação do deslocamento da gotícula	43
4.4.2	Cálculo da condição de contorno de vorticidade	43
4.4.3	Solução da equação de transporte da vorticidade	43

4.4.4	Solução da equação para função corrente	44
4.4.5	Cálculo do campo de velocidades	44
4.4.6	Imposição das condições de contorno de velocidade	44
4.4.7	Solução da equação de movimento da gotícula	44
5	Validação do código	45
5.1	Escoamento de Poiseuille	45
5.2	Lid-Driven Cavity Flow	47
6	Resultados	49
6.1	Canal fechado, apenas rosto	50
6.1.1	Condições de contorno	50
6.1.2	Resultados obtidos [D=90e-06(m)]	52
6.1.3	Resultados obtidos [D=100e-06(m)]	53
6.1.4	Resultados obtidos [D=110e-06(m)]	53
6.2	Canal fechado, corpo	54
6.2.1	Condições de contorno	54
6.2.2	Resultados obtidos [D=90e-06(m)]	57
6.2.3	Resultados obtidos [D=100e-06(m)]	58
6.2.4	Resultados obtidos [D=110e-06(m)]	58
6.3	Canal fechado, corpo, pé direito de 2,5m	59
6.3.1	Condições de contorno	59
6.3.2	Resultados obtidos [D=90e-06(m)]	62
6.3.3	Resultados obtidos [D=100e-06(m)]	63
6.3.4	Resultados obtidos [D=110e-06(m)]	63
7	Conclusão	65
	Referências bibliográficas	67

Lista de figuras

1	Tensões em um elemento de fluido	9
2	Sequência de etapas do MEF	20
3	Exemplo de malha formada por elementos triangulares	21
4	Exemplo de malha de elementos triangulares feita no <i>Gmsh</i>	21
5	Elemento triangular	22
6	Malha do <i>Gmsh</i>	42
7	Condições de contorno de Poiseuille	46
8	Resultado obtido para o escoamento de Poiseuille comparado a resultados da literatura	46
9	Condições de contorno do Lid-Driven Cavity Flow	47
10	Resultado obtido para o Lid-Driven Cavity Flow comparado a resultados da literatura (x=0.5)	47
11	Resultado obtido para o Lid-Driven Cavity Flow comparado a resultados da literatura (y=0.5)	48
12	Condições de contorno - Geometria 1	50
13	Função corrente (após 0.1s) - Geometria 1	51
14	Componente u da velocidade (após 0.1s) - Geometria 1	51
15	Componente v da velocidade (após 0.1s) - Geometria 1	52
16	Vorticidade (após 0.1s) - Geometria 1	52
17	Trajetória da gotícula - Geometria 1 - 90 microns	52
18	Trajetória da gotícula - Geometria 1 - 100 microns	53
19	Trajetória da gotícula - Geometria 1 - 110 microns	53
20	Condições de contorno - Geometria 2	54
21	Função corrente (após 0.1s) - Geometria 2	55
22	Componente u da velocidade (após 0.1s) - Geometria 2	56
23	Componente v da velocidade (após 0.1s) - Geometria 2	56
24	Vorticidade (após 0.1s) - Geometria 2	57
25	Trajetória da gotícula - Geometria 2 - 90 microns	57
26	Trajetória da gotícula - Geometria 2 - 100 microns	58
27	Trajetória da gotícula - Geometria 2 - 110 microns	58
28	Condições de contorno - Geometria 3	59
29	Função corrente (após 0.1s) - Geometria 3	60
30	Componente u da velocidade (após 0.1s) - Geometria 3	61
31	Componente v da velocidade (após 0.1s) - Geometria 3	61
32	Vorticidade (após 0.1s) - Geometria 3	62
33	Trajetória da gotícula - Geometria 3 - 90 microns	62
34	Trajetória da gotícula - Geometria 3 - 100 microns	63

35	Trajectoria da gotícula - Geometria 3 - 110 microns	64
----	---	----

1 Introdução

1.1 Apresentação

A humanidade, em diferentes momentos de sua história, foi desafiada pelas mais variadas doenças infecto-contagiosas, causadas por diferentes agentes patogênicos. A Peste Bubônica, por exemplo, causada pela bactéria *Yersinia pestis*, trouxe um desafio em escala continental para a Europa no século XIV. Para citar um outro exemplo, dessa vez mais recente, no início do século XX, entre 1918 e 1920, países de diversos continentes tiveram de enfrentar a doença conhecida como Gripe Espanhola, causada por um subtipo do vírus *Influenza*. A pandemia de Gripe Espanhola matou dezenas de milhões de pessoas ao redor do mundo e trouxe prejuízos sociais e econômicos profundos.

Em dezembro de 2019, um paciente na cidade de Wuhan, na China, viria a apresentar sintomas de uma doença ainda desconhecida pelo mundo, que mais tarde seria identificada pelo nome de COVID-19. A doença, causada por um tipo de coronavírus, se espalharia para diversos países, o que levou a Organização Mundial da Saúde a decretar a situação como uma pandemia em março de 2020. Uma vez diante desse desafio, a comunidade científica estudava e apresentava formas de conter o avanço do vírus.

Uma das recomendações mais imediatas para conter o avanço do vírus foi a adoção de medidas de isolamento social e também de distanciamento social. O Sars-CoV-2, nome dado ao vírus, tem como um dos principais meios de transmissão gotículas expelidas pela boca ou pelo nariz. Essas gotículas podem, por exemplo, ser expelidas por meio de tosse ou espirro. Isso suscitou, portanto, a questão de qual seria a distância adequada para que o distanciamento social fosse realmente eficaz no combate à propagação da doença.

Assim, a Dinâmica de Fluidos Computacional, aliada ao Método de Elementos Finitos, é uma das ferramentas capazes de prover respostas sobre o movimento dessas gotículas sob diferentes condições. É possível avaliar parâmetros como a velocidade e a posição das gotículas ao longo do tempo. A formulação de corrente-vorticidade, que será usada nesse trabalho, uma vez explorada pelo Método de Elementos Finitos, permite que se escreva um código (nesse trabalho, em *Python*) para avaliar o movimento de uma gotícula nesse contexto.

1.2 Estrutura do trabalho

O presente trabalho possui 7 capítulos. O Capítulo 2 apresenta um breve histórico sobre pandemias que antecederam a pandemia de COVID-19, assim como traz relatos sobre doenças causadas por diferentes tipos de coronavírus e as suas características, incluindo a COVID-19. Também há a citação sobre trabalhos na literatura científica que estudaram o movimento de gotículas, incluindo no contexto da referida pandemia. O Capítulo 3 apresenta a formulação matemática que será utilizada para basear a posterior

formulação numérica do problema, sendo essa última a formulação utilizada para introduzir as condições de contorno adequadas e, posteriormente, obter resultados para avaliar o movimento das gotículas no presente estudo.

O Capítulo 4 explica em detalhes como se dará a construção do código em Python que será utilizado para a obtenção da solução numérica. O Capítulo 5 apresentará casos em que houve a aplicação do Método de Elementos Finitos baseado na mesma formulação matemática do presente estudo, porém em malhas e condições de contorno diferentes do problema aqui abordado. Isso será feito para que se tenha uma demonstração inicial de que, utilizando as rotinas aqui propostas em um problema de dinâmica dos fluidos, a solução numérica pode se aproximar razoavelmente da solução analítica.

O Capítulo 6 apresentará os resultados do trabalho para o presente problema de movimento da gotícula em diferentes cenários propostos. Finalmente, o Capítulo 7 trará as conclusões do trabalho e, por fim, após o último capítulo, encontram-se as referências bibliográficas que foram utilizadas ao longo do presente estudo.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 COVID-19

(WANG et al., 2020) afirma que, a partir de dezembro de 2019, começaram a surgir, na cidade de Wuhan, na província de Hubei (China), diversos casos de uma pneumonia cuja razão era, até então, desconhecida. Análises de amostras obtidas do trato respiratório de pacientes indicaram que o agente causador dos casos de pneumonia era um novo tipo de coronavírus, que ficou conhecido como novo coronavírus de 2019 (2019-nCoV).

O novo coronavírus de 2019, nomeado como 2019-nCov ou Sars-CoV-2, não foi o primeiro tipo de coronavírus a causar problemas para o ser humano. (WEISS, LEIBOWITZ, 2013) expõe que os coronavírus podem afetar tanto animais como humanos, possivelmente causando doenças hepáticas, respiratórias, gastrointestinais e neurológicas. Os coronavírus são divididos em quatro tipos: alfa-coronavírus, beta-coronavírus, gamma-coronavírus e delta-coronavírus (YANG, LEIBOWITZ, 2015).

Ao fazer uma retrospectiva histórica, vemos que, em novembro de 2002, na província de Guangdong, na China, houve o primeiro caso de uma doença que viria a se espalhar para 29 países, causando mais de 8000 casos e centenas de mortes (CHERRY, KROGSTAD, 2004). A doença viria a ser nomeada como Síndrome Respiratória Aguda Grave, popularmente conhecida como SARS. Ela foi causada por um coronavírus do tipo beta-coronavírus nomeado como Sars-CoV (ZAKI et. al, 2012).

(ZAKI et. al, 2012) relatou o isolamento de um beta-coronavírus em junho de 2012, na Arábia Saudita. Esse vírus, assim como os outros coronavírus citados, também era desconhecido e veio a causar a chamada Síndrome Respiratória do Oriente Médio, popularmente conhecida como MERS.

O vírus Sars-CoV anteriormente citado era transmitido por gotículas e por contato, sendo assim, o uso de máscaras cirúrgicas ou do tipo N-95 diminuía drasticamente o risco de infecção (CHRISTIAN, 2004). (LEE, CHIEW et al., 2020) citou medidas utilizadas no combate à SARS adotadas em diferentes países, como isolamento de pacientes infectados, quarentena de pessoas que tiveram contato com pacientes infectados e, por último, medidas de contenção aplicadas à comunidade, como evitar reuniões públicas e aumentar o distanciamento social.

O Sars-CoV-2 (ou 2019-nCov), assim como o Sars-CoV, também é transmitido por contato ou por meio de gotículas, expelidas, por exemplo, quando um paciente tosse ou espirra. Assim sendo, medidas preventivas de isolamento e lockdown são altamente recomendáveis (REZAEI et al., 2020). É por isso, portanto, que estabelecer critérios para o distanciamento social é tão importante.

2.2 Método de Elementos Finitos

A história do Método de Elementos Finitos é a história pela busca de um método que, em última análise, visava à resolução de equações físico-matemáticas através da discretização de um determinado domínio em pequenas regiões (como triângulos, quadriláteros ou tetraedros, por exemplo). Naturalmente, conforme essas pequenas porções do domínio ficam cada vez menores, mais a solução do problema, seja ele qual for, se aproxima da solução analítica (MEEK, 1996).

Um dos grandes desafios ao resolver problemas físico-matemáticos, antes do século XX, era lidar com equações diferenciais parciais. Um dos principais questionamentos era como encontrar soluções aproximadas para essas equações. Walter Ritz (1878-1909) foi quem deu os primeiros passos na direção de prover uma resposta para esse problema, seguido pelo matemático soviético Boris Galerkin. O trabalho de Galerkin foi motivado, principalmente, pela análise de construções mecânicas (REPIN, 2017). (GALERKIN, 1915) apresentou ao mundo, pela primeira vez, a formulação matemática do chamado Método de Galerkin, utilizado, naquela ocasião, para solucionar uma equação bi-harmônica. O Método de Galerkin viria a ser utilizado amplamente após a sua criação.

Mais à frente, (COURANT, 1942) desenvolveu a ideia de usar aproximações lineares em pequenas partes do domínio de um problema, atribuindo valores a pontos discretizados que eram, em essência, os nós de uma malha. O objetivo era resolver o problema de torção de Saint-Venant em uma caixa quadrada vazia, utilizando uma função ϕ cujo valor era nulo no contorno externo e não-nulo em qualquer ponto do contorno interno.

(ARGYRIS, 1954) teve um significado notório na história da mecânica estrutural, explorando os conceitos de flexibilidade e rigidez e colaborando para lançar as bases para o uso de elementos finitos na resolução de problemas de mecânica estrutural. (CLOUGH, 1989) relata como, pela primeira vez, a terminologia "Método de Elementos Finitos" foi utilizada, em estudos sobre a dinâmica de asas de aeronaves. O primeiro livro a popularizar o Método de Elementos Finitos foi (ZIENKIEWICZ, 1965) e continha aproximadamente 270 páginas, conforme contado por (MEEK, 1996).

Como se vê, em seu início, a maior parte do desenvolvimento do Método de Elementos Finitos era voltado para a resolução de problemas de mecânica. No entanto, a sua utilização é ampla, sendo utilizado, no presente trabalho, para resolver um problema de escoamento de fluidos. A demora em se utilizar o Método de Elementos Finitos se deve a oscilações espúrias ocasionadas por um termo convectivo superior a um termo difusivo.

(CHRISTIE et al., 1976) desenvolve, então, a formulação Petrov-Galerkin, introduzindo funções de base linear e quadrática assimétricas para estabilizar as oscilações em um problema de dois pontos de contorno. Esse método se mostrou adequado para resolver problemas unidimensionais; no entanto, para problemas de duas dimensões ou mais, a formulação Petrov-Galerkin não se mostrou satisfatória.

Mais tarde, (HUGHES et al., 1982) surge o método popularmente conhecido como SPUG ou *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*, com o preceito de usar funções de peso adicionando perturbações na mesma direção das linhas de corrente. No entanto, sua aplicação foi feita visando a escoamentos estacionários e, assim, sua aplicação para escoamentos não-estacionários não era trivial.

(DONEA, 1984) apresentou a formulação de Taylor-Galerkin, que também não se restringe a apenas uma dimensão. Para obter derivadas temporais acuradas (reduzir as oscilações), esse método utiliza a expansão em Série de Taylor incluindo termos de alta ordem, com diferença adiantada. Posteriormente, essa discretização temporal é utilizada juntamente a uma discretização espacial pelo Método de Galerkin.

No presente trabalho, a formulação de Taylor-Galerkin será utilizada devido a algumas de suas vantagens. Primeiramente, ela serve satisfatoriamente para descrever escoamentos em mais de uma dimensão, diferentemente da formulação de Petrov-Galerkin. Além disso, ela é de fácil implementação computacional, uma vez que as matrizes globais de massa, rigidez e gradiente, conforme será visto mais à frente, são de fácil construção, uma vez que são matrizes simétricas.

2.3 Movimento de uma gotícula

É possível encontrar na literatura trabalhos sobre o movimento de gotículas utilizando o Método de Elementos Finitos, especialmente sobre o movimento de gotículas sobre superfícies. A modelagem dinâmica de uma gotícula atende a diferentes áreas, como torres de resfriamento e impressão a jato de tinta (MAHROUS et al., 2020). (LUO et al., 2017) investiga, por exemplo, o espalhamento de uma gotícula sobre uma superfície rígida, utilizando malhas de Método de Elementos Finitos não estruturadas para descrever a geometria complexa de superfícies sólidas.

Trabalhos que investigam o movimento de gotículas no contexto da pandemia de COVID-19 são encontrados com frequência na literatura científica desde o início da referida pandemia. Como detalha (BAVI et al., 2020), o tempo de vida de gotículas em ambientes fechados depende de fatores como o tamanho das gotículas e também da temperatura do ambiente (embora o presente trabalho não avalie a variabilidade desse último fator).

(CHENG et al., 2020) avalia o movimento de gotículas grandes em ambientes fechados, assim como o presente trabalho, destacando que a resistência do ar é o fator mais importante a afetar o movimento de uma gotícula - sendo o movimento do ar analisado pelo Método de Elementos Finitos no atual estudo - e destacando que o movimento de uma gotícula tem alcance superior a 1,0m em situações de espirro em ambientes fechados (situação a ser investigada no presente trabalho).

Assim, é possível encontrar diferentes trabalhos na literatura que buscam avaliar o

movimento de uma gotícula - sendo que, aqueles voltados para o contexto da pandemia de COVID-19, tendem a avaliar fatores como temperatura do ambiente, tipo de ambiente (fechado ou ao ar livre) e diâmetro da gotícula, dentre potencialmente outros, para caracterizar o seu movimento.

3 Metodologia

3.1 Formulação matemática

3.1.1 Princípio da Conservação de Massa

(VERSTEEG et al., 2007) introduz uma análise diferencial para avaliar o Princípio da Conservação de Massa, isto é, tomando como base um elemento infinitesimal do fluido. De maneira básica, a formulação do Princípio da Conservação de Massa, para um elemento do fluido, é dada como:

Taxa de incremento de massa em um elemento do fluido	=	Taxa líquida de fluxo mássico em um elemento do fluido
--	---	--

A taxa de incremento de massa em um elemento do fluido é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (1)$$

Para a taxa líquida de fluxo mássico em um elemento do fluido, precisamos saber quanto de fluxo mássico atravessa cada face do elemento do fluido. O fluxo mássico que atravessa cada face do elemento do fluido é dado pelo produto da densidade, área e componente normal da velocidade relativo àquela face. Essa soma resulta em:

$$\dot{m} = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2)$$

Uma vez equacionados o lado esquerdo e o lado direito da equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Ou, escrevendo a mesma equação de outra forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (4)$$

(ÇENGEL et al., 2006) estabelece o Princípio da Conservação de Massa (ou Equação de Continuidade) de um fluido através de uma equação que é compatível com a apresentada acima, porém em sua forma integral:

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (5)$$

3.1.2 Aceleração de um elemento de fluido

Ao avaliarmos física e matematicamente as equações que regem o escoamento de um fluido, é comum utilizarmos o conceito de elemento do fluido, isto é, é de praxe olhar para um elemento infinitesimal do fluido. Vamos avaliar, então, a aceleração de um elemento do fluido.

Conforme nos mostra (FOX et al., 2010), a translação de uma partícula ou elemento de fluido está obviamente conectada com o campo de velocidades $\vec{V}(x, y, z, t)$. Logo, é tentador imaginar que, para obter a aceleração de uma partícula fluida, basta simplesmente obtermos a derivada $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$. No entanto, isso não está correto, uma vez que \vec{V} descreve o campo de velocidades para o escoamento como um todo e não para uma partícula especificamente.

Mas então, uma vez que se tenha o campo de velocidades $\vec{V}(x, y, z, t)$, como chegar à aceleração de uma partícula fluida qualquer? Para tanto, consideremos uma partícula fluida, que se encontra nas coordenadas (x, y, z) no instante t . A velocidade dessa partícula será dada por:

$$[\vec{V}_p]_t = \vec{V}(x, y, z, t) \quad (6)$$

Em $t + dt$, a partícula foi deslocada para uma posição $x + dx$, $y + dy$ e $z + dz$, isto é:

$$[\vec{V}_p]_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) \quad (7)$$

Logo, a variação na velocidade da partícula, aqui expressa por $d\vec{V}_p$, é dada, pela regra da cadeia, por:

$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt \quad (8)$$

Logo, a aceleração total de uma partícula fluida é dada por:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (9)$$

Uma vez que:

$$\frac{dx_p}{dt} = u \quad (10)$$

$$\frac{dy_p}{dt} = v \quad (11)$$

$$\frac{dz_p}{dt} = w \quad (12)$$

Teremos que:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (13)$$

3.1.3 Forças sobre um elemento de fluido

Uma vez bem definida a aceleração para um elemento de fluido, vamos definir as forças que atuam sobre um elemento de fluido. Ambas as definições são importantes para a próxima sequência, em que será feito um balanço da quantidade de movimento.

As forças que atuam sobre um elemento de fluido podem ser classificadas tanto como forças de campo como forças de superfície, sendo as forças de superfície tanto aquelas forças dito normais como as forças tangenciais ou de cisalhamento (FOX et al., 2010).

Assim, seja um elemento infinitesimal de fluido de massa dm e volume $dV = dxdydz$. Forças de superfície na direção x são correspondentes a tensões também na direção x (o mesmo valerá para as componentes y e z). As tensões para cada face do elemento são dadas conforme mostra a imagem abaixo:

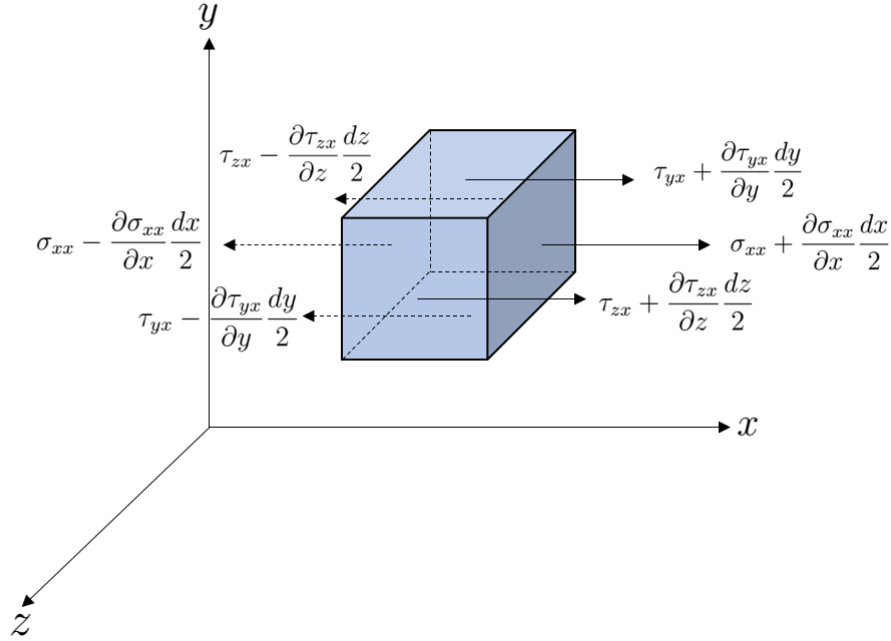


Fig. 1: Tensões em um elemento de fluido

Para obter a força de superfície resultante na direção x , chamada aqui de $dF_{s,x}$, somamos as contribuições das forças nessa direção. Isso nos dará:

$$\begin{aligned}
 dF_{s,x} = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \\
 & \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \\
 & \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy
 \end{aligned} \tag{14}$$

Simplificando:

$$dF_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (15)$$

Sendo a gravidade a única força de campo atuante, temos que:

$$dF_x = dF_{c,x} + dF_{s,x} = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (16)$$

Repetindo o mesmo procedimento para dF_y e dF_z :

$$dF_y = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (17)$$

$$dF_z = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (18)$$

3.1.4 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

A Segunda Lei de Newton para um sistema, conforme nos mostra (FOX et al., 2010), é dada por:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (19)$$

Logo, avaliando-se um elemento infinitesimal de massa dm , temos:

$$d\vec{F} = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (20)$$

Inserindo a expressão para a aceleração de um elemento do fluido em um campo de velocidade \vec{V} , temos:

$$d\vec{F} = dm \frac{D\vec{V}}{Dt} = dm \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] \quad (21)$$

Assim, precisamos de uma formulação para a força infinitesimal $d\vec{F}$ atuando sobre o fluido. A força resultante em cada direção é dada por:

$$dF_x = \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (22)$$

$$dF_y = \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (23)$$

$$dF_z = \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (24)$$

Logo, substituindo essas equações na equação para quantidade de movimento do elemento infinitesimal do fluido, teremos a equação de quantidade de movimento para um

elemento fluido de massa dm , em cada uma das componentes x, y e z:

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (25)$$

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (26)$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (27)$$

(BIRD, 2002) nos dá uma forma interessante de visualizar o cálculo das tensões no elemento do fluido. Define-se o parâmetro π_{ij} (fluxo de momento da direção j na direção i ou força na direção j sobre uma área unitária perpendicular à direção i). Aqui, faremos uma adequação à convenção de sinais utilizada por (FOX et al., 2010), de modo a definir π_{ij} como:

$$\pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (28)$$

Na expressão acima, para o caso tridimensional, i e j variam como x, y e z e o fator δ_{ij} vale 0 caso $i = j$ e vale 1 caso $i \neq j$. Agora, vamos nos ater às tensões π_{ij} para todo $i \neq j$, correspondentes às chamadas tensões cisalhantes; isto é, $\pi_{ij} = \tau_{xy}, \tau_{yz}$ e assim por diante.

Em primeiro lugar, elas podem ser combinações lineares de todos os gradientes de velocidade. Em segundo lugar, derivadas ou integrais em relação ao tempo não são esperadas, a menos que o fluido seja tratado como viscoelástico. Em terceiro lugar, não se espera a presença de forças viscosas uma vez que o fluido esteja em estado de rotação pura. Essa última exigência leva à conclusão de que as tensões cisalhantes sejam uma combinação linear simétrica de gradientes de velocidade.

Se o fluido é isotrópico, feitas as considerações acima, pode ser demonstrado que as tensões cisalhantes serão dadas por:

$$\tau_{ij} = A \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \beta_i} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \beta_j} \right) + B \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \delta_{ij} \quad (29)$$

Observe que $\alpha_1 = u$, $\alpha_2 = v$ e $\alpha_3 = w$. Por sua vez, $\beta_1 = x$, $\beta_2 = y$ e $\beta_3 = z$. Como para as tensões cisalhantes teremos sempre $i \neq j$, resulta que a segunda parcela da equação acima será sempre nula para essas tensões. (BIRD, 2002) explica, por simplicidade, como o coeficiente $A = -\mu$, porém, para nos adequarmos à formulação de (FOX et al., 2010), utilizaremos $A = \mu$, de forma a obtermos:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (30)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (31)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (32)$$

Para $i = j$, estamos diante das chamadas tensões normais, representadas por (FOX et al., 2010) pela letra grega σ . O fator B é dado por:

$$B = -\frac{2}{3}\mu + K \quad (33)$$

O fator K é chamado de viscosidade dilatacional e é frequentemente tomado como nulo para gases (caso de nosso interesse). Sendo o multiplicador δ_{ij} não-nulo para as tensões normais, resulta que:

$$\pi_{xx} = \sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (34)$$

$$\pi_{yy} = \sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (35)$$

$$\pi_{zz} = \sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (36)$$

Todas essas tensões podem ser organizadas sob um tensor de tensões, que aqui será representado como σ :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Observe que, uma vez explícito o conceito de tensor de tensões, com todas as tensões bem definidas, podemos olhar para as equações de quantidade de movimento para uma massa infinitesimal dm de uma forma diferente, isto é:

$$\rho \vec{g} + \nabla \cdot \sigma = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \quad (38)$$

Sendo:

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} \quad (39)$$

É possível ainda decompor o tensor de tensões, isto é:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (40)$$

O que nos permite reescrever a equação 38 utilizando o símbolo τ para a primeira parcela da decomposição mostrada acima:

$$\rho\vec{g} + \nabla\tau - \nabla p = \rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho\vec{V} \cdot \nabla\vec{V} \quad (41)$$

Quando utilizada a relação exposta na equação 13, para ρ e μ constantes, obtém-se a famosa Equação de Navier-Stokes, isto é:

$$\rho\vec{g} + \mu\nabla^2\vec{V} - \nabla p = \rho\frac{D\vec{V}}{dt} \quad (42)$$

(ÇENGEL et al., 2006) nos dá uma visão detalhada sobre o processo de transformação da equação 38 para a equação 42. Escrevendo de forma mais detalhada o tensor de tensões σ , temos:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad (43)$$

Vamos substituir o tensor de tensões, da forma como ele se encontra escrito acima, na equação 38, mas olhando apenas para a componente x do escoamento. Isso nos dará:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (44)$$

Uma vez que as funções para as componentes de velocidade sejam contínuas, a ordem de diferenciação não faz diferença, o que nos permite escrever, por exemplo:

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (45)$$

Rearranjando de forma inteligente os termos da equação 44, temos:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \quad (46)$$

O que nos dá:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \quad (47)$$

No entanto, observe que o termo entre parênteses vale zero para fluidos incompressíveis (equação da continuidade para fluidos com ρ constante). Ou seja, ficamos com:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad (48)$$

O processo, para as componentes y e z, seriam análogos, demonstrando, de maneira clara, o processo por trás da transformação da equação 38 na equação 42.

3.1.5 Equação de corrente-vorticidade

A Equação de Navier-Stokes, apesar de sua importância, tem soluções pouco triviais para problemas de escoamento com duas ou mais dimensões. Assim, é interessante buscar uma formulação alternativa para resolver problemas desse tipo.

Com isso em mente, vamos partir dessa identidade proposta por (BIRD, 2002):

$$[\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}] = \frac{1}{2} \nabla(\vec{V}\vec{V}) - [\vec{V} \times [\nabla \times \vec{V}]] \quad (49)$$

Usando essa identidade na equação do movimento 42:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{V}\vec{V}) - [\vec{V} \times [\nabla \times \vec{V}]] \right) = \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} - \nabla p \quad (50)$$

A vorticidade é representada por:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (51)$$

Ou seja, temos:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{V}\vec{V}) - [\vec{V} \times \vec{\omega}] \right) = \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} - \nabla p \quad (52)$$

Dividindo a equação por ρ e denotando \vec{g} por $-\nabla\Phi$ (força conservativa, em que Φ é a função de potencial gravitacional):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{V}\vec{V}) - [\vec{V} \times \vec{\omega}] = -\nabla\Phi + \nu \nabla^2 \vec{V} - \nabla p \quad (53)$$

Observe que podemos reescrever a equação como:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - [\vec{V} \times \vec{\omega}] = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \vec{V}\vec{V} + \Phi \right) + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (54)$$

Chamando o termo entre parênteses por Π :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - [\vec{V} \times \vec{\omega}] = -\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (55)$$

Fazendo o rotacional de ambos os lados da equação:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - [\vec{V} \times \vec{\omega}] \right) = \nabla \times \left(-\nabla \Pi + \nu \nabla^2 \vec{V} \right) \quad (56)$$

Observe que:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \quad (57)$$

Ao mesmo tempo em que temos a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times (-\vec{V} \times \vec{\omega}) = -\nabla \times \vec{V} \times \vec{\omega} = -(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} \quad (58)$$

Para o lado direito, podemos fazer as seguintes definições:

$$\nabla \times (\nabla \Pi) = 0 \quad (59)$$

$$\nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{V}) = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (60)$$

A equação 59 deriva do fato de que o rotacional do gradiente de um campo escalar duplamente diferenciável qualquer resulta sempre no vetor nulo.

Observe que valem as relações de que $\nabla \cdot \vec{V}$ é nulo e de que $\nabla \cdot \vec{\omega}$ também é nulo. Com isso, utilizando as identidades vetoriais e expressões mostradas, a equação 60 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (61)$$

Essa é a equação do balanço para a vorticidade $[\nabla \times \vec{V}]$. Com as condições iniciais e de contorno relevantes, ela pode ser utilizada para resolver problemas de escoamento e, posteriormente, pode-se usar a equação de Navier-Stokes para buscar a distribuição da pressão no mesmo escoamento.

Para escoamentos bidimensionais, caso de nosso interesse, sabe-se que $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V}$ é igual a zero, pois essa parcela equivale ao gradiente da velocidade \vec{V} na direção do vetor de vorticidade $\vec{\omega}$ multiplicado pelo módulo de $\vec{\omega}$. Logo, a equação de transporte da vorticidade se reduz a:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (62)$$

Em escoamentos bidimensionais, considerando que as componentes u e v do campo de velocidades não serão necessariamente nulas, pode-se reformular a equação de vorticidade 62 utilizando-se a função de corrente ψ . A ideia é expressar as duas componentes do

campo de velocidades como derivadas de ψ . Como isso é possível? Resgatemos a equação de continuidade, isto é, o Princípio de Conservação da Massa apresentado anteriormente, para um escoamento incompressível e bidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (63)$$

Uma vez definida a componente u como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (64)$$

Só resta concluir que, a partir da Equação de Continuidade:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (65)$$

Agora, observemos que a equação de vorticidade 51 nos fornece a seguinte expressão:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (66)$$

Uma vez que estamos tratando de um problema bidimensional, a componente w é nula, ao mesmo tempo em que as derivadas em relação à componente z também são nulas. Isso implica no fato de as componentes nas direções x e y da vorticidade $\vec{\omega}$ serem nulas, sendo de nosso particular interesse a componente na direção z , isto é:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{z} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (67)$$

Com as definições apresentadas anteriormente relacionando função corrente às componentes de velocidade, temos a chamada Equação de Poisson para a função corrente ϕ :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{z} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (68)$$

Ou, de maneira simplificada:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{z} = -\nabla^2 \psi \quad (69)$$

3.1.6 Formulação adimensional

A equação de balanço para a vorticidade é, muitas vezes, utilizada em sua forma adimensional. Para compreender a sua escrita na forma adimensional, basta entender que a Equação de Navier-Stokes também pode ser escrita em sua forma adimensional. Para tanto, vamos definir os seguintes parâmetros:

$$t = \frac{L}{U} t^* \quad \nabla = \frac{1}{L} \nabla^* \quad \vec{V} = U \vec{V}^* \quad p = \rho_o U^2 p^* \quad \vec{g} = g_o \vec{g}^* \quad \nu = \nu_o \nu^*$$

Relembrando a Equação de Navier-Stokes:

$$\vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} - \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \quad (70)$$

Fazendo as substituições:

$$g_o \vec{g}^* + \nu_o \nu^* U \nabla^2 \vec{V}^* - \frac{\rho_o U^2 \nabla p^*}{\rho_o \rho^*} = \frac{U^2}{L} \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + U^2 \vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^* \quad (71)$$

Sendo os parâmetros adimensionais Re e Fr (número de Reynolds e número de Froude, respectivamente):

$$Re = \frac{UL}{\nu_o} \quad (72)$$

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g_o L}} \quad (73)$$

Podemos fazer a seguinte reorganização da equação 71:

$$\frac{1}{Fr^2} \vec{g}^* + \frac{1}{Re^2} \nabla^{*2} \vec{V}^* \cdot \nabla^* p^* = \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + \vec{V}^* \cdot \nabla \vec{V}^* \quad (74)$$

Partindo-se dessa forma adimensionalizada da Equação de Navier-Stokes, pode-se chegar à forma adimensionalizada da equação de balanço para a vorticidade, através dos mesmos passos já apresentados que foram utilizados para a forma dimensional:

$$\frac{\partial \vec{\omega}^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \nabla^* \vec{\omega}^* = \frac{1}{Re^2} \nabla^{*2} \vec{\omega}^* \quad (75)$$

3.1.7 Equação de movimento para a gotícula

Seja a 2ª Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (76)$$

Para as forças que agem sobre a gotícula, podemos considerar que a força de arrasto e a força peso são absolutamente predominantes em relação às outras forças, como a parcela referente ao Efeito Magnus, ao Efeito Saffman e à Força de Basset, conforme avaliado por (SHIROLKAR et al., 1996). Assim, pode-se organizar a equação de movimento para a gotícula da seguinte forma:

$$\vec{F}_{at} + \vec{F}_g = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (77)$$

A força \vec{F}_g é dada por:

$$F_g = -\rho_w V g \quad (78)$$

Com isso, resta entender o comportamento da força de arrasto \vec{F}_{at} sobre a gotícula. Primeiramente, parte-se do pressuposto que a força de arrasto é proporcional à diferença de velocidade entre o campo de velocidades do escoamento e a própria velocidade da gotícula, isto é:

$$\vec{F}_{at} = b(\vec{V} - \vec{v}) \quad (79)$$

Com isso, é necessário compreender sobre como se chegar a uma formulação para o coeficiente b . Daí, partindo da hipótese introduzida de que a gotícula se comporta de maneira aproximadamente esférica, temos, conforme demonstra (ÇENGEL et al., 2006), que para esferas sob um número de Reynolds inferior a 1, o coeficiente de arrasto é dado por:

$$C_d = \frac{24}{Re_r} \quad (80)$$

Sendo:

$$Re_r = \frac{\rho |\vec{V} - \vec{v}| D}{\mu} \quad (81)$$

Utilizando a formulação geral para a força de arrasto, sabemos que, para a gotícula:

$$F_{at} = \frac{1}{2} \rho C_d |\vec{V} - \vec{v}|^2 A \quad (82)$$

Sabendo que a área projetada da esfera vale:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (83)$$

Substituindo todos os fatores na equação para a força de arrasto:

$$F_{at} = \frac{\rho}{2} \frac{24\mu}{\rho |\vec{V} - \vec{v}| D} |\vec{V} - \vec{v}|^2 \frac{\pi D^2}{4} \quad (84)$$

Fazendo as simplificações necessárias, temos:

$$F_{at} = 3\pi\mu |\vec{V} - \vec{v}| D \quad (85)$$

Ou, em notação vetorial:

$$\vec{F}_{at} = 3\pi\mu(\vec{V} - \vec{v})D \quad (86)$$

Essa formulação, no entanto, atende bem apenas situações de escoamento laminar, para Re_r baixos (inferiores a 1). No entanto, precisamos de uma formulação mais geral para a força de arrasto sobre a esfera, para casos que envolvam Re_r maiores. Conforme abordado por (ASHGRIZ, 2011), a força de arrasto, para uma formulação mais geral, pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{at} = 3\pi\mu f(\vec{V} - \vec{v})D \quad (87)$$

Nessa equação, f é o fator de arrasto ou o fator de arrasto relativo ao fator de arrasto de Stokes:

$$f = \frac{C_d Re_r}{24} \quad (88)$$

Como se pode notar, f se aproxima de 1 conforme o escoamento se aproxima do escoamento de Stokes. Existem diferentes correlações disponíveis na literatura para o fator f como função de Re_r . (SCHILLER et al., 1933) propôs para Re_r de até 800:

$$f = 1 + 0,15Re_r^{0,687} \quad (89)$$

Para Re_r mais elevados, (PUTNAM, 1961) propôs:

$$f = 1 + (Re_r^{2/3})/6, \text{ para } Re_r < 1000 \quad (90)$$

$$f = 0,0183Re_r, \text{ para } 1000 \leq Re_r < 3 \times 10^5 \quad (91)$$

Por último, (CLIFT et al., 1970) apresentou a relação:

$$f = 1 + 0,15Re_r^{0,687} + 0,0175(1 + 4,25 * 10^4 Re_r^{-1,16})^{-1}, \text{ para } Re_r < 2 \times 10^5 \quad (92)$$

Observe que é possível reescrever a equação de movimento para a gotícula introduzindo-se um termo de resposta temporal τ_v :

$$\tau_v = \frac{\rho_w D^2}{18\mu_a} \quad (93)$$

O que nos dará a seguinte equação de movimento para a gotícula:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{f}{\tau_v}(\vec{V} - \vec{v}) + \vec{g} \quad (94)$$

Considerando que $\vec{g} = -g\vec{y}$, temos para as componentes x e y:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{f}{\tau_v}(u - v_x) \quad (95)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{f}{\tau_v}(v - v_y) - g \quad (96)$$

3.2 Formulação numérica

O Método de Elementos Finitos será a ferramenta utilizada para que seja analisado o escoamento do ar em torno da boca no presente trabalho. Conforme abordado por (LEWIS, 2004), o Método de Elementos Finitos segue os seguintes passos:



Fig. 2: Sequência de etapas do MEF

O problema físico é, como já falado, o escoamento do ar em torno da boca, para que se analise o movimento de uma gotícula expelida em um caso de tosse ou espirro. A formulação matemática foi vista, nas seções anteriores, através da construção das equações que regem o problema, como a equação de continuidade, a equação de Navier-Stokes e a equação de transporte de vorticidade. O presente capítulo se volta, então, para as questões da discretização do domínio, da geração da malha e da discretização das equações (tanto espacial como temporal).

O que será visto, basicamente, é que o MEF trabalha com uma forma dita "fraca" das equações que regem o problema. Para um problema bidimensional, como é o presente caso, o uso do Teorema de Green nos permitirá reduzir a ordem das derivadas de segunda ordem presentes nas equações de governo. Uma vez discretizadas as variáveis de interesse, com o uso de funções de forma, utilizaremos o Método de Galerkin, o qual pressupõe equivalência entre essas funções. Também será feita uma expansão em Série de Taylor da vorticidade, o que é próprio do Método de Taylor-Galerkin, conforme apresentado por (DONEA, 1984).

Também será visto, por último, como se dará a discretização da equação de movimento da gotícula.

3.2.1 Discretização do domínio e geração da malha

A discretização do domínio do problema, no Método de Elementos Finitos, permite que se use uma variedade de formas de elementos. No presente caso, foi escolhido um elemento triangular; no entanto, poderia ter sido usado, por exemplo, um elemento quadrático ou, para um problema em três dimensões, um tetraedro. Para cada tipo de elemento, está associada uma diferente função de forma, cujo significado será melhor explorado à frente. O número de nós de cada elemento depende da geometria adotada para cada um, mas não exclusivamente depende desse fator, dependendo também do tipo de aproximação escolhida para as funções de forma (aproximação linear, quadrática, cúbica etc). Um exemplo de malha bidimensional formada por elementos triangulares é mostrado abaixo:

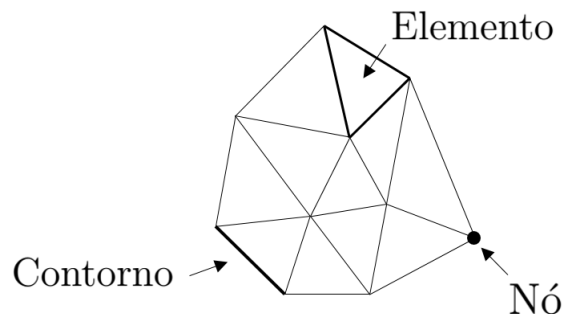


Fig. 3: Exemplo de malha formada por elementos triangulares

Para a geração da malha, foi escolhido o software Gmsh, que é um gerador de malha em até três dimensões de código aberto (*open source*), com um mecanismo de CAD embutido e um pós-processador. Um exemplo de uma malha criada no Gmsh é mostrada abaixo:

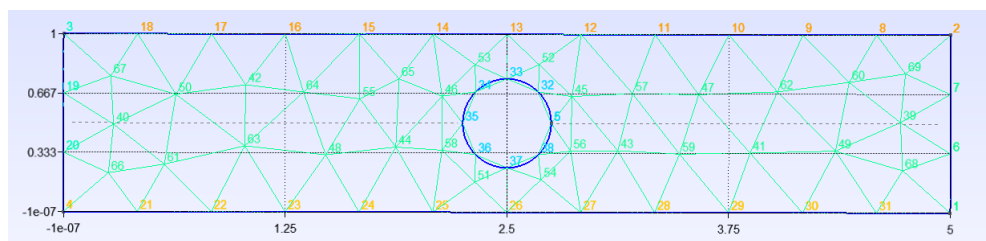


Fig. 4: Exemplo de malha de elementos triangulares feita no *Gmsh*

O Gmsh permite que se escolha o tipo de elemento adotado (como no presente caso, triangular) e uma de suas funções que mais proeminentemente será utilizada nesse trabalho é a escolha de um parâmetro de refinamento da malha, definido como *element size factor*, que permite escolher uma malha com um maior número de elementos para valores de *element size factor* mais baixos, isto é, uma malha com mais pontos a serem processados posteriormente, mas que irá gerar resultados mais acurados.

3.2.2 Elemento bidimensional triangular

No presente trabalho, foi utilizada uma malha com elementos bidimensionais triangulares, sendo esse elemento a forma geométrica mais simples possível de ser escolhida para uma malha bidimensional. Seja a representação de um elemento triangular dada por:

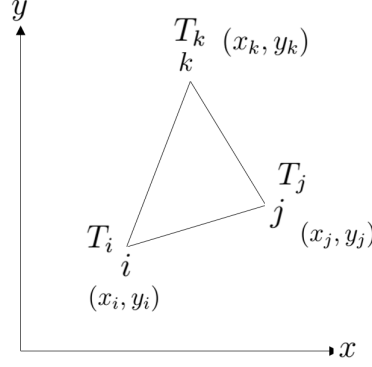


Fig. 5: Elemento triangular

$$T_{x,y} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (97)$$

Essa função poderia representar, por exemplo, a temperatura de uma placa plana (embora não necessariamente o MEF seja, é claro, restrito a problemas térmicos). Esse polinômio, linear em x e y, contém 3 coeficientes (α_1 , α_2 e α_3). Uma vez que um elemento triangular contém 3 nós, os valores desses coeficientes são dados por:

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \quad (98)$$

$$T_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \quad (99)$$

$$T_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \quad (100)$$

Resolvendo o sistema acima para os três coeficientes, obtém-se:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) T_i + (x_k y_i - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k] \quad (101)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k] \quad (102)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k] \quad (103)$$

Sendo A a área do elemento triangular, dada por:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_j y_k - x_k y_j) \quad (104)$$

É possível substituir os valores para α_1 , α_2 e α_3 nas equações mostradas para $T_{x,y}$, reorganizando $T_{x,y}$ da seguinte forma:

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = [N_i N_j N_k] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \quad (105)$$

Sendo:

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad (106)$$

$$N_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \quad (107)$$

$$N_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \quad (108)$$

Naturalmente:

$$a_i = x_k y_j - x_j y_k; b_i = y_j - y_k; c_i = x_k - x_j \quad (109)$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k; b_j = y_k - y_i; c_j = x_i - x_k \quad (110)$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i; b_k = y_i - y_j; c_k = x_j - x_i \quad (111)$$

No ponto (x_i, y_i) , a função N_i vale:

$$(N_i)_i = \frac{1}{2A}[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x_i + (x_k - x_j)y_i] = \frac{2A}{2A} = 1 \quad (112)$$

Similarmente, pode-se verificar que, para as coordenadas (x_j, y_j) , $N_j = 1$ e, para (x_k, y_k) , $N_k = 1$. Por outro lado, $(N_i)_j$ vale zero, da mesma forma que $(N_i)_k$ vale zero. O raciocínio é análogo para N_j e para N_k . De fato, verifica-se que, para qualquer vértice do elemento triangular:

$$N_i + N_j + N_k = 1 \quad (113)$$

Vamos supor que quiséssemos obter o gradiente de $T_{x,y}$. As derivadas em relação a x e a y seriam, como só resta concluir:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k \quad (114)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k \quad (115)$$

O que nos fornece, organizando a equação acima de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{bmatrix} \quad (116)$$

3.2.3 Formulação forte e formulação fraca

É muito importante, inicialmente, que seja feita uma distinção entre a formulação forte e a formulação fraca no contexto da utilização do Método de Elementos Finitos. (GIACCHINI, 2012) nos fornece um exemplo interessante, para um caso bidimensional, com o objetivo de fazer essa distinção de maneira consistente.

Uma formulação dita forte, para um caso bidimensional, é apresentada para o problema de Dirichlet bidimensional como exemplo:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f(x, y), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (117)$$

Seja um espaço V de funções, definido como $V = [v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, v \text{ é contínua em } \Omega, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} \text{ são contínuas por partes em } \Omega \text{ e } v \text{ vale zero em } \partial\Omega]$. Multiplicamos a equação original por uma função v qualquer do espaço de funções V e integramos no domínio Ω :

$$\int_{\Omega} -\nabla^2 u \cdot v dV = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v dV \quad (118)$$

Vamos reescrever a equação acima baseando-se na fórmula de Green, que se baseia no Teorema do Divergente. O Teorema do Divergente parte do seguinte princípio: se \vec{w} é um campo de vetores diferenciável em Ω , teremos:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{w} dV = \int_{\partial\Omega} \vec{w} \cdot \vec{n} ds \quad (119)$$

O vetor \vec{n} é normal à $\partial\Omega$. Para obter a fórmula de Green, aplica-se o Teorema para os campos de vetores $\vec{a}(x, y) = \left(g \cdot \frac{\partial h}{\partial x}, 0 \right)$ e $\vec{b}(x, y) = \left(0, g \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right)$, sendo as funções $g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Considerando que o vetor unitário é $\vec{n} = (n_1, n_2)$, temos para \vec{a} :

$$\int_{\Omega} \left(g \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \right) dV = \int_{\partial\Omega} g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot n_1 ds \quad (120)$$

Da mesma forma, para \vec{b} :

$$\int_{\Omega} \left(g \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) dV = \int_{\partial\Omega} g \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot n_2 ds \quad (121)$$

Somando as duas equações:

$$\int_{\Omega} \left[g \cdot \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] dV = \int_{\partial\Omega} g \cdot \left(n_1 \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + n_2 \frac{\partial h}{\partial y} \right) ds \quad (122)$$

O que nos dá, resumidamente:

$$\int_{\Omega} (g\nabla^2 h + \nabla g \cdot \nabla h) dV = \int_{\partial\Omega} g \cdot (\vec{n} \cdot \nabla h) ds \quad (123)$$

Uma vez que a função $g(x, y)$ obedeça à condição de Dirichlet homogênea, a integral sobre $\partial\Omega$ é nula. Isso nos dará:

$$- \int_{\Omega} g\nabla^2 h dV = \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla h dV \quad (124)$$

Se fizermos $g = v$ e $h = u$, temos que os membros esquerdos da equação acima e da equação 125 são iguais. Logo, só resta concluir:

$$\int_{\Omega} v \cdot f dV = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dV \quad (125)$$

Essa equação, juntamente com a condição de Dirichlet homogênea, formam a formulação fraca do problema bidimensional. Uma função que resolve o problema em sua forma fraca também resolve o problema em sua forma forte e, da mesma forma, uma solução do problema na forma fraca, se suficientemente regular, também resolverá o problema em sua forma forte. Mais uma vez, no MEF, busca-se resolver o problema em sua formulação fraca.

3.2.4 Método de Galerkin

Para um problema de elementos finitos, uma vez que este esteja formulado em sua forma fraca, tenha sido feita a integração por partes e tenha sido usada a fórmula de Green para diminuir a ordem das derivadas, podemos discretizar as funções u e v para buscar a solução desejada. Para um problema unidimensional, discretizamos $u(x)$ e $v(x)$ da seguinte forma:

$$u^e(x) = \sum_{i=1}^{np} u_i N_i^e(x) \quad (126)$$

$$v^e(x) = \sum_{j=1}^{np} v_j N_j^e(x) \quad (127)$$

O Método de Galerkin, conforme abordado por (ANJOS, 2007), pressupõe que as funções de forma N_i^e e N_j^e sejam iguais. Essas funções podem ser aproximações de diferentes ordens, embora, no presente trabalho, sejam utilizadas aproximações de ordem linear.

Como exemplo, para o problema de Dirichlet unidimensional, relembramos que ele é

dado, em sua formulação fraca, por:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx \quad (128)$$

Utilizando as formas discretizadas para $u(x)$ e $v(x)$:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{np} \frac{du_i}{dx} \frac{dN_i^e(x)}{dx} \right) \left(\sum_{j=1}^{np} \frac{dv_j}{dx} \frac{dN_j^e(x)}{dx} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{np} f \cdot v_j N_j^e(x) d\Omega + cc. \quad (129)$$

Reorganizando a expressão acima utilizando propriedades de somatório, temos:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \frac{du_i N_i^e(x)}{dx} \cdot \frac{dv_j N_j^e(x)}{dx} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{np} f \cdot v_j N_j^e(x) d\Omega + cc. \quad (130)$$

Observe que v_j aparece em toda as parcelas, podendo ser retirado da equação. Da mesma forma, u_i pode ser retirado da derivada, o que nos deixa:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \frac{dN_i^e(x)}{dx} \cdot \frac{dN_j^e(x)}{dx} u_i \right) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{np} f \cdot N_j^e(x) d\Omega + cc. \quad (131)$$

Utilizando propriedades de somatório:

$$\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} \frac{dN_i^e(x)}{dx} \cdot \frac{dN_j^e(x)}{dx} u_i d\Omega = \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} f \cdot N_j^e(x) d\Omega + cc. \quad (132)$$

Observe que essa equação pode ser rerepresentada na forma matricial:

$$[K][u] = [F] + cc. \quad (133)$$

Os elementos da matriz $[K]$ serão dados por:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \frac{dN_i^e(x)}{dx} \cdot \frac{dN_j^e(x)}{dx} d\Omega \quad (134)$$

E os elementos da matriz $[F]$ serão dados por:

$$f_j = \int_{\Omega} f \cdot N_j^e(x) d\Omega \quad (135)$$

Essas integrais podem ser resolvidas analiticamente ou por métodos numéricos. No entanto, para a função de forma unidimensional, a resolução das integrais é simples. Observe que, para o caso bidimensional, a formulação seria análoga (com N_i^e e N_j^e sendo iguais, porém dependentes agora de x e de y), o que nos renderia, para o problema de

Dirichlet:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \nabla N_i^e(x, y) \cdot \nabla N_j^e(x, y) u_i d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{np} f \cdot N_j^e(x, y) d\Omega + cc. \quad (136)$$

Mais uma vez, aproveitando-se das propriedades do somatório:

$$\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} \nabla N_i^e(x, y) \cdot \nabla N_j^e(x, y) u_i d\Omega = \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} f \cdot N_j^e(x, y) d\Omega + cc. \quad (137)$$

Com os elementos da matriz [K] sendo dados por:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i^e(x, y) \cdot \nabla N_j^e(x, y) d\Omega \quad (138)$$

E os elementos da matriz [F] sendo dados por:

$$f_j = \int_{\Omega} f \cdot N_j^e(x, y) d\Omega \quad (139)$$

3.2.5 Aplicação sobre a Equação de Poisson para função corrente ϕ

Relembrando, sabemos que a equação que relaciona a chamada função corrente e a vorticidade é dada por:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{z} = \omega_z = -\nabla^2 \psi \quad (140)$$

Escrevendo o problema em sua forma fraca, temos, utilizando uma função peso $w(x, y)$:

$$-\int_{\Omega} \omega_z w d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 \psi w d\Omega \quad (141)$$

Observe que a equação pode ser reescrita ao se utilizar o Teorema de Green, isto é:

$$-\int_{\Omega} \omega_z w d\Omega = \int_{\partial\Omega} w \nabla \psi \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla w d\Omega \quad (142)$$

Uma vez que sejam utilizadas condições de Dirichlet, temos que a função peso $w(x, y)$ precisa ser nula no contorno da malha, isto é:

$$\int_{\Omega} \omega_z w d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla w d\Omega \quad (143)$$

Introduzindo-se as aproximações discretas para $\psi(x, y)$, $w(x, y)$ e $\omega_z(x, y)$, temos:

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^{np} \psi_i N_i(x, y) \quad (144)$$

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{np} w_j N_j(x, y) \quad (145)$$

$$\omega_z(x, y) = \sum_{k=1}^{np} \omega_k N_k(x, y) \quad (146)$$

Lembrando que o Método de Galerkin pressupõe que:

$$N_i(x, y) = N_j(x, y) = N_k(x, y) \quad (147)$$

O que nos permite escrever, finalmente:

$$\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} \nabla N_i \nabla N_j \psi_i d\Omega = \sum_{j=1}^{np} \sum_{k=1}^{np} \int_{\Omega} N_j N_k \omega_k d\Omega + cc. \quad (148)$$

O que, matricialmente, pode ser visto como:

$$[K][\psi] = [M][\omega_z] + cc. \quad (149)$$

O que implica, como já se espera:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i(x, y) \nabla N_j(x, y) d\Omega \quad (150)$$

$$m_{ij} = \int_{\Omega} N_j(x, y) N_j(x, y) d\Omega \quad (151)$$

3.2.6 Expansão da vorticidade em Série de Taylor para Taylor-Galerkin

Para discretizar a vorticidade com relação à sua variação ao longo do tempo, fazemos uso de uma expansão da vorticidade com a Série de Taylor, conforme mostrado por (DONEA et. al, 1984):

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial \omega_n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 \omega_n}{\partial t^3} + \dots \quad (152)$$

No entanto, truncamos os termos de terceira ordem, utilizando a aproximação até os termos de segunda ordem, isto é:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \Delta t \frac{\partial \omega_n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (153)$$

$$\omega_{n+1} \approx \omega_n + \Delta t \frac{\partial \omega_n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial t^2} \quad (154)$$

Com isso, podemos isolar o termo referente à derivada de segunda ordem, isto é:

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial t^2} = 2 \left(\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t^2} \right) - \frac{\partial \omega_n}{\partial t} \frac{2}{\Delta t} \quad (155)$$

Tendo feito isso, relembremos a equação de transporte da vorticidade:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} = \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (156)$$

Conforme observado em uma seção anterior, sabemos que as componentes nas direções x e y para a vorticidade $\vec{\omega}$ são nulas. Também sabemos que derivadas em relação à componente z são nulas para o nosso problema bidimensional. Tendo isso em mente e chamando mais uma vez a componente na direção z por ω_z , podemos rerepresentar a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \quad (157)$$

Agora estamos diante de uma equação que apresenta apenas parcelas escalares e não mais vetoriais. Isolando-se a derivada em relação ao tempo na equação acima, temos:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = -u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \quad (158)$$

Uma vez que se derive a equação acima em relação ao tempo, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) \quad (159)$$

Observe que o termo à esquerda corresponde à derivada de segunda ordem de w_z . Com isso em mente, vamos pegar a expressão obtida na equação (162) e substituir na equação acima:

$$2 \left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t^2} \right) - \frac{\partial \omega_z^n}{\partial t} \frac{2}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) \quad (160)$$

Observe que podemos reorganizar a equação acima como:

$$\left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \right) = \frac{\partial \omega_z^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) \quad (161)$$

Podemos substituir $\frac{\partial \omega_z^n}{\partial t}$ utilizando a equação 159 mais uma vez, considerando até os termos de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \right) &= \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (162)$$

Agora, considerando a derivada em relação ao tempo da última parcela da equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \right) &= \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{2} \left(-u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega_z^n}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega_z^n}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \omega_z^n}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \omega_z^n}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (163)$$

Assim, substituindo mais uma vez a relação que temos disponível para ω_z^n :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \right) &= \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. -v \frac{\partial}{\partial y} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y^2} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (164)$$

Uma vez feito o truncamento de derivadas cuja ordem é superior a 2, podemos reduzir significativamente o tamanho da equação acima:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \right) &= \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} \right) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} \right) - v \frac{\partial}{\partial y} \left(-u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (165)$$

Essa mesma equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \right) + u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega_z^n}{\partial y^2} + \\ &\quad \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} \right) + \frac{\Delta t}{2} v \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \omega_z^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z^n}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (166)$$

Na equação acima, as parcelas multiplicadas por $\frac{\Delta t}{2}$ são as responsáveis por corrigir as oscilações espúrias características desse tipo de equação. Observe que, de outra maneira, a equação acima pode ser escrita como:

$$\dot{\omega}_z + \vec{V} \cdot \nabla \omega_z = \nu \nabla^2 \omega_z + \frac{\Delta t}{2} \vec{V} \cdot \nabla (\vec{V} \cdot \nabla \omega_z) \quad (167)$$

Sendo:

$$\dot{\omega}_z = \frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \quad (168)$$

3.2.7 Aplicação sobre a equação de transporte da vorticidade

Uma vez feita a expansão em série de Taylor da vorticidade, com o conseqüente rearranjo de toda a equação de transporte da vorticidade já demonstrado, podemos aplicar o MEF sobre a mesma equação.

O primeiro passo é escrevê-la sob a forma fraca, sendo w a função peso:

$$\int_{\Omega} w \dot{\omega}_z + w \vec{V} \cdot \nabla \omega_z d\Omega = \int_{\Omega} \nu w \nabla^2 \omega_z + \frac{w \Delta t}{2} \vec{V} \cdot \nabla (\vec{V} \cdot \nabla \omega_z) d\Omega \quad (169)$$

Vamos analisar essa equação termo por termo, isto é, analisando cada parcela sob as integrais:

$$\int_{\Omega} w \dot{\omega}_z d\Omega + \int_{\Omega} w \vec{V} \cdot \nabla \omega_z d\Omega = \int_{\Omega} \nu w \nabla^2 \omega_z d\Omega + \int_{\Omega} \frac{w \Delta t}{2} \vec{V} \cdot \nabla (\vec{V} \cdot \nabla \omega_z) d\Omega \quad (170)$$

Primeiramente, podemos usar a fórmula de Green para remover a derivada de segunda ordem de uma das parcelas, isto é:

$$\int_{\Omega} \nu w \nabla^2 \omega_z d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nu w \nabla \omega_z d\Gamma - \int_{\Omega} \nu \nabla \omega_z \nabla w d\Omega \quad (171)$$

Utilizando condições de Dirichlet, temos que a função w é forçosamente nula no contorno do domínio do problema. Com isso, teremos:

$$\int_{\Omega} \nu w \nabla^2 \omega_z d\Omega = - \int_{\Omega} \nu \nabla \omega_z \nabla w d\Omega \quad (172)$$

Agora, observe que faremos o mesmo sobre o termo de difusividade, isto é:

$$\int_{\Omega} \frac{w \Delta t}{2} \vec{V} \cdot \nabla (\vec{V} \cdot \nabla \omega_z) d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega} [\vec{V} \cdot \nabla \omega_z] w \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \nabla \omega_z] \vec{V} \cdot \nabla w d\Omega \quad (173)$$

Mais uma vez, utilizando condições de Dirichlet, a função w será nula no contorno, o que nos dará:

$$\int_{\Omega} \frac{w\Delta t}{2} \vec{V} \cdot \nabla(\vec{V} \cdot \omega_z) d\Omega = -\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \nabla\omega_z] \vec{V} \cdot \nabla w d\Omega \quad (174)$$

Façamos a discretização de ω_z e de w :

$$\omega_z = \sum_{i=1}^{np} \omega_i N_i \quad (175)$$

$$w = \sum_{j=1}^{np} w_j N_j \quad (176)$$

Lembrando que:

$$\dot{\omega}_z = \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i N_i \quad (177)$$

Lembrando mais uma vez que, do Método de Galerkin:

$$N_i(x, y) = N_j(x, y) \quad (178)$$

Vamos agora olhar para cada parcela dessa equação individualmente. Primeiramente:

$$\int_{\Omega} w \dot{\omega}_z = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{np} w_j N_j \omega_z \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i N_i d\Omega \quad (179)$$

O que pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} w \dot{\omega}_z = \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \int_{\Omega} w_j N_j \dot{\omega}_i N_i d\Omega \quad (180)$$

Olhando para a parcela imediatamente seguinte:

$$\int_{\Omega} w \vec{V} \cdot \nabla \omega_z d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{np} w_j N_j \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^{np} \omega_i \nabla N_i d\Omega \quad (181)$$

Essa equação pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} w \vec{V} \cdot \nabla \omega_z d\Omega = \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \omega_i \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \nabla N_i N_j w_j d\Omega \quad (182)$$

A primeira parcela do lado direito já foi reescrita com o uso da fórmula de Green. Usando a forma advinda da fórmula de Green:

$$- \int_{\Omega} \nu \nabla w_z \nabla w d\Omega = - \int_{\Omega} \nu \sum_{i=1}^{np} \omega_i \nabla N_i \sum_{j=1}^{np} w_j \nabla N_j d\Omega \quad (183)$$

Essa equação pode ser reescrita como:

$$- \int_{\Omega} \nu \nabla w_z \nabla w d\Omega = - \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \nu \int_{\Omega} \omega_i w_j \nabla N_i \nabla N_j d\Omega \quad (184)$$

A última parcela da equação pode ser reescrita como:

$$- \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \nabla \omega_z] \vec{V} \cdot \nabla w d\Omega = - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \sum_{i=1}^{np} \omega_i \nabla N_i] \vec{V} \cdot \sum_{j=1}^{np} w_j \nabla N_j d\Omega \quad (185)$$

Arrumando novamente:

$$- \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \nabla \omega_z] \vec{V} \cdot \nabla w d\Omega = - \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \omega_i \nabla N_i] \vec{V} \cdot w_j \nabla N_j d\Omega \quad (186)$$

Juntando todos os termos em sua forma discretizada:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \int_{\Omega} w_j N_j \dot{\omega}_i N_i d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \omega_i \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \nabla N_i N_j w_j d\Omega = \\ & - \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \nu \int_{\Omega} \omega_i w_j \nabla N_i \nabla N_j d\Omega - \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \omega_i \nabla N_i] \vec{V} \cdot w_j \nabla N_j d\Omega + cc. \end{aligned} \quad (187)$$

Todos os termos w_j podem ser cancelados da equação acima, uma vez que estão multiplicando todas as parcelas. Essa equação pode ser reapresentada em sua forma matricial:

$$\frac{[M]}{\Delta t} [w_z^{n+1}] = \frac{[M]}{\Delta t} [w_z^n] - [V][G][w_z^n] - \nu [K][w_z^n] - [K_{est}][w_z^n] + cc. \quad (188)$$

Ou, deixando em evidência um dos fatores:

$$\frac{[M]}{\Delta t} [w_z^{n+1}] = \left(\frac{[M]}{\Delta t} - [V][G] - \nu [K] \right) [w_z^n] - [K_{est}][w_z^n] + cc. \quad (189)$$

Observe que, nessa formulação, o termo corresponde à matriz $[K_{est}]$ é um termo "artificial", isto é, um termo que, não fosse feita a expansão em série de Taylor da vorticidade anteriormente, não apareceria. Mais uma vez, essa matriz é chamada de matriz de difusão artificial e promove correções para números de Reynolds altos, evitando oscilações

espúrias. Observe que a matriz $[M]$ é formada por:

$$m_{ij} = \int_{\Omega} N_j(x, y) N_j(x, y) d\Omega \quad (190)$$

A matriz $[K]$ é formada por:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i(x, y) \nabla N_j(x, y) d\Omega \quad (191)$$

Podemos fazer uma subdivisão da matriz $[K]$:

$$[K] = [K_{xx}] + [K_{yy}] \quad (192)$$

O que se traduz em:

$$k_{ij} = k_{xx,ij} + k_{yy,ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \quad (193)$$

Vamos definir também a matriz $[K_{xy}]$. A definição das matrizes $[K_{xx}]$, $[K_{yy}]$ e $[K_{xy}]$ se mostrará útil mais à frente. A matriz $[K_{xy}]$ é formada pelo elemento $k_{xy,ij}$:

$$k_{xy,ij} = k_{yx,ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \quad (194)$$

A matriz $[G]$ é formada por:

$$g_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i(x, y) N_j(x, y) d\Omega \quad (195)$$

Aqui, é interessante fazer uma observação. A matriz $[G]$ pode ser decomposta em:

$$[G] = [G_x] + [G_y] \quad (196)$$

Isso se dá pela possibilidade de escrever g_{ij} da seguinte forma:

$$g_{ij} = g_{x,ij} + g_{y,ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j(x, y) d\Omega \quad (197)$$

Essa decomposição terá utilidade clara mais à frente. A matriz $[K_{est}]$, por sua vez, é formada por:

$$k_{est,ij} = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\vec{V} \cdot \nabla N_i(x, y)] \vec{V} \cdot \nabla N_j(x, y) d\Omega \quad (198)$$

3.2.8 Aplicação para obtenção da velocidade do escoamento

Já vimos, na formulação da função corrente, que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (199)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (200)$$

Podemos, mais uma vez, utilizar o MEF para obter expressões para as componentes u e v da velocidade do escoamento. Primeiramente, para a componente u , escrevendo a sua equação correspondente na forma fraca:

$$\int_{\Omega} u w d\Omega = \int_{\Omega} w \frac{\partial \psi}{\partial y} d\Omega \quad (201)$$

Mais uma vez, fazemos uma discretização do tipo:

$$u = \sum_{i=1}^{np} u_i N_i \quad (202)$$

$$w = \sum_{j=1}^{np} w_j N_j \quad (203)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{np} \psi_i N_i \quad (204)$$

Sendo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \sum_{i=1}^{np} \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \quad (205)$$

O que resultará na equação:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} u_i N_i \sum_{j=1}^{np} w_j N_j d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} w_j N_j d\Omega + cc. \quad (206)$$

Como já vimos de forma similar em seções anteriores, temos:

$$\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} u_i N_i w_j N_j d\Omega = \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} \psi_i w_j \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega + cc. \quad (207)$$

Mais uma vez, cancelamos o fator w_j proveniente da função peso, o que nos permite escrever, na forma matricial:

$$[M][u] = [G_y][\psi] \quad (208)$$

A construção da matriz $[M]$ é baseado no mesmo elemento m_{ij} mostrado nas seções anteriores e o mesmo pode ser dito da matriz $[G_y]$. Agora, repetindo o processo para a componente v da velocidade do escoamento, temos a equação escrita na forma fraca:

$$\int_{\Omega} v w d\Omega = - \int_{\Omega} w \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega \quad (209)$$

Fazendo a discretização para v :

$$v = \sum_{i=1}^{np} v_i N_i \quad (210)$$

Substituindo essa discretização para v e as outras discretizações já apresentadas, chegamos a:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} v_i N_i \sum_{j=1}^{np} w_j N_j d\Omega = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} w_j N_j d\Omega + cc. \quad (211)$$

Reorganizando:

$$\sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \int_{\Omega} v_i N_i w_j N_j d\Omega = - \sum_{i=1}^{np} \sum_{j=1}^{np} \psi_i w_j \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + cc. \quad (212)$$

Mais uma vez, cancelando o fator w_j e representando na forma matricial, teremos:

$$[M][v] = -[G_x][\psi] \quad (213)$$

Sendo a formação da matriz $[M]$ baseada no mesmo elemento m_{ij} apresentado nas seções anteriores e o mesmo pode ser dito da matriz $[G_x]$.

3.2.9 Montagem das matrizes

Como se viu anteriormente, os problemas do MEF podem ser apresentados sob uma forma matricial, o que é de muita valia para a implementação de algoritmos que resolvam os problemas pelo método. Assim, é preciso haver uma forma prática de construir as matrizes anteriormente mostradas ($[K]$, $[M]$ etc).

De fato, existe uma forma simples de construir essas matrizes. No presente caso, utilizaremos funções de forma N_i e N_j aproximadas linearmente e a malha utilizada será formada por elementos triangulares. Isso garante que as matrizes $[K]$, $[M]$ e $[G]$ sejam formadas sempre por um algoritmo que se baseia em uma matriz 3×3 (específica para cada uma das matrizes previamente citadas).

Primeiramente, vamos resgatar alguns conceitos apresentados para o elemento bidimensional triangular com aproximação linear para as funções de forma. Temos para a

área A de cada elemento triangular que:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_j y_k - x_k y_j) \quad (214)$$

Também temos as definições de que:

$$a_i = x_k y_j - x_j y_k; b_i = y_j - y_k; c_i = x_k - x_j \quad (215)$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k; b_j = y_k - y_i; c_j = x_i - x_k \quad (216)$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i; b_k = y_i - y_j; c_k = x_j - x_i \quad (217)$$

Para construir a matriz elementar k^e , precisaremos seguir alguns passos. Primeiramente, seja a matriz B dada por:

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (218)$$

Considere também a matriz D , formada pelos coeficientes do laplaciano:

$$D = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (219)$$

Assim, a matriz k^e para um determinado elemento triangular será dada por:

$$k^e = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega = A B^T D B = k_x k_x^e + k_y k_y^e \quad (220)$$

Sendo as matrizes k_x^e e k_y^e :

$$k_x^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} \quad (221)$$

$$k_y^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (222)$$

Vejamos agora o caso da matriz $[M]$. Para construir essa matriz, utilizamos a matriz m^e :

$$m^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (223)$$

As matrizes $[G_x]$ e $[G_y]$, que somadas originam a matriz $[G]$, também são montadas a partir de matrizes g_x^e e g_y^e para cada elemento. As matrizes g_x^e e g_y^e são dadas por:

$$g_x^e = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (224)$$

$$g_y^e = \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (225)$$

Para construir a matriz de estabilização $[K_{est}]$, podemos utilizar as matrizes k_{xy}^e , k_x^e e k_y^e , com a matriz k_{xy}^e :

$$k_{xy}^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i c_i & b_i c_j & b_i c_k \\ b_j c_i & b_j c_j & b_j c_k \\ b_k c_i & b_k c_j & b_k c_k \end{bmatrix} \quad (226)$$

Sendo k_{est}^e dada por:

$$k_{est}^e = \bar{u} \frac{\Delta t}{2} [\bar{u} k_x^e + \bar{v} k_{xy}^e] + \bar{v} \frac{\Delta t}{2} [\bar{u} k_{xy}^e + \bar{v} k_y^e] \quad (227)$$

Ou, de forma ainda mais detalhada:

$$k_{est}^e = \frac{\bar{u}}{4A} \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \bar{u} b_i^2 + \bar{v} b_i c_i & \bar{u} b_i b_j + \bar{v} b_i c_j & \bar{u} b_i b_k + \bar{v} b_i c_k \\ \bar{u} b_j b_i + \bar{v} b_j c_i & \bar{u} b_j^2 + \bar{v} b_j c_j & \bar{u} b_j b_k + \bar{v} b_j c_k \\ \bar{u} b_k b_i + \bar{v} b_k c_i & \bar{u} b_k b_j + \bar{v} b_k c_j & \bar{u} b_k^2 + \bar{v} b_k c_k \end{bmatrix} + \quad (228)$$

$$\frac{\bar{v}}{4A} \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \bar{u} c_i b_i + \bar{v} c_i^2 & \bar{u} c_i b_j + \bar{v} c_i c_j & \bar{u} c_i b_k + \bar{v} c_i c_k \\ \bar{u} c_j b_i + \bar{v} c_j c_i & \bar{u} c_j b_j + \bar{v} c_j^2 & \bar{u} c_j b_k + \bar{v} c_j c_k \\ \bar{u} c_k b_i + \bar{v} c_k c_i & \bar{u} c_k b_j + \bar{v} c_k c_j & \bar{u} c_k b_k + \bar{v} c_k^2 \end{bmatrix}$$

Uma vez em posse dessas matrizes elementares, utilizamos o seguinte algoritmo para a construção das matriz $[K]$, $[M]$, $[G_x]$, $[G_y]$ e $[K_{est}]$:

- 01: for *elem* in range (0,NE):
- 02: Construção das matrizes elementares k^e , m^e , g^e , k_{est}^e
- 03: for i_{local} in range (0,3):
- 04: $i_{global} = \text{IEN}[\text{elem}, i_{local}]$
- 05: for j_{local} in range (0,3):
- 06: $j_{global} = \text{IEN}[\text{elem}, j_{local}]$
- 07: $\text{K}[i_{global}, j_{global}] += k^e[i_{local}, j_{local}]$
- 08: $\text{M}[i_{global}, j_{global}] += m^e[i_{local}, j_{local}]$

```

09:       $G_x[i_{global}, j_{global}] += g_x^e[i_{local}, j_{local}]$ 
10:       $G_y[i_{global}, j_{global}] += g_y^e[i_{local}, j_{local}]$ 
11:       $K_{est}[i_{global}, j_{global}] += k_{est}^e[i_{local}, j_{local}]$ 
12:      end for
13:  end for
14: end for

```

3.2.10 Discretização da equação de movimento da gotícula

Conforme foi visto anteriormente, as equações de movimento da gotícula são dadas, para as componentes x e y do movimento, por:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{f}{\tau_v}(u - v_x) \quad (229)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{f}{\tau_v}(v - v_y) - g \quad (230)$$

Sendo assim, através do Método de Euler, pode-se discretizar essas equações utilizando um passo de tempo Δt :

$$\frac{v_x^{n+1} - v_x^n}{\Delta t} = \frac{f}{\tau_v}(u^{n+1} - v_x^n) \quad (231)$$

$$\frac{v_y^{n+1} - v_y^n}{\Delta t} = \frac{f}{\tau_v}(v^{n+1} - v_y^n) - g \quad (232)$$

O que nos dá, para a iteração $n + 1$:

$$v_x^{n+1} = v_x^n + \frac{f\Delta t}{\tau_v}(u^{n+1} - v_x^n) \quad (233)$$

$$v_y^{n+1} = v_y^n + \frac{f\Delta t}{\tau_v}(v^{n+1} - v_y^n) - g\Delta t \quad (234)$$

4 Código

A criação do código seguirá as seguintes etapas:

1. Importação da malha do Gmsh;
2. Criação das matrizes globais;
3. Imposição das condições de contorno;
4. Algoritmo de resolução do problema;
5. Exibição dos resultados.

Essas etapas serão detalhadas a seguir.

4.1 Importação da malha do Gmsh

Primeiramente, é preciso criar a malha no Gmsh, software utilizado no presente trabalho que já foi apresentado no capítulo anterior. Antes de importar a malha em si, é preciso importar a biblioteca *meshio* no Python. Os arquivos de malha do programa tem extensão *.msh*, como se vê no código abaixo, com a importação de um arquivo hipotético *file.msh*. Uma vez que a malha é importada, é possível extrair informações a seu respeito, como coordenadas de cada ponto e número de elementos.

```
import meshio

msh = meshio.read('file.msh')
X = msh.points[:,0]
Y = msh.points[:,1]

for cell in msh.cells:
    if cell.type == "triangle":
        IEN = cell.data
    elif cell.type == "line":
        IENBound = cell.data

cc = np.unique(IENBound.reshape(IENBound.size))
ne = len(IEN)
npoints = len(X)
```

Veja que, no código acima, as variáveis X e Y armazenam as coordenadas x e y , respectivamente, de cada ponto da malha. Os pontos que correspondem aos nós de contorno são armazenados na variável cc e o número de elementos da malha pode ser obtido pelo tamanho da matriz IEN . O número de pontos da malha pode ser dado pelo tamanho (número de elementos) da variável X (nesse caso, também seria possível utilizar a variável

Y com o mesmo fim). A matriz de estabilização $[K_{est}]$ não é fixa, isto é, é uma matriz que varia para cada iteração do problema.

4.2 Criação das matrizes globais

O algoritmo para criação das matrizes globais também foi explorado no capítulo anterior, sendo escrito em Python da seguinte forma:

```
for e in range (0,ne):
    #criação das matrizes elementares (kelem, kxelem, kyelem
    ...)
    for ilocal in range(0,3):
        iglobal = IEN[e,ilocal]
        for jlocal in range(0,3):
            jglobal = IEN[e,jlocal]

            K[iglobal,jglobal] += kelem[ilocal,jlocal]
            KX[iglobal,jglobal] += kxelem[ilocal,jlocal]
            KY[iglobal,jglobal] += kyelem[ilocal,jlocal]
            KXY[iglobal,jglobal] += kxyelem[ilocal,jlocal]
            M[iglobal,jglobal] += melem[ilocal,jlocal]
            GX[iglobal,jglobal] += gxelem[ilocal,jlocal]
            GY[iglobal,jglobal] += gyelem[ilocal,jlocal]
            Kest[iglobal,jglobal] += kestelem[ilocal,jlocal]
```

Observe que está indicada, para cada iteração e , a criação das matrizes elementares necessárias (para cada elemento da malha, haverá uma matriz elementar k_x^e , k_y^e , k_{xy}^e etc correspondente). A construção dessas matrizes já foi discutida no Capítulo 3.

Observe, no entanto, que a matriz $[K_{est}]$, diferente das matrizes $[K]$, $[M]$, $[G_X]$ e $[G_Y]$, varia no tempo, isto é, conforme entramos na etapa de executar o algoritmo de resolução do problema, a matriz $[K_{est}]$ será diferente para cada iteração dessa etapa. Em outras palavras, a matriz $[K_{est}]$ é construída da mesma maneira que as outras matrizes citadas, porém, ela varia conforme avançamos no tempo.

Assim como para as outras, utilizamos uma matriz k_{est}^e menor para construir a matriz global $[K_{est}]$ seguindo os mesmos passos iterativos para chegar até essa matriz global. No entanto, observe: a matriz $[K_{est}]$ é formada por termos de velocidade média em cada elemento que variam no tempo. Basta lembrar que a matriz elementar k_{est}^e é formada por:

$$k_{est}^e = \bar{u} \frac{\Delta t}{2} [\bar{u} k_x^e + \bar{v} k_{xy}^e] + \bar{v} \frac{\Delta t}{2} [\bar{u} k_{xy}^e + \bar{v} k_y^e] \quad (235)$$

Em outras palavras: as matrizes $[K]$, $[M]$, $[G_X]$ e $[G_Y]$ são construídas antes de

executarmos o algoritmo de resolução do problema (quarta etapa), enquanto a matriz $[K_{est}]$ é reconstruída para cada iteração dessa etapa citada.

4.3 Imposição das condições de contorno

A imposição das condições de contorno é feita observando-se a variável cc que armazena os nós de contorno. Nesse problema, serão utilizadas condições de Dirichlet, isto é, serão especificados valores determinados para os quais os nós de contorno devem assumir.

O Gmsh ordena os nós da malha por índices. No caso dos nós de contorno, essa ordenação tem uma relação direta com a forma como se constrói a malha. Isso pode ser observado, antes da criação da malha, habilitando-se a visualização dos *Node labels* no Gmsh.

Veja por exemplo o caso da malha abaixo:

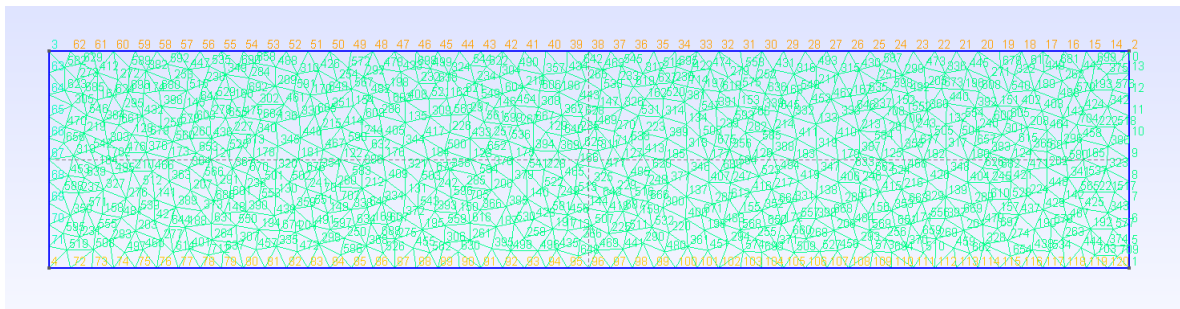


Fig. 6: Malha do *Gmsh*

Para uma malha retangular como essa, digamos que os valores no contorno da extremidade superior fossem todos iguais. Da mesma forma, digamos que os valores no contorno de todas as outras extremidades (esquerda, inferior e direita) também fossem iguais, porém diferentes do contorno superior. Para criar uma variável que armazene os valores de contorno corretamente, seria preciso observar com atenção a ordenação dos nós de contorno (nós da extremidade da direita vêm primeiro, seguidos pela extremidade superior, esquerda e inferior, nesse exemplo mostrado).

4.4 Algoritmo de resolução do problema

O algoritmo de resolução do problema segue os seguintes passos:

1. Avaliação do deslocamento da gotícula
2. Cálculo da condição de contorno de vorticidade;
3. Solução da equação de transporte da vorticidade;
4. Solução da equação para função corrente;

5. Cálculo do campo de velocidades;
6. Imposição das condições de contorno da velocidade.
7. Solução da equação de movimento da gotícula

Vamos detalhar cada etapa desse algoritmo, mostrando sua relação com o que já foi apresentado no capítulo anterior. Deve-se destacar que este algoritmo se baseia no desacoplamento das equações que descrevem o problema, o que permite que se introduza o valor de uma variável obtida em uma sub-etapa do algoritmo em uma sub-etapa seguinte e assim consecutivamente.

4.4.1 Avaliação do deslocamento da gotícula

Para um instante de tempo $t + \Delta t$, teremos que a nova posição da gotícula será dada por:

$$x^{n+1} = x^n + v_x^n \Delta t \quad (236)$$

$$y^{n+1} = y^n + v_y^n \Delta t \quad (237)$$

Observe que v_x^n e v_y^n são as velocidades da gotícula em uma iteração n qualquer.

4.4.2 Cálculo da condição de contorno de vorticidade

Uma vez que, antes da inicialização desse algoritmo, já foram impostas as condições de contorno de velocidade, podemos determinar as condições de contorno de vorticidade utilizando a equação:

$$[M][\omega_z] = [G_x][v] - [G_y][u] \quad (238)$$

Observe que as condições de contorno para a vorticidade não serão fixas no tempo, isto é, para cada iteração desse algoritmo, elas irão variar para cada intervalo dt escolhido.

4.4.3 Solução da equação de transporte da vorticidade

Tendo em mãos as condições de contorno para a vorticidade, pode-se então calcular a vorticidade para a próxima iteração, através da já apresentada equação:

$$\frac{[M]}{\Delta t}[w_z^{n+1}] = \left(\frac{[M]}{\Delta t} - [V][G] - \nu[K] \right) [w_z^n] - [K_{est}][w_z^n] + cc. \quad (239)$$

As condições de contorno, como se vê, são substituídas no lado direito da equação. No lado esquerdo da equação, para cada nó de contorno de posição n na variável cc , substitui-se o elemento $n \times n$ da matriz $[M]/\Delta t$ (apenas a do lado esquerdo) por 1 e preenche-se os outros elementos da linha n com zeros.

4.4.4 Solução da equação para função corrente

Diferente das condições de contorno para vorticidade, as condições de contorno de corrente são fixas no tempo. Portanto, pode-se calcular a função corrente para toda a malha para a iteração seguinte utilizando-se a já apresentada equação:

$$[K][\psi] = [M][\omega_z] + cc. \quad (240)$$

Os valores de contorno para a função corrente são substituídos no lado direito da equação. No lado esquerdo da equação, para cada nó de contorno de posição n na variável cc , substitui-se o elemento $n \times n$ da matriz $[K]$ por 1 e preenche-se os outros elementos da linha n com zeros.

4.4.5 Cálculo do campo de velocidades

O campo de velocidades é calculado através das já apresentadas equações:

$$[M][u] = [G_y][\psi] \quad (241)$$

$$[M][v] = -[G_x][\psi] \quad (242)$$

4.4.6 Imposição das condições de contorno de velocidade

Uma vez calculadas as componentes $[u]$ e $[v]$ do campo de velocidades, substitui-se mais uma vez as condições de contorno de velocidade nessas matrizes-vetor, sendo essas condições, assim como as condições de contorno para função corrente, fixas no tempo.

4.4.7 Solução da equação de movimento da gotícula

Uma vez calculadas as componentes $[u]$ e $[v]$ do campo de velocidades do ar, pode-se obter as velocidades da gotícula para a próxima iteração através das já apresentadas equações:

$$v_x^{n+1} = v_x^n + \frac{f\Delta t}{\tau_v}(u^{n+1} - v_x^n) \quad (243)$$

$$v_y^{n+1} = v_y^n + \frac{f\Delta t}{\tau_v}(v^{n+1} - v_y^n) - g\Delta t \quad (244)$$

Com isso, o *loop* do algoritmo segue para a próxima iteração, com uma nova posição da gotícula sendo calculada e assim sucessivamente.

5 Validação do código

Faremos uma validação do código construído com as instruções do capítulo anterior, voltada para a parte de formulação de corrente-vorticidade, comparando os resultados obtidos através do código com valores obtidos na literatura. Serão avaliados dois problemas: o escoamento de Poiseuille e o escoamento conhecido como *Lid-Driven Cavity Flow*.

Para o escoamento de cavidade (*Lid-Driven Cavity Flow*), será utilizada a abordagem adimensional do problema, uma vez que o trabalho utilizado como base comparativa também utiliza essa abordagem.

5.1 Escoamento de Poiseuille

O escoamento de Poiseuille entre duas placas planas será o primeiro utilizado para avaliação do código feito em Python para o modelo de corrente-vorticidade, cuja construção já foi detalhada. Trata-se de um escoamento permanente entre duas placas planas separadas por uma distância fixa.

No escoamento de Poiseuille, ambas as placas estão em repouso, sendo o movimento do fluido causado por um gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$ na direção x , paralela ao escoamento do fluido. Assim, pela condição de não-escorregamento, temos que, tanto na placa superior como na placa inferior, a velocidade do fluido é igual a zero (para ambas as componentes do seu campo de velocidades), isto é, nessas superfícies, $u = 0$ e $v = 0$.

Na região de entrada, vamos tomar a componente u como $u = 1$ e a componente v como $v = 0$. A extremidade direita é aberta, isto é, nela vale a condição de contorno de que:

$$\nabla\psi \cdot \vec{n} = 0 \quad (245)$$

Uma vez que o vetor normal na extremidade direita é $\vec{n} = (1, 0)$, temos:

$$\nabla\psi \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \cdot (1, 0) = 0 \quad (246)$$

De onde só nos resta concluir que, para a extremidade direita:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (247)$$

Relembrando que, das definições feitas anteriormente para função corrente, temos:

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (248)$$

Só nos resta concluir que para a extremidade direita, $v = 0$. Para a função corrente na extremidade esquerda, temos que há um crescimento linear, sendo $\psi = 0$ em $(0, 0)$ e $\psi = 1$ em $(0, 1)$, ou seja, $\psi = y$ para essa extremidade. Podemos visualizar as condições

de contorno da seguinte forma:

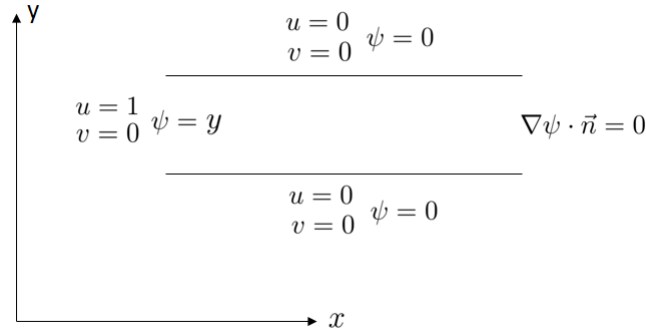


Fig. 7: Condições de contorno de Poiseuille

Para o escoamento de Poiseuille, conforme mostrado por (BRENNEN, 2016), temos que a componente u do escoamento, para a região em que o escoamento é completamente desenvolvido, é dada por:

$$u = \frac{4u_{max}}{L^2}y(L - y) \quad (249)$$

Sendo L a distância fixa entre as placas e u_{max} a velocidade máxima do escoamento, que é equivalente a $u_{max} = 1,5\bar{u}$, sendo \bar{u} a velocidade média.

Assim, tomando-se o perfil de velocidade da componente u na região em que o escoamento é completamente desenvolvido, comparou-se o resultado obtido pelo código em *Python* com o resultado teórico. Foi utilizada uma malha com 3142 elementos e de *Element size factor* equivalente a 0.05. Os resultados obtidos foram:

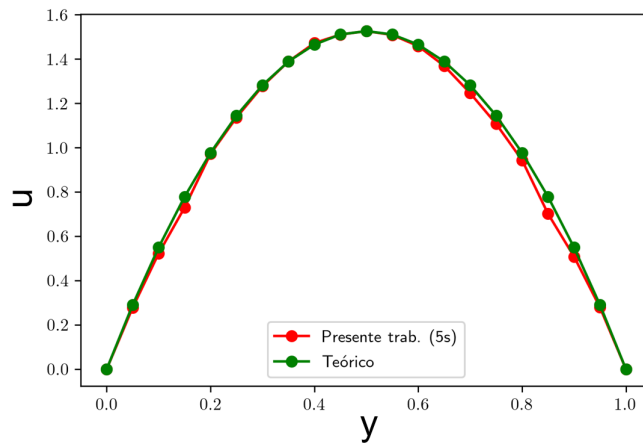


Fig. 8: Resultado obtido para o Escoamento de Poiseuille comparado a resultados da literatura

Como se vê, há rápida convergência para o resultado teórico esperado e pode-se considerar, assim, que o código obteve resultados adequados ao problema proposto.

5.2 Lid-Driven Cavity Flow

O escoamento de cavidade forçado pelo movimento de uma tampa, frequentemente tratado como *Lid-Driven Cavity Flow*, também será usado para validar os resultados numéricos obtidos pela modelagem de corrente-vorticidade já exposta, cujos resultados advêm dos códigos em *Python* construídos de maneira já detalhada.

No *Lid-Driven Cavity Flow*, temos o escoamento em uma cavidade quadrada, com ambas as componentes u e v nulas nas extremidades inferior, esquerda e direita. Por outro lado, na tampa (extremidade superior da cavidade), temos $u = 1$ e $v = 0$.

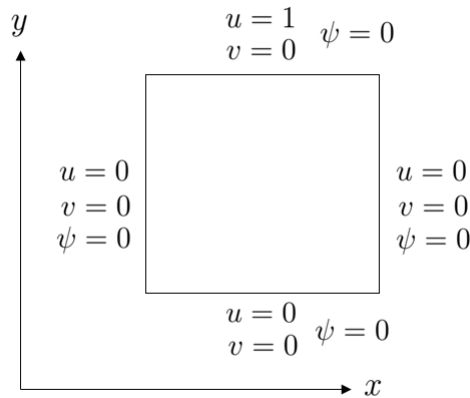


Fig. 9: Condições de contorno do Lid-Driven Cavity Flow

Como base de comparação foram tomados os resultados obtidos por (GHIA, 1982), escolhendo-se avaliar os resultados para $Re = 100$. Foi utilizada uma malha construída no *Gmsh*, com *Element size factor* de 0.03 e 2996 elementos.

(GHIA, 1982) apresentou resultados para a componente u da velocidade do escoamento, para a coordenada $x = 0.5$, variando-se apenas a coordenada y . Comparando os resultados, tem-se:

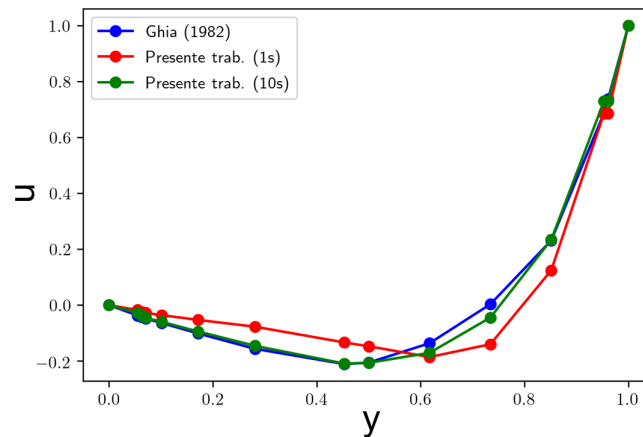


Fig. 10: Resultado obtido para o Lid-Driven Cavity Flow comparado a resultados da literatura ($x=0.5$)

Também foi feita uma comparação com os resultados obtidos para a componente v da velocidade do escoamento, para a coordenada $y = 0.5$, variando-se apenas a coordenada x . Comparando os resultados, tem-se:

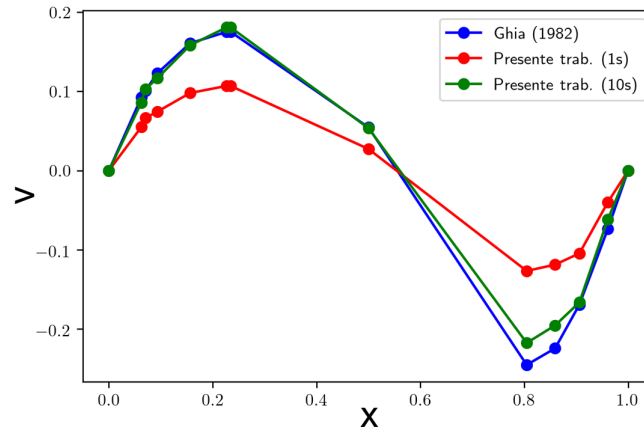


Fig. 11: Resultado obtido para o Lid-Driven Cavity Flow comparado a resultados da literatura ($y=0.5$)

Tendo em vista o que foi obtido com o código em *Python*, é possível considerar que a metodologia utilizada foi adequada para abordar esse problema.

6 Resultados

Primeiramente, é importante frisar que foram tomadas as propriedades da água (para a gotícula) a uma temperatura de $36.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ (temperatura média do corpo humano), o que está dentro da faixa de temperatura citada por (GENEVA et al., 2019) e a uma pressão de 1 bar:

- $\rho_w = 993.51\text{kg}/\text{m}^3$

O ar foi tratado como um fluido incompressível. Foi utilizado o fator f de atrito da correlação de Putnam, uma vez que essa correlação cobre os valores de Re_r verificados na execução do código. As propriedades do ar foram avaliadas a uma pressão de também 1 bar e uma temperatura de $20\text{ }^{\circ}\text{C}$:

- $\rho_{ar} = 1.14\text{kg}/\text{m}^3$
- $\mu_{ar} = 1.90 \cdot 10^{-5}\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$
- $\nu_{ar} = 1.66 \cdot 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$

Conforme exposto por (WHO, 2020), as gotículas respiratórias apresentam tamanho superior a 5-10 microns (μm) - diâmetros inferiores a $5\mu\text{m}$ caracterizam os aerossóis. Uma vez que o presente trabalho se concentra na transmissão via gotículas respiratórias, foram considerados apenas diâmetros superiores a $5 \cdot 10^{-6}\text{ m}$. (BOZIC et al., 2021) mostra que a maior parte das gotículas expelidas pelo ser humano têm diâmetro entre 20 e 200 microns (μm). Assim sendo, para as diferentes geometrias abordadas, a avaliação será feita utilizando os seguintes diâmetros:

- $D_1 = 90\mu_m$
- $D_2 = 100\mu_m$ (média entre o diâmetro máximo e mínimo considerados)
- $D_3 = 110\mu_m$

A aceleração da gravidade será tomada como $9.81\text{ m}/\text{s}^2$. A velocidade de partida da gotícula utilizada será a velocidade de um espirro, por representar um caso crítico para medidas de distanciamento social. Naturalmente, nas malhas utilizadas, a velocidade de partida do ar na região da boca também será esta mesma velocidade. Conforme considerado por (XIE, 2007), a velocidade de um espirro, chamada aqui de u_e , será considerada tal que:

$$u_e = 50\text{m}/\text{s} \quad (250)$$

Serão utilizadas diferentes geometrias (diferentes malhas), uma vez que o deslocamento de uma gotícula a partir da boca de um ser humano pode se dar em situações muito diferentes, o que permite uma variedade de geometrias a serem escolhidas, o que inclui o próprio arranjo dos nós que foram o rosto ou boca humanos.

A primeira geometria, na primeira seção deste capítulo, utiliza apenas uma rosto

humano em um canal fechado. A segunda geometria, na segunda seção, utiliza um canal fechado, mas dessa vez contendo um corpo inteiro no seu contorno da esquerda, como será mostrado. A terceira e última geometria utiliza um canal fechado, mais uma vez com um corpo no seu contorno esquerdo, porém dessa vez com um pé direito de 2,5m.

6.1 Canal fechado, apenas rosto

Essa malha busca criar uma geometria com uma cabeça, com condições de contorno semelhantes ao problema do escoamento de *Poiseuille*, isto é, com duas placas planas, avaliando o deslocamento da gotícula em condições já citadas. A apresentação da malha com suas condições de contorno é mostrada abaixo:

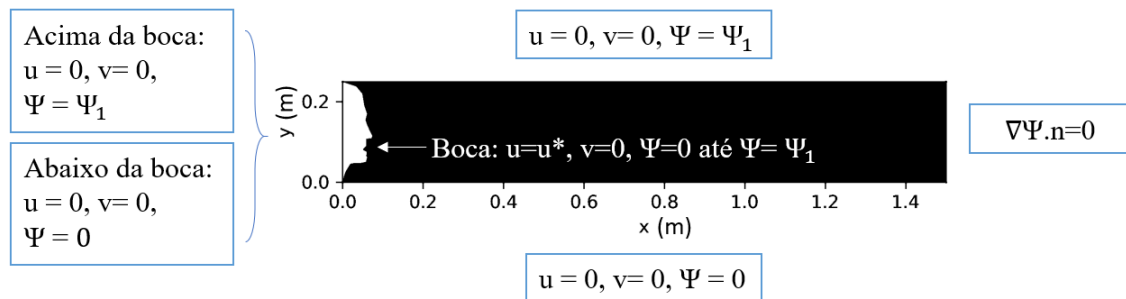


Fig. 12: Condições de contorno - Geometria 1

A malha utilizada possui *Element size factor* igual a 0.1, com 355 pontos e 616 elementos.

6.1.1 Condições de contorno

As condições de contorno utilizadas, nos nós de contorno da malha, foram:

- Nós referentes à boca:
 - $u = u^*$ (velocidade u_e adimensionalizada)
 - $v = 0$
 - $\psi = 0$ até $\psi = \psi_1$
- Extremidade esquerda (acima da boca):
 - $u = 0$
 - $v = 0$
 - $\psi = \psi_1$

Extremidade esquerda (abaixo da boca):

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\psi = 0$

- Extremidade superior:

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\psi = \psi_1$

- Extremidade inferior:

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\psi = 0$

Para essa geometria e condições de contorno, temos a seguinte configuração de função corrente:

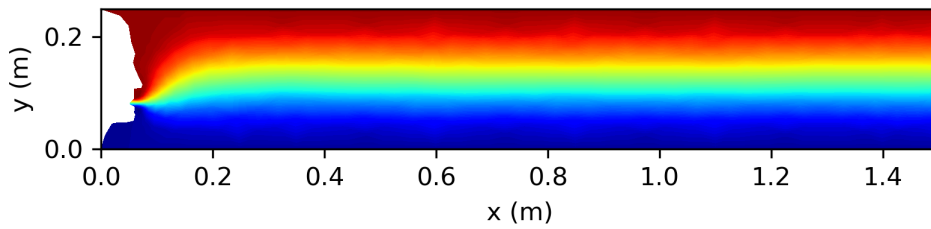


Fig. 13: Função corrente (após 0.1s) - Geometria 1

Para a componente u da velocidade do escoamento:

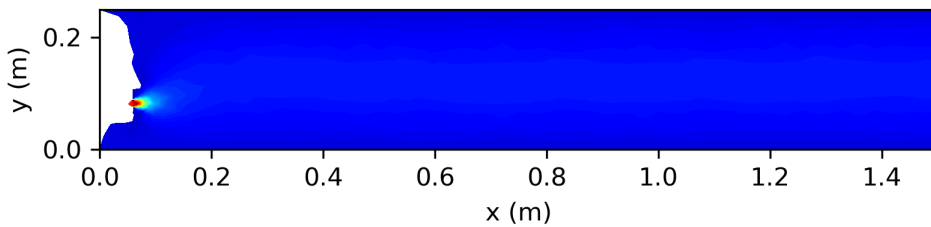


Fig. 14: Componente u da velocidade (após 0.1s) - Geometria 1

Para a componente v da velocidade do escoamento:

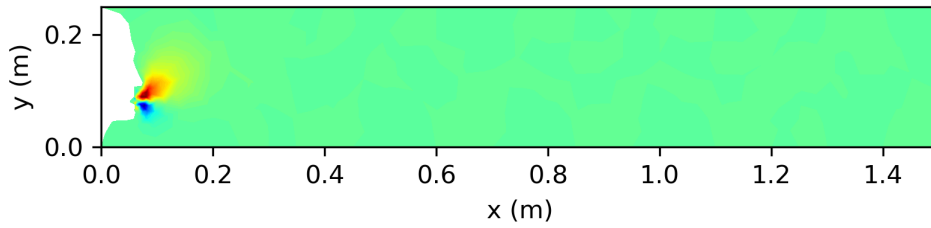


Fig. 15: Componente v da velocidade (após 0.1s) - Geometria 1

E finalmente, para a vorticidade:

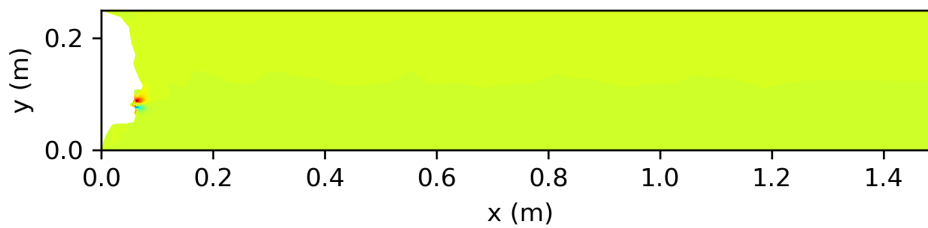


Fig. 16: Vorticidade (após 0.1s) - Geometria 1

6.1.2 Resultados obtidos [$D=90e-06(m)$]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca até o limite permitido pela geometria da malha, isto é, até $x = 1.5m$ ou $y = 0$. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

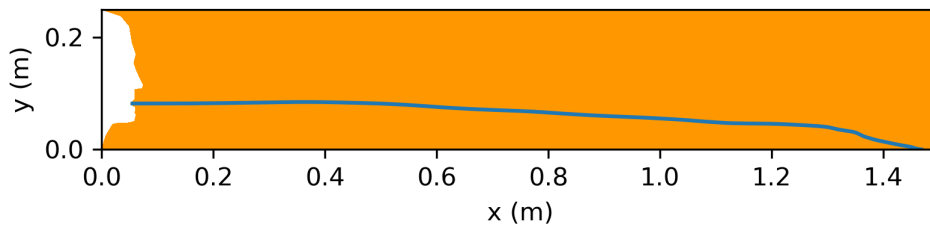


Fig. 17: Trajetória da gotícula - Geometria 1 - 90 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.053, 0.08201)
- Coordenadas finais (m): (1.4684s, 0.0)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.5006s

6.1.3 Resultados obtidos [D=100e-06(m)]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca até o limite permitido pela geometria da malha, isto é, até $x = 1.5\text{m}$ ou $y = 0$. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

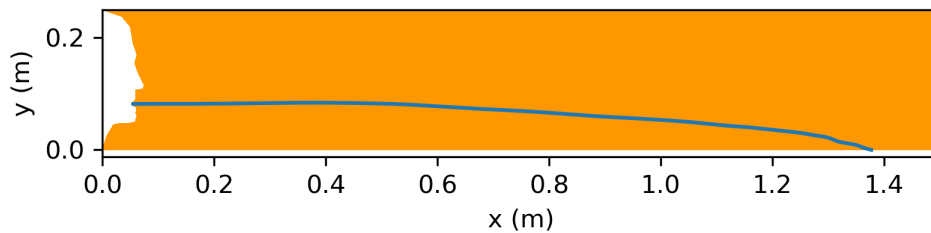


Fig. 18: Trajetória da gotícula - Geometria 1 - 100 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.053, 0.08201)
- Coordenadas finais (m): (1.377, 0.0)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.4618s

6.1.4 Resultados obtidos [D=110e-06(m)]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca até o limite permitido pela geometria da malha, isto é, até $x = 1.5\text{m}$ ou $y = 0$. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

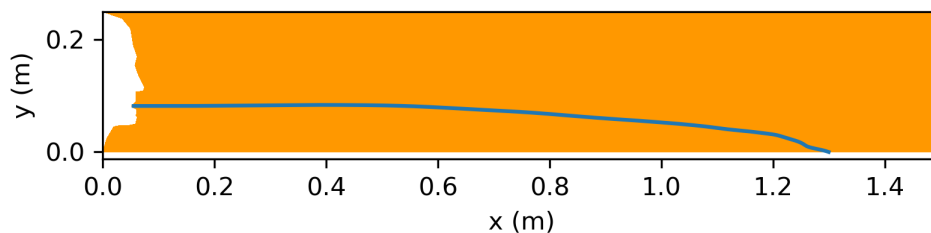


Fig. 19: Trajetória da gotícula - Geometria 1 - 110 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.053, 0.08201)
- Coordenadas finais (m): (1.299, 0.0)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.3918s

6.2 Canal fechado, corpo

Essa malha busca criar uma geometria com um corpo, com condições de contorno também semelhantes ao problema do escoamento de *Poiseuille*, com a base e o topo isolados.

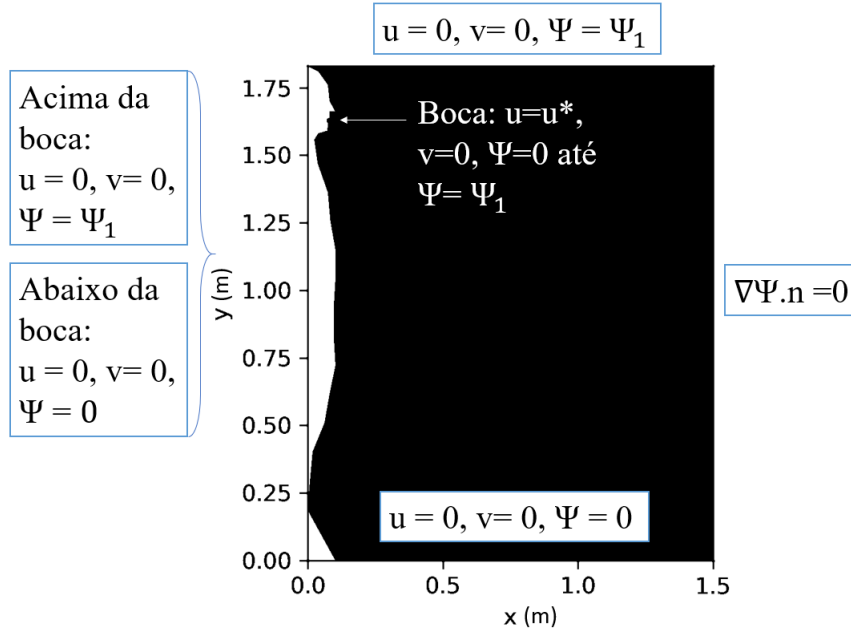


Fig. 20: Condições de contorno - Geometria 2

A malha utilizada possui *Element size factor* igual a 0.05 e 3576 elementos, além de 1868 pontos.

6.2.1 Condições de contorno

As condições de contorno utilizadas, nos nós de contorno da malha, foram:

- Nós referentes à boca:
 - $u = u^*$ (velocidade u_e adimensionalizada)
 - $v = 0$
 - $\psi = 0$ até $\psi = \psi_1$
- Extremidade esquerda (acima da boca):
 - $u = 0$
 - $v = 0$
 - $\psi = \psi_1$

Extremidade esquerda (abaixo da boca):

- $u = 0$
- $v = 0$

- $\psi = 0$
- Extremidade superior:
 - $u = 0$
 - $v = 0$
 - $\psi = \psi_1$
- Extremidade inferior:
 - $u = 0$
 - $v = 0$
 - $\psi = 0$

Para essa geometria e condições de contorno, temos a seguinte configuração de função corrente:

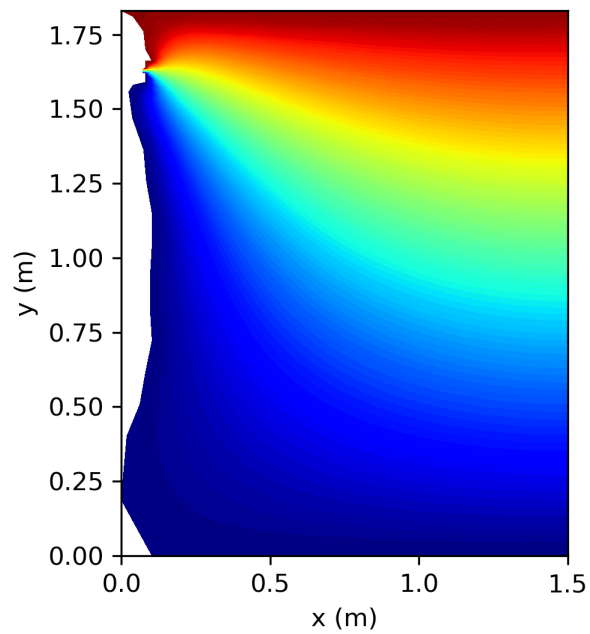


Fig. 21: Função corrente (após 0.1s) - Geometria 2

Para a componente u da velocidade do escoamento, temos:

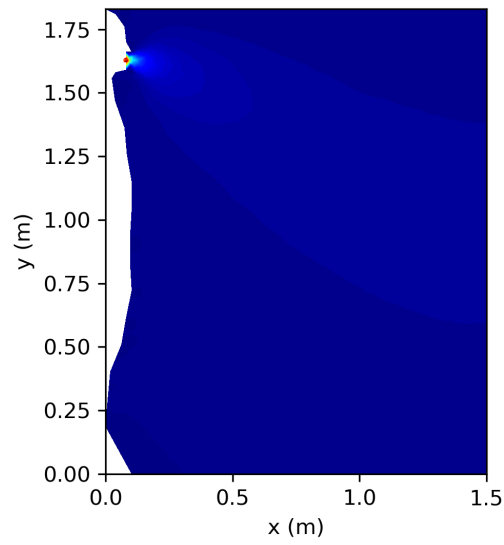


Fig. 22: Componente u da velocidade (após 0.1s) - Geometria 2

Para a componente v da velocidade do escoamento, temos:

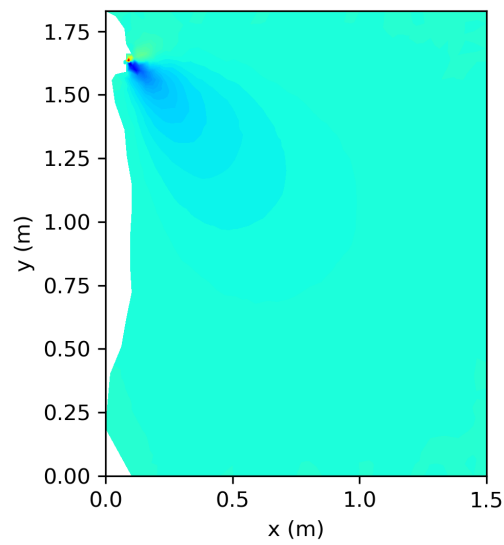


Fig. 23: Componente v da velocidade (após 0.1s) - Geometria 2

Para a vorticidade, temos:

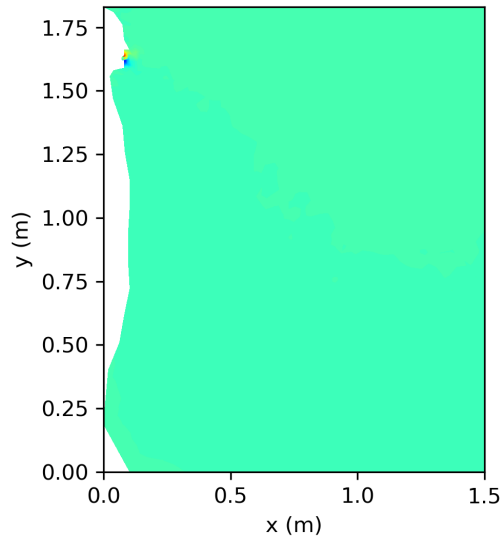


Fig. 24: Vorticidade (após 0.1s) - Geometria 2

6.2.2 Resultados obtidos [D=90e-06(m)]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca após um intervalo tempo de 0.35 segundo. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

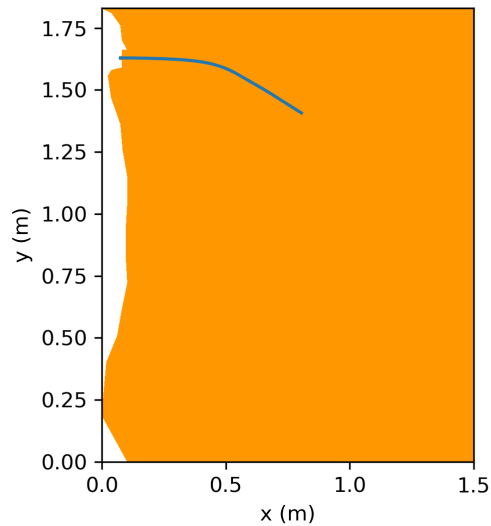


Fig. 25: Trajetória da gotícula - Geometria 2 - 90 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.07205, 1.6291)
- Coordenadas finais (m): (0.8052, 1.4072)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.35s

6.2.3 Resultados obtidos [D=100e-06(m)]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca após um intervalo tempo de 0.35 segundo. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

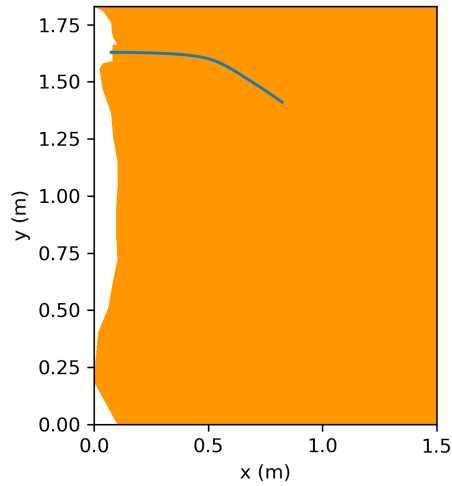


Fig. 26: Trajetória da gotícula - Geometria 2 - 100 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.07205, 1.6291)
- Coordenadas finais (m): (0.8235, 1.4107)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.35s

6.2.4 Resultados obtidos [D=110e-06(m)]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca após um intervalo tempo de 0.35 segundo. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

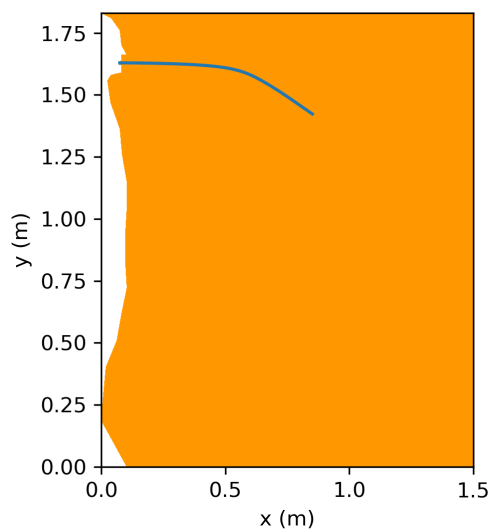


Fig. 27: Trajetória da gotícula - Geometria 2 - 110 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.07205, 1.6291)
- Coordenadas finais (m): (0.85108, 1.4229)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.35s

6.3 Canal fechado, corpo, pé direito de 2,5m

Essa malha busca criar uma geometria com um corpo, com condições de contorno absolutamente semelhantes às da subseção anterior, porém em um ambiente com pé direito de 2,5m, novamente com a base e o topo isolados.

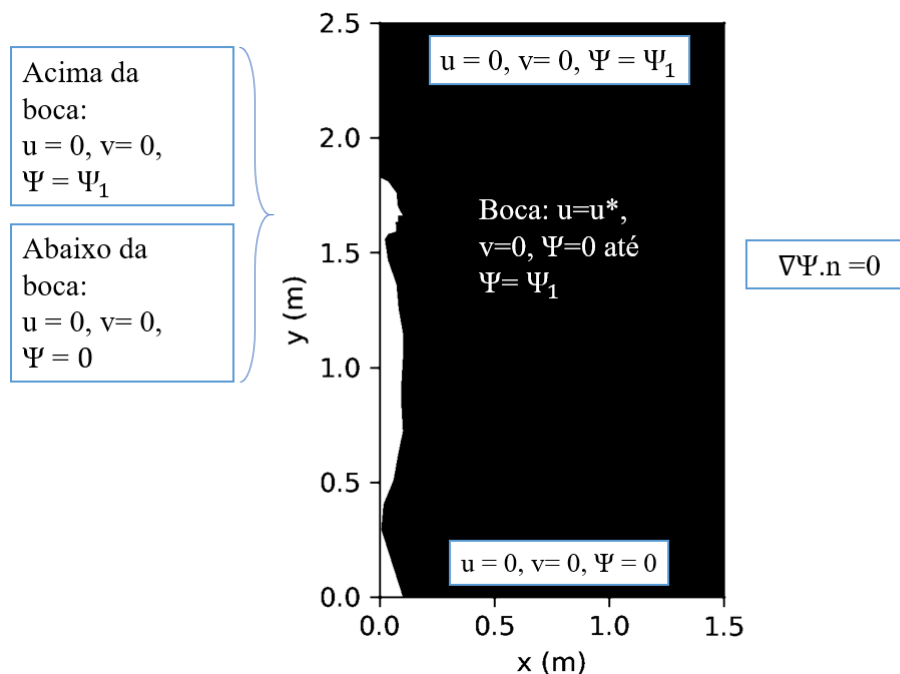


Fig. 28: Condições de contorno - Geometria 3

A malha utilizada possui *Element size factor* igual a 0.09 e 1932 elementos, além de 1024 pontos.

6.3.1 Condições de contorno

As condições de contorno utilizadas, nos nós de contorno da malha, foram:

- Nós referentes à boca:
 - $u = u^*$ (velocidade u_e adimensionalizada)
 - $v = 0$
 - $\psi = 0$ até $\psi = \psi_1$

- Extremidade esquerda (acima da boca):

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\psi = \psi_1$

Extremidade esquerda (abaixo da boca):

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\psi = 0$

- Extremidade superior:

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\psi = \psi_1$

- Extremidade inferior:

- $u = 0$
- $v = 0$
- $\psi = 0$

Para essa geometria e condições de contorno, temos a seguinte configuração de função corrente:

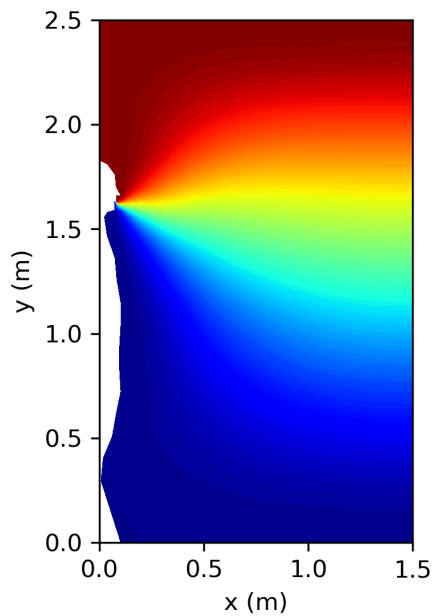


Fig. 29: Função corrente (após 0.1s) - Geometria 3

Para a componente u da velocidade do escoamento, temos:

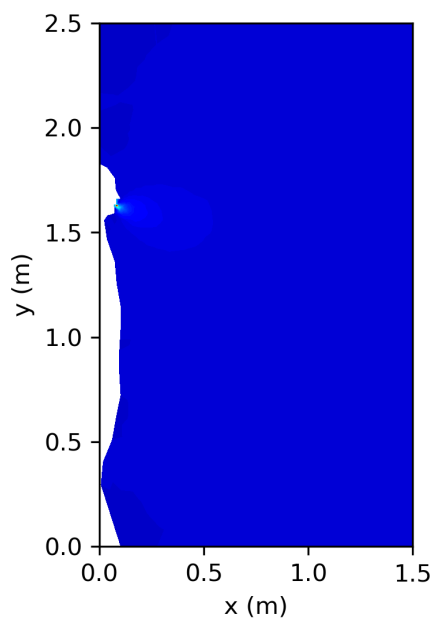


Fig. 30: Componente u da velocidade (após 0.1s) - Geometria 3

Para a componente v da velocidade, temos:

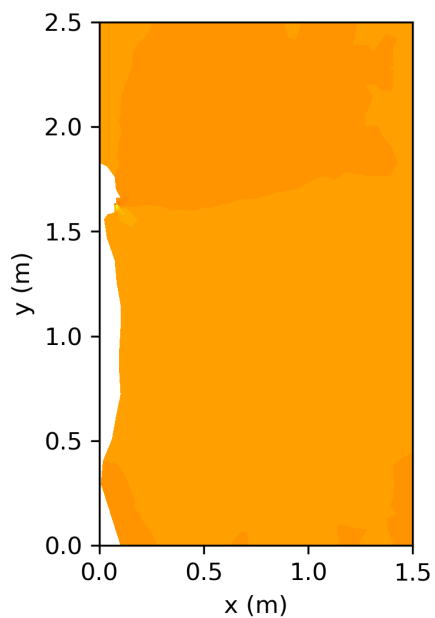


Fig. 31: Componente v da velocidade (após 0.1s) - Geometria 3

Para a vorticidade, temos:

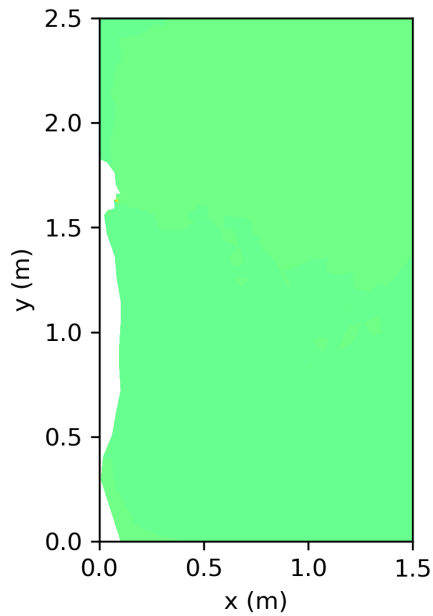


Fig. 32: Vorticidade (após 0.1s) - Geometria 3

6.3.2 Resultados obtidos [D=90e-06(m)]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca após um intervalo tempo de 0.35 segundo. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

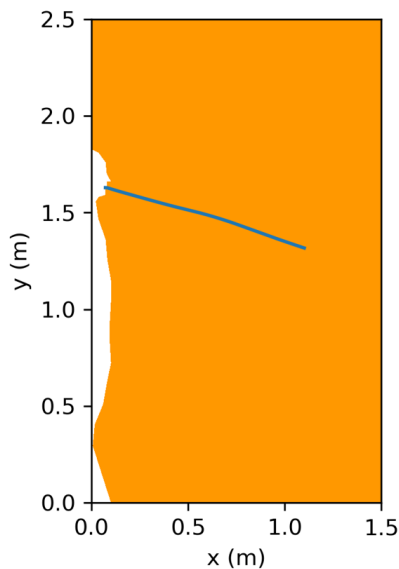


Fig. 33: Trajetória da gotícula - Geometria 3 - 90 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.07205, 1.6291)
- Coordenadas finais (m): (1.10118, 1.31704)

- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.35s

6.3.3 Resultados obtidos [$D=100e-06(m)$]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca após um intervalo tempo de 0.35 segundo. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

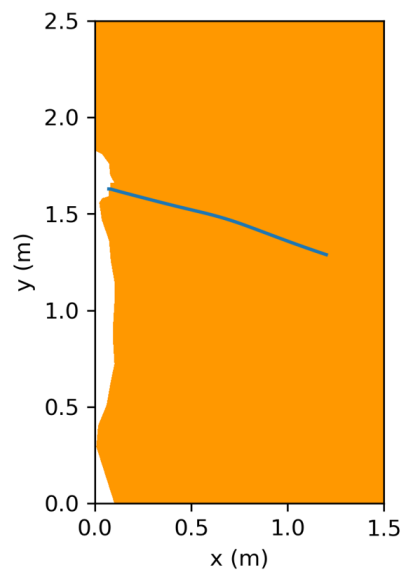


Fig. 34: Trajetória da gotícula - Geometria 3 - 100 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.07205, 1.6291)
- Coordenadas finais (m): (1.13305, 1.3155)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.35s

6.3.4 Resultados obtidos [$D=110e-06(m)$]

A figura abaixo mostra a trajetória da gotícula, desde a partida da boca após um intervalo tempo de 0.35 segundo. A trajetória da gotícula é representada pela linha azul:

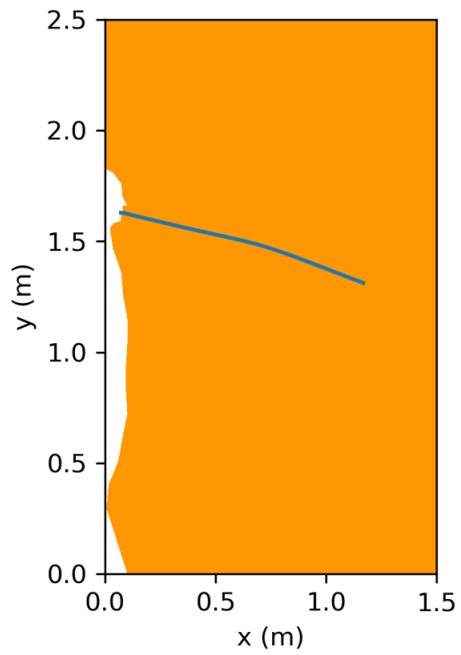


Fig. 35: Trajetória da gotícula - Geometria 3 - 110 microns

Dados do movimento da gotícula:

- Coordenadas de partida (m): (0.07205, 1.6291)
- Coordenadas finais (m): (1.16866, 1.31243)
- Tempo entre coordenadas iniciais e finais: 0.35s

7 Conclusão

A partir de equações elementares de Mecânica dos Fluidos, o presente trabalho buscou modelar o movimento do ar expelido pela boca de um ser humano após um espirro, para que se verificasse como se dá o movimento de uma gotícula expelida no contexto da pandemia de COVID-19. Dessa forma, foi utilizado o Método de Elementos Finitos, aplicado à Dinâmica de Fluidos Computacional, sob o esquema do Método de Taylor-Galerkin, que objetiva à eliminação de oscilações espúrias. Utilizou-se o Método de Euler como forma de trabalhar o deslocamento da gotícula de maneira iterativa.

O código desenvolvido em *Python* foi avaliado para problemas bem conhecidos de dinâmica de fluidos (*Poiseuille* e *Lid-Driven Cavity Flow*), assim, comparou-se os resultados obtidos para esses problemas utilizando-se o código do presente trabalho. Os resultados obtidos, uma vez comparados a resultados da literatura, se mostraram satisfatórios.

Assim, foram construídas três malhas com diferentes geometrias para observar como se deu o movimento do ar em torno da boca e também o movimento da gotícula ao ser por ela expelida. Foram escolhidos três diâmetros diferentes para as gotículas, com o intuito de se verificar que o código pode ser utilizado para diferentes tamanhos. Como resultado comum às três malhas, vale observar como a gotícula cai para uma altura abaixo da altura da região da cabeça em um intervalo inferior a 1 segundo.

Deve-se notar que, para a primeira geometria desenvolvida, as gotículas tiveram um alcance maior em um intervalo de tempo menor, se compararmos com as outras duas geometrias que incluem o corpo para além da cabeça. Também para a primeira geometria, nota-se que o alcance das gotículas de diâmetro maior foi menor do que para as gotículas de diâmetro menor. Para as últimas duas geometrias, verifica-se que, para o mesmo intervalo de tempo de 0,35 segundo, gotículas maiores possuem um alcance maior para diâmetros maiores e um alcance menor para diâmetros menores.

Os resultados obtidos para a última geometria corroboram os resultados verificados por (CHENG et al., 2020), em que foi investigado o movimento de gotículas para um ambiente fechado (com gotículas de diferentes diâmetros), mostrando que, em um ambiente fechado e com espirro, o alcance de uma gotícula da ordem de diâmetro utilizada no presente trabalho pode ser superior a 1,0m. A variabilidade da temperatura ambiente pode ser estudada em trabalhos futuros como feito por (BAVI et al., 2020).

É preciso observar, no entanto, que simulações visando estudar o movimento de gotículas expelidas por um ser humano, em diferentes situações, podem utilizar um número arbitrário de gotículas, por assim dizer, eventualmente considerando até uma interação (choque) entre essas gotículas, com modelos mais sofisticados e com uso de computadores com maior capacidade de processamento.

Pode-se ressaltar que o problema de deslocamento de gotículas do presente trabalho

também utilizou um modelo que aproximou a gotícula de uma esfera rígida. Um modelo que considere a evaporação das gotículas ou a troca de calor entre elas e o ar pode ser utilizado em futuros trabalhos, o que afetará diretamente o coeficiente de atrito entre a gotícula e o ar a cada iteração, uma vez que a geometria da gotícula poderá se modificar a cada iteração do problema estudado.

Uma vez que o presente trabalho está situado no contexto da pandemia de COVID-19, é preciso lembrar que o conhecimento a respeito da transmissão do vírus tem sofrido mudança de paradigmas desde o início da pandemia, tendo a OMS reconhecido, em 2020, a importância da transmissão por aerossóis, por exemplo, o que não foi considerado nesse trabalho.

Por último, vale destacar que, em um futuro trabalho, é possível fazer uso de outros esquemas que não o Método de Taylor-Galerkin, que possui a desvantagem de apresentar instabilidades para determinados valores dentro das variáveis utilizadas na montagem do problema a nível numérico. Em outras palavras, para cada geometria utilizada, foram feitos ajustes nos valores de *input* para que o código apresentasse resultados estáveis, posteriormente fazendo uma conversão dos valores obtidos através das relações adimensionais conhecidas na montagem do problema.

Referências bibliográficas

- [1] WANG, J., CAO, B., et al., "Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China", *The Lancet*, v. 395, n. 10223, pp. 497-506, Jan. 2020.
- [2] WEISS, S.R., LEIBOWITZ, J.L., *Advances in Virus Research*, Elsevier, Estados Unidos, 1^a ed., 2011.
- [3] YANG, D., LEIBOWITZ, J.L., "The structure and functions of coronavirus genomic 3' and 5' ends", *Virus Research*, v. 206, pp. 120-133, Ago. 2015.
- [4] CHERRY, J. D., KROGSTAD, P., "SARS: The First Pandemic of 21st Century", *Pediatric Research*, v. 56, n. 1, pp. 1-5, Mar. 2004.
- [5] ZAKI, A. M., BOHEEMEN, S. van, BESTEBROER, T. M., OSTERHAUS, A. D. M. E., FOUCHIER, R. A. M., "Isolation of a Novel Coronavirus from a Man with Pneumonia in Saudi Arabia", *The New England Journal of Medicine*, v. 367, pp. 1814-1820, Nov. 2012.
- [6] CHRISTIAN, M. D., POUTANEN, S. M., LOUTFY, M. R., MULLER, M. P., LOW, D. E., "Severe Acute Respiratory Syndrome", *Clinical Infectious Diseases*, v. 38, n. 10, pp. 1420-1427, Mai. 2004.
- [7] WILDER-SMITH, A., CHIEW, C. J., LEE, V. J., "Can we contain the COVID-19 outbreak with the same measures as for SARS?", *The Lancet*, v. 20, n. 5, pp. 102-107, Mar. 2020.
- [8] REZAEI, N., LOTFI, M., HAMBLIN, M. R., "COVID-19: Transmission, prevention, and potential therapeutic opportunities", *Clinica Chimica Acta*, v. 508, pp. 254-256, Mai. 2020.
- [9] GUPTA, K. K., MEEK, J. L., "A brief history of the beginning of the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.39, pp. 3761-3774, 1996.
- [10] REPIN, S., "One Hundred Years of the Galerkin Method", *Computational Methods in Applied Mathematics*, v. 17, n. 3, pp. 351-357, Jul. 2017.
- [11] GALERKIN, B., "Beams and plates. Series in some questions of elastic equilibrium of beams and plates", *Vestnik Ingenerov*, v. 19, pp. 897-908, 1915.
- [12] COURANT, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations", *Bulletin of the American Mathematical Society*, v.49, pp. 1-23, 1942.
- [13] ARGYRIS, J .H., "Energy theorems and structural analysis", *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, v. 26, n. 10, pp. 347-356, 1954.
- [14] CLOUGH, R. W., "Original Formulation of the Finite Element Method", *Proc. ASCE Structures Congress Session on Computer Utilization in Structural Eng.*, São Francisco, Mai. 1989, pp. 1-10.

- [15] ZIENKIEWICZ, O. C., CHEUNG, Y. K., *The Finite Element Method in Continuum and Structural Mechanics*, McGraw-Hill, Estados Unidos, 1^a ed., 1965.
- [16] CHRISTIE, I., GRIFFITHS, D. F., MITCHELL, A. R., ZIENKIEWICZ, O. C., "Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, n. 6, p. 1389–1396, 1976.
- [17] HUGHES, T. J. R., BROOKS, A. N., "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 32, n. 1-3, pp. 199-259, 1982.
- [18] DONEA, J., "A Taylor-Galerkin method for convective transport problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 20, pp. 101-119, Jan. 1984.
- [19] MAHROUS, E., JARAUTA, A., CHAN, T., RYZHAKOV, P., WEBER, A. Z., ROY, R. V., SECANELL, M., "A particle finite element based model for droplet spreading analysis", *Physics of Fluids*, v. 32, n.4, 2020.
- [20] LUO, L., XIAO-PING, W., "An efficient Finite Element Method for simulation of droplet spreading on a topologically rough surface", *Journal of Computational Physics*, v. 349, pp. 233-252, 2017.
- [21] SHADLOO-JAHROMI, A., BAVI, O., HEYDARI, M. H., KHARATI-KOOPAEE, M., AVAZZADEH, Z., "Dynamics of respiratory droplets carrying SARS-CoV-2 virus in closed atmosphere", *Results in Physics*, v. 19, 2020.
- [22] CHENG, C. H., CHOW, C. L., W. K. CHOW, "Trajectories of large respiratory droplets in indoor environment: a simplified approach", *Building and Environment*, v. 183, 2020.
- [23] VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W., *The finite volume method*, Pearson, Inglaterra, 2^a ed., 2007.
- [24] ÇENGEL, Y. A., CIMBALA, J. M., *Mecânica dos fluidos - fundamentos e aplicações*, McGrawHill, 1^a ed, 2006.
- [25] FOX, R. W., MCDONALD, A. T., PRITCHARD, P. J., *Introdução à mecânica dos fluidos*, LTC, Estados Unidos, 8^a ed., 2010.
- [26] BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, E. N., *Transport phenomena*, Wiley, Estados Unidos, 2^a ed., 2002.
- [27] SHIROLKAR, J. S., COIMBRA, C. F. M., MCQUAY, M. Q., "Fundamental aspects of modeling turbulent particle dispersion in dilute flows", *Prog Energy Combust. Sci.*, v. 22, pp. 363-399, 1996.

- [28] ASHGRIZ, N., "Handbook of atomization and sprays - theory and applications", Springer, Inglaterra, 2011.
- [29] SCHILLER, L., NAUMANN, A., "Über die grundlegenden berechnungen bei der schwerkraftauf-bereitung", *Vereines Deutscher Ingenieure*, v. 318, 1933.
- [30] PUTNAM, A. "Integratable form of droplet drag coefficient", *ARS Journal*, v. 31, pp. 1467-1468, 1961.
- [31] CLIFT, R., GAUVIN, W. H., "The motion of particles in turbulent gas streams", *Proc. Chemeca*, v.1, pp. 14-28, 1970.
- [32] LEWIS, R. W., NITHIARASU, P., SEETHARAMU, K., *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*, Wiley, Inglaterra, 2004.
- [33] GIACCHINI, B. L., "Uma breve introdução ao Método dos Elementos Finitos", 2012.
- [34] DONEA, J., GIULIANI, S., LAVAL, H., "Time-accurate solution of advection-diffusion problems by finite elements", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 45, pp. 123-145, 1984.
- [35] BRENNEN, C. E., "An intern book on fluid dynamics", 2016.
- [36] GHIA, U., GHIA, N., SHIN, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, v.48, pp. 387-411, 1982.
- [37] GENEVA, I. I., CUZZO, B., FAZILI, T., JAVAID, W., "Normal Body Temperature: A Systematic Review", *Open Forum Infectious Diseases*, v. 6, n. 4, Abr. 2019.
- [38] "Transmission of SARS-CoV-2: implications for infection prevention precautions: scientific brief, 09 July 2020". *World Health Organization*, 2020. Disponível em: <https://apps.who.int/iris/handle/10665/333114>. Acesso em: 02 de junho de 2021.
- [39] BOZIC, A., KANDUC, M., "Relative humidity in droplet and airborne transmission of disease", *Journal of Biological Physics*, v. 47, pp. 1-29, Fev. 2021.
- [40] XIE, X., LI, Y., CHWANG, A. T. Y., HO P. L., SETO, W. H., "How far droplets can move in indoor environments – revisiting the Wells evaporation–falling curve", *Indoor air*, v. 17, pp. 211-225, 2007.