



Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

ANÁLISE CFD DO ESCOAMENTO EM UMA CÉLULA DE TESTES PARA MOTORES AERONÁUTICOS

Camila Borges Santos

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Rio de Janeiro
Outubro de 2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Departamento de Engenharia Mecânica

DEM/POLI/UFRJ



ANÁLISE CFD DO ESCOAMENTO EM UMA CÉLULA DE TESTES PARA
MOTORES AERONÁUTICOS

Camila Borges Santos

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Aprovada por:

Prof. Gustavo Rabello dos Anjos,

Prof. Gustavo C. R. Bodstein,

Prof. Antonio MacDowell de Figueiredo,

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

OUTUBRO DE 2022

Borges Santos, Camila

Análise CFD do escoamento em uma célula de testes para motores aeronáuticos/ Camila Borges Santos. – Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica, 2022.

XIV, 79 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Mecânica, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 76 – 77.

1. . 2. . 3. . I. Rabello dos Anjos, Gustavo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Curso de Engenharia Mecânica. III. Análise CFD do escoamento em uma célula de testes para motores aeronáuticos.

*Aos meus pais pelo dom da vida
e pelo amparo ao longo desses
anos.*

Agradecimentos

É redundante repetir a excelência da URFJ como instituição de ensino. Sou muito grata pela oportunidade de ter desfrutado das aulas, laboratórios, projetos e do dia a dia que esta universidade tem a oferecer. Dentro do campus do Fundão passei por inúmeros desafios que me fizeram aprender lições valiosas para minha vida como engenheira. Por isso, meu primeiro agradecimento vai para a UFRJ e para os professores do Departamento de Engenharia Mecânica.

Gostaria de agradecer especialmente a dois professores: José Luis e Gustavo Rabello. O primeiro por me fornecer a experiência mais importante dos meus anos de faculdade, meu duplo diploma na França. E o segundo por me orientar e me guiar neste último projeto para a finalização dos meus anos acadêmicos.

Meus dois anos de duplo diploma me proporcionaram ensinamentos pessoais e profissionais que me moldam como a engenheira que estou me tornando. Agradeço a instituição Sigma Clermont por isso. Foram nesses anos que obtive minha primeira experiência profissional. Tive a sorte de encontrar um mentor que me ensinou a por em prática o que aprendi na sala de aula. Obrigada Damien Gueners pela paciência e dedicação.

Minha primeira experiência em uma empresa de engenharia me permitiu conhecer o mundo dos motores aeronáuticos e os desafios desse setor. Agradeço ao meu tutor de estágio Thomas Gauduchon pelo apoio e por ter me apresentado esse mundo. Agradeço também ao meu mais recente mentor, Marcelo Geraldo, que me inspirou na escolha do tema deste projeto e continuou a me guiar nesse universo da aviação, compartilhando comigo tanto conhecimento e sabedoria. Por causa de vocês consegui encontrar mais propósito no meu trabalho e profissão.

Foi uma longa jornada até aqui. Tive a sorte de ter o apoio de meus amigos e minha família durante esta jornada. Essas pessoas me ajudaram a moldar meus va-

lores e minha ética, fatores tão importantes para a vida profissional. Primeiramente, agradeço aos meus pais, Sidnei e Conceição que me deram apoio e suporte para que eu pudesse seguir a carreira que escolhi. Agradeço também ao meu namorado Bruno Boggio, que me apoiou e me ajudou a tomar minhas decisões e entender os caminhos que quero seguir.

Por fim, quero agradecer aos meus amigos. Obrigada José Lima e Victor Santomé, amigos que tornaram o meu tempo longe de casa, dois anos inesquecíveis. Agradeço também pela parceria nos estudos e projetos, aprendi muito com a nossa troca. Obrigada aos meus parceiros de UFRJ, Leonardo Voltarelli, Lucas Coelho, Luiz Pirrone e Matheus Lucchesi, pelos debates nos estudos, risadas nos cafés e discussões nos almoços que tornaram minha experiência de universidade mais leve e completa.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

ANÁLISE CFD DO ESCOAMENTO EM UMA CÉLULA DE TESTES PARA MOTORES AERONÁUTICOS

Camila Borges Santos

Outubro/2022

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um estudo realizado sobre a influência dos elementos de uma célula de testes para motores aeronáuticos no comportamento do escoamento de ar. O presente estudo propõe um método de análise econômico e simples, utilizando a linguagem Python e o Método dos Elementos Finitos para a obtenção de conhecimentos úteis para o desenvolvimento de projetos de novas células de testes. Dessa forma, após um estudo do estado da arte dos bancos de prova existentes, uma série de geometrias com diferentes composições de silenciadores, defletores, tela porosa e dutos foram construídas no software Gmsh. O escoamento nestas geometrias foi calculado e os perfis de velocidade na área de sucção do motor foram comparados, junto as distorções de velocidade, a fim de compreender a influência de seus componentes.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Mechanical Engineer

CFD ANALYSIS OF THE FLOW IN A TEST CELL FOR AIRCRAFT ENGINES

Camila Borges Santos

October/2022

Advisor: Gustavo Rabello dos Anjos

Department: Mechanical Engineering

This thesis aims to present a study conducted on the influence of the elements of an aeronautical test cell on the behavior of its airflow. The present study proposes an economic and simple method of analysis using the Python language and the Finite Element Method to obtain useful knowledge for the development of new test cell projects. Therefore, after a study of the state of the art of the existing test cells, a series of geometries with different compositions of silencers, deflectors, porous screen and ducts were built in the Gmsh software. The flow on these geometries were calculated and velocity profiles in the suction area of the engine were compared, along with velocity distortions, in order to understand the influence of its components.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivo	3
1.3 Estrutura	3
2 Células de testes para motores aeronáuticos	4
2.1 Funcionamento dos testes e parâmetros de performance	4
2.1.1 Razão de Bypass	5
2.1.2 Distorção da velocidade	7
2.2 Geometria da célula de testes	7
2.2.1 Estrutura da entrada de ar	8
2.2.2 Seção de trabalho	9
2.2.3 Estrutura da saída de ar	10
3 Dinâmica dos Fluidos Computacional	12
3.1 escoamento de fluidos	13
3.1.1 Princípio da conservação de massa	13
3.1.2 Princípio da conservação da Quantidade de Movimento	14
3.1.3 Formulação Corrente - Vorticidade	15
3.2 Métodos Computacionais	19
3.2.1 Diferenças Finitas	20
3.2.2 Elementos Finitos	21

4	Metodologia	31
4.1	Importação da Malha	31
4.2	Montagem das matrizes globais	33
4.3	Inicialização da Vorticidade	34
4.4	Algoritmo	35
4.5	Condições de contorno	36
4.6	Visualização dos resultados	41
4.7	Verificação do código	42
5	Resultados e Discussões	46
5.1	Hipóteses adotadas	46
5.2	Entrada de Ar	48
5.2.1	Geometria 1: Entrada de ar com 7 silenciadores e sem defletores	50
5.2.2	Geometria 2: Entrada de ar com 7 silenciadores e 4 defletores	53
5.2.3	Geometria 3: Entrada de ar com 9 silenciadores e 4 defletores	57
5.2.4	Geometria 4: Entrada de ar com 9 silenciadores e 7 defletores	59
5.2.5	Geometria 5: Entrada de ar com 9 silenciadores, 7 defletores e tela porosa	62
5.2.6	Análise da distorção da velocidade na Entrada de Ar	64
5.3	Saída de Ar	66
5.3.1	Geometria 6: Saída de ar com distância de 0.5 entre motor e duto de diâmetro 0.5	68
5.3.2	Geometria 7: Saída de ar com distância de 0.25 entre motor e duto de diâmetro 0.5	69
5.3.3	Geometria 8: Saída de ar com distância de 0.75 entre motor e duto de diâmetro 0.5	70
5.3.4	Geometria 9: Saída de ar com distância de 0.5 entre motor e duto de diâmetro 0.3	71
6	Conclusões	73
	Referências Bibliográficas	76
A	Imposição da razão de Bypass nas geometrias de saída de ar	78

Lista de Figuras

1.1	Banco de provas da GE Aviation em Três Rios [1]	2
1.2	Banco de provas da GE Aviation em Três Rios em escala utilizado para testes experimentais	2
2.1	Esquema de uma célula de teste para motores aeronáuticos [2]	5
2.2	Esquema de célula de testes bidimensional [3]	8
2.3	Conjunto de silenciadores utilizado no modelo criado na tese [4]	8
2.4	Tela porosa e defletores ao fundo no banco de provas da GE Aviação em Três Rios	9
2.5	Vista da seção de trabalho pelo duto (célula da GE Aviação em Três Rios)	10
3.1	Escoamento através de um carro de fórmula 1 no ANSYS FLUENT ([5])	12
3.2	Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares [5]	13
3.3	Linhas de Corrente dentro de um tubo [6]	15
3.4	Geometria com uma malha não uniforme refinada em torno do quadrado no seu interior [7]	20
3.5	Dois elementos triangulares do domínio	28
4.1	Exemplo de geometria construída no Gmsh	32
4.2	Geometria representativa de uma seção axial de uma tubulação	38
4.3	Software Paraview com exemplo de visualização de solução	42
4.4	Condições de contorno do escoamento de Hagen-Poiseuille	43
4.5	Resultados de vorticidade, função corrente e velocidades para o escoamento de Hagen Poiseuille	43

4.6	Malhas criadas no Gmsh para o escoamento de Hagen-Poiseuille . . .	44
4.7	Comparação do perfil de velocidades calculado com a equação de Poiseuille e com o código python desenvolvido neste trabalho para varias malhas	45
5.1	Exemplo de geometria da entrada de ar (eixos em metros)	49
5.2	Geometria dos silenciadores (valores em metros)	49
5.3	Geometria dos defletores(valores em metros)	49
5.4	Geometria de um elemento da tela porosa	50
5.5	Geometria e malha 1: 7 silenciadores sem defletores	51
5.6	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 1 com $Re = 100$	51
5.7	Linha vertical em $x = 1.3$ de onde os resultados de velocidade na direção da corrente da geometria 1 foram extraídos	52
5.8	Gráfico de velocidade a direção da corrente na área de sucção do motor para geometria 1	52
5.9	Geometria e malha 2: 7 silenciadores e 4 defletores	53
5.10	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 2 com $Re = 100$	54
5.11	Linhas horizontais de onde os resultados da velocidade na direção da corrente na geometria 2 foram extraídos	55
5.12	Gráficos de velocidade na direção da corrente após os silenciadores da geometria 2 para diferentes números de Reynolds	55
5.13	Linhas verticais de onde os resultados de velocidade na direção da corrente da geometria 2 foram extraídos	56
5.14	Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 2 para diferentes números de Reynolds	56
5.15	Geometria e malha 3: 9 silenciadores e 4 defletores	57
5.16	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 3 com $Re = 100$	58
5.17	Gráficos de velocidade na direção da corrente após os silenciadores da geometria 3 para diferentes números de Reynolds	58

5.18	Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 3 para diferentes números de Reynolds	59
5.19	Geometria e malha 4: 9 silenciadores e 7 defletores	60
5.20	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 4 com $Re = 100$	60
5.21	Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 4 para diferentes números de Reynolds	61
5.22	Geometria e malha 5: 9 silenciadores, 7 defletores e tela porosa	62
5.23	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 5 com $Re = 100$	63
5.24	Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 5 para diferentes números de Reynolds	63
5.25	Geometria da saída de ar estudada: representação do motor e duto ampliador	67
5.26	Geometria 6 e malha da primeira configuração de saída de ar	68
5.27	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 6	68
5.28	Geometria 7 e malha da segunda configuração de saída de ar	69
5.29	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 7	70
5.30	Geometria 8 e malha da terceira configuração de saída de ar	70
5.31	Resultados de vorticidade(ω), função corrente(ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 8	71
5.32	Geometria 9 e malha da quarta configuração de saída de ar	72
5.33	Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 9	72

Lista de Tabelas

4.1	Malhas Testadas	44
5.1	Distorção de velocidade da Geometria 1	64
5.2	Distorções de velocidade após silenciadores	65
5.3	Distorções de velocidade após defletores	65
5.4	Distorção de velocidade após tela porosa	66

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A indústria aeronáutica tem a segurança como valor principal. Um exemplo prático disso é o cuidado com o funcionamento correto dos motores. A fim de garantir que os novos motores estão aptos para vôo, os chamados "*new makes*" passam por uma sequência de testes após a finalização da montagem. Além disso, durante o ciclo de vida de um motor, ele pode ser testado diversas vezes, visto que após as revisões periódicas em oficinas de manutenção, onde são desmontados e montados novamente para troca de peças ou reparos, os motores também são testados para garantir que estão qualificados para vôo. Estes testes são realizados em células de testes, também chamadas de banco de provas, como apresentada na figura 1.1, construídas para garantir testes estáveis, replicáveis e equilibrados.



Figura 1.1: Banco de provas da GE Aviation em Três Rios [1]

Atualmente, estes bancos de provas são desenvolvidos segundo normas existentes (como por exemplo, [8]) e dados obtidos a partir de testes realizados em um protótipo em escala, como o apresentado na figura 1.2. A construção deste protótipo com o motor em escala é um processo caro que permite poucas variações de testes. Além disso, os dados obtidos sobre o ar na célula são adquiridos em pontos específicos, sem uma compreensão completa do escoamento.

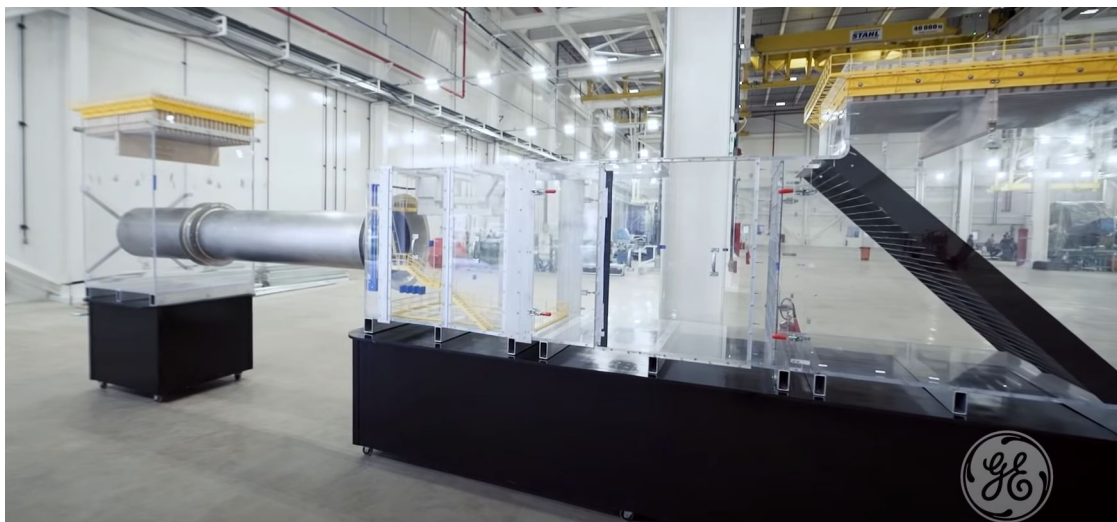


Figura 1.2: Banco de provas da GE Aviation em Três Rios em escala utilizado para testes experimentais

Ademais, no mercado da aviação comercial atual, os motores mais novos buscam uma solução menos poluente e mais econômica e conseqüentemente possuem

diamêtros maiores (LEAP-1A tem 1980mm de diâmetro, enquanto CFM56-5, seu antecessor, tem 1734mm de diâmetro). Essa tendência ocasionou uma busca por células de testes capazes de acomodar estes novos motores.

Essa busca por novas soluções atrelada ao atual processo, longo e custoso, de concepção de bancos de provas criam uma motivação para a simplificação de tal técnica.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo propor uma metodologia computacional para analisar o escoamento de ar em uma célula de testes para motores aeronáuticos, compreendendo o impacto local de cada componente da célula. Esta metodologia computacional é uma proposta mais econômica e permite a execução de um maior número de testes mais rapidamente. Dessa forma, o método proposto neste trabalho permite um maior entendimento da influência dos elementos da célula no escoamento, servindo como uma base de conhecimento prévia ao método construtivo utilizado atualmente.

Diferentes composições da célula de testes são analisadas e alguns parâmetros utilizados na indústria para verificar a performance da célula são calculados. Dessa forma será possível fazer uma análise qualitativa das diferentes geometrias estudadas.

1.3 Estrutura

Este trabalho está organizado da seguinte forma: inicialmente, o estado da arte dos bancos de prova de motores aeronáuticos é apresentado, em um segundo momento, uma revisão de conceitos importantes da mecânica dos fluidos e métodos computacionais é feita; em seguida a metodologia utilizada é explicada e validada; por fim as simulações realizadas e os resultados obtidos são demonstrados e discutidos, motivando propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Células de testes para motores aeronáuticos

No capítulo a seguir, o funcionamento das células de testes é apresentado. Em seguida, a sua geometria é detalhada, dando foco em cada componente da célula, comentando seu formato e funcionalidade.

2.1 Funcionamento dos testes e parâmetros de performance

Os bancos de prova de motores aeronáuticos são grandes estruturas, construídas para simular o motor em condições de vôo. Inicialmente acionado com o uso de ar comprimido, o motor entra em funcionamento no banco de provas. A queda de pressão gerada entre o *fan* e o primeiro estágio do compressor ocasiona a sucção do ar pela entrada da célula e dá início ao escoamento. O ar é então expelido pelo motor e retorna ao ambiente pela saída da célula. Durante os testes, dados do motor como temperatura, pressão, velocidade de rotação, vibração e consumo de combustível são recuperados. Estes dados permitem uma avaliação de desempenho do motor, indicando possíveis danos ocorridos na montagem.

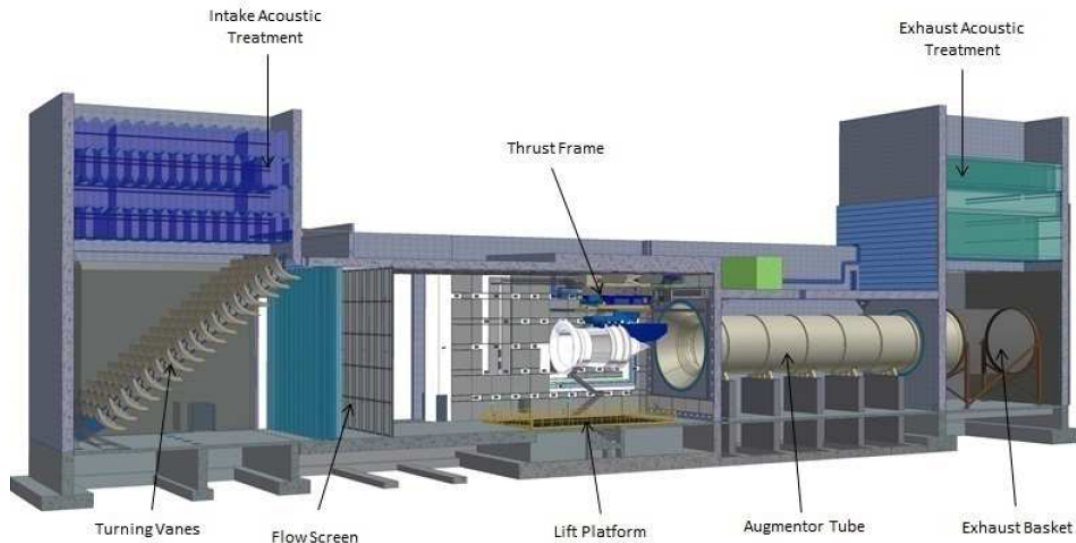


Figura 2.1: Esquema de uma célula de teste para motores aeronáuticos [2]

Para que os testes funcionem corretamente, é preciso evitar possíveis perturbações no escoamento, como o aparecimento de vórtices e a re-ingestão do fluxo de exaustão. A presença de vórtices na área de sucção do motor é um grande problema, pois não só altera os resultados dos testes, como também pode causar danos nas peças por erosão. De acordo com [9], a formação de vórtices nos elementos da célula pode ser forte o suficiente para soltar partes destes elementos que serão sugados pelo motor. A sucção destas partículas, chamada na indústria aeronáutica de *Foreign Object Damage* (FOD), pode ser catastrófica para o funcionamento do motor. Já a re-ingestão de gases de exaustão é indesejada pois causa flutuação na sucção do motor que está sendo testado. Segundo [4], com menos oxigênio e uma maior temperatura, a quantidade de combustível utilizada é alterada, gerando uma não uniformidade nos testes.

Dois parâmetros principais são utilizados para medir a performance de uma célula: a razão de bypass e a distorção da velocidade. Estes permitem uma certa previsão dos problemas mencionados.

2.1.1 Razão de Bypass

De acordo com [4], razão de *bypass* (BPR) da célula de testes é o parâmetro que mede a quantidade de ar extra no escoamento, ou seja, é a razão da vazão mássica do ar que não entra no motor, chamado fluxo de *bypass*, pela vazão mássica do motor.

Durante um teste, a vazão mássica do ar entrando no motor varia de acordo com a sua potência, porém a razão de *bypass* usada para avaliar a performance da célula será sempre calculada para a condição de potência máxima. Na potência máxima a vazão mássica de entrada de ar no motor também é máxima, o que gera o caso mais crítico de BPR. A razão de *bypass* dos bancos de prova deve ser no mínimo 80%, de acordo com [4] . Caso o BPR não alcance este valor, as consequências podem ser severas.

$$BPR = \frac{\dot{m}_{célula} - \dot{m}_{motor}}{\dot{m}_{motor}} \times 100\% \quad (2.1)$$

Uma célula com seção quadrada de lado 10m e velocidade uniforme de entrada de ar igual a 20m/s, resultaria em uma vazão mássica de 2440kg/s. O motor CF6 da General Eletric que produz uma vazão mássica aproximada de 1470kg/s resultaria em um BPR de 66%. Já o motor CFM56-5B da CFM Internacional, com uma vazão mássica aproximada de 400kg/s, resultaria em um BPR de 510% (vazões mássicas retiradas de [10]). Esta grande variação de vazão mássica entre diferentes motores evidencia como a performance de um banco de provas depende sobretudo do motor que está operando. Enquanto este banco de provas de 10m produz um BPR insuficiente para o motor CF6, ele produz um BPR maior que o necessário para o motor CFM56-5B.

Uma das problemáticas de uma razão de *bypass* muito pequena é o aparecimento de vórtices. Os vórtices são formados pela proximidade do escoamento com uma superfície estática. Uma célula muito pequena em comparação ao motor testado provoca um fluxo de *bypass* baixo e causa uma maior aproximação das paredes da célula com a área de ingestão do motor. Assim, a probabilidade da entrada de vórtices no motor é ampliada.

Outra problemática é a re-ingestão de gases de exaustão. Se a quantidade de ar que passa por fora do motor for muito pequena, a probabilidade do motor succionar o fluxo de exaustão cresce.

2.1.2 Distorção da velocidade

A distorção da velocidade também é uma medida de performance da célula de testes. Ela mede a razão de variação máxima do valor da velocidade pela sua média, em uma seção da célula próxima da área de ingestão do motor (de 5 a 10 metros do motor, de acordo com [4]). Durante os testes, a velocidade é obtida em uma série de pontos (por volta de 25) por meio de sensores.

$$u_{dist} = \frac{u_{m\acute{a}x} - u_{m\acute{i}n}}{u_{m\acute{e}dio}} \times 100\% \quad (2.2)$$

De acordo com [4] a distorção de velocidade deve ser menor que 30%. Um valor maior que esse indica que o teste realizado na célula não é confiável pois indica grande variação de velocidade em um escoamento, aumentando a probabilidade de formação de vórtices.

2.2 Geometria da célula de testes

Existem alguns tipos de geometria de células de testes, aquelas em formato de tubo, com a entrada e saída de ar posicionadas verticalmente, aquelas em formato de "U" com a entrada e saída de ar orientadas para cima, posicionadas horizontalmente, como o representado na figura 2.1 e também algumas células que são uma mistura destes dois modelos, com a entrada horizontal e saída vertical, em formato de "L", por exemplo.

Os bancos de prova com entrada de ar posicionada verticalmente demandam grande cuidado para evitar acidentes, qualquer pessoa ou objeto próximos à entrada de ar correm risco de sucção, dada a alta potência do motor. Dessa forma, as células em "U" são mais utilizadas atualmente por serem mais seguras. Assim, este trabalho irá focar na estrutura deste tipo de célula.

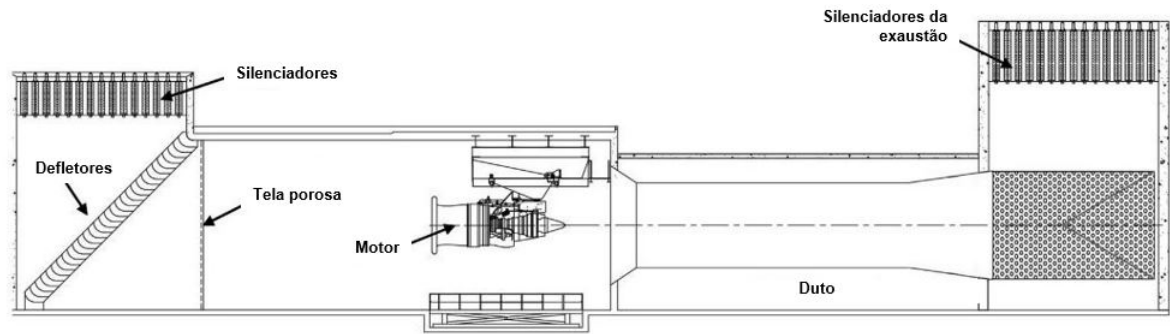


Figura 2.2: Esquema de célula de testes bidimensional [3]

Como é possível ver no esquema da figura 2.2 e também na figura 2.1, um banco de provas é composto por diversos elementos. Estes fazem parte de 3 grandes seções: a entrada de ar, a seção de trabalho e a saída de ar. Cada um destes tem funções diferentes e afetam o escoamento de ar de formas distintas, o que será detalhado a seguir.

2.2.1 Estrutura da entrada de ar

A entrada de ar, parte da célula a esquerda do motor no esquema 2.2, tem o objetivo de reduzir o ruído e prover um escoamento uniforme para o motor. Ela é constituída por 3 elementos: os silenciadores, os defletores e a tela porosa. Estes serão detalhados a seguir:

- **Silenciadores** : são os primeiros elementos da entrada de ar, indicados na figura 2.2. Como o próprio nome indica, a função destes elementos é tratar o ruído do motor. Normalmente os silenciadores são organizados em arranjos ordenados, como mostrado na figura 2.3. De acordo com [4], cada fileira possui cerca de 6 a 10 silenciadores. A célula de CHCEC possui 3 fileiras, enquanto a célula de HANOVER possui 9, por exemplo.

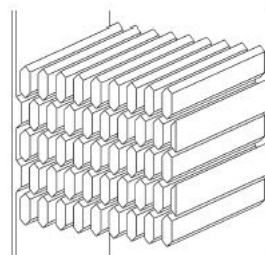


Figura 2.3: Conjunto de silenciadores utilizado no modelo criado na tese [4]

- **Defletores:** como indicados na figura 2.2, são o segundo obstáculo encontrado pelo escoamento na entrada de ar. A função deles é rotacionar o escoamento 90° e proporcionar um escoamento uniforme ao motor. Eles são compostos por uma única geometria, repetida diversas vezes. De acordo com [4], o banco de provas de CHCEC possui 6 fileiras de defletores, enquanto a célula de CENCO em Hanover possui 12 fileiras.
- **Tela porosa:** próximo elemento do escoamento no esquema 2.2 e representada na figura 2.4. O seu objetivo é evitar a passagem de objetos, ou animais, como pássaros, impedindo que o motor succione algo que possa danificá-lo ou tornar o teste não confiável. Ou seja, previne o FOD.



Figura 2.4: Tela porosa e defletores ao fundo no banco de provas da GE Aviação em Três Rios

2.2.2 Seção de trabalho

A seguir está a seção de trabalho, área onde o motor fica posicionado. Ela pode ser vista na figura 1.1. O motor é suportado por um mecanismo que tem o objetivo de simular a flexibilidade da asa. Abaixo dele, existe também uma plataforma de elevação usada pelos operadores para acessá-lo. Muita atenção deve ser dada a concepção dos elementos desta parte da geometria, para que eles não impactem o escoamento causando a formação de vórtices perto da área de sucção.

2.2.3 Estrutura da saída de ar

O objetivo da saída de ar, conjunto de estruturas após o motor na figura 2.2, é evitar a re-ingestão dos gases de sucção, direcionando-os para fora da célula. Além disso, também é função da saída de ar a redução de ruído e temperatura da exaustão. A estrutura desta parte da célula é composta por um duto "ampliador" e algum mecanismo de redução de ruídos, na maioria das vezes silenciadores como os da entrada de ar.

- **Duto Ampliador:** localizado logo após o motor, ele reduz o ruído e tem o objetivo de capturar os gases de exaustão do motor, evitando a re-ingestão destes. O fluxo periférico da célula, ou fluxo de *bypass*, se mistura a exaustão do motor neste duto, gerando um fluxo de saída resfriado ([11]). Em um segundo momento, o fim deste duto deve redirecionar o escoamento para a saída de ar. Em muitos casos, como mostrado em [4], e na figura 2.2 o final deste tubo é abaixo do *outlet* da célula e possui furos e uma seção final em forma de cone, que ajuda a dispersar o escoamento, redirecionando-o. Entretanto, existem outras formas de geometrias de exaustão, como aquelas que usam pás defletoras equivalentes as utilizadas na entrada de ar. O diâmetro de tubo usado na indústria varia, mas de acordo com [4], a razão entre a altura (ou largura) da seção de trabalho e o diâmetro do tubo é entre 1.95-2.5:1. Um diametro muito pequeno de tubo aumenta muito a pressão nesta região e pode assim causar uma recirculação do fluxo e então uma re-ingestão dos gases de exaustão.



Figura 2.5: Vista da seção de trabalho pelo duto (célula da GE Aviação em Três Rios)

- **Silenciadores:** último elemento do esquema 2.1, utilizado para reduzir ruídos e direcionar a saída do ar. Em algumas células, a saída de ar é mais longa, com o objetivo de reduzir ainda mais o ruído, como apresentado em [9]. Entretanto, o mecanismo de perda de carga pode ser diferente, como por exemplo na célula da TAP em Portugal, detalhada em [2], que usa um sistema de "dobras" na passagem do ar.

Capítulo 3

Dinâmica dos Fluidos Computacional

Neste capítulo, será feita uma revisão sobre a mecânica dos fluidos e os métodos numéricos computacionais utilizados para estudá-la.

A dinâmica dos fluidos computacional (DFC ou CFD em inglês) é uma área de conhecimento em crescimento, que visa tornar as análises de comportamento de fluidos mais simples e rápidas. Hoje o CFD complementa diversos estudos teóricos e métodos experimentais, entretanto ainda existem obstáculos, como a dificuldade de modelar escoamentos turbulentos e o próprio método numérico que traz erros ao problema.

Um exemplo de utilização deste método é mostrado na figura 3.1, onde é utilizado o software ANSYS Fluent para a resolução do escoamento. É possível ver na imagem as linhas de corrente em torno de um carro de fórmula 1. A partir desses resultados, engenheiros tem uma base para projetar carros cada vez mais eficientes, com menor arrasto e maior desempenho.

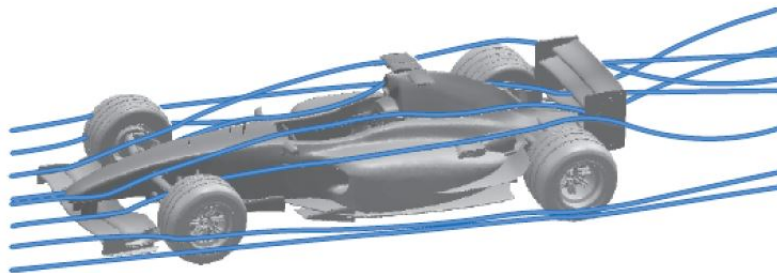


Figura 3.1: Escoamento através de um carro de fórmula 1 no ANSYS FLUENT ([5])

3.1 Escoamento de fluidos

Para as aplicações de engenharia, utiliza-se a hipótese do fluido como um contínuo. Por mais que este seja um conjunto de moléculas, é o conjunto de efeitos macroscópicos delas que traz os resultados procurados. Como consequência desta hipótese, toda propriedade do fluido tem valor definido em cada ponto do espaço, assim, suas funções como velocidade, densidade e temperatura, são funções contínuas no espaço e tempo.

3.1.1 Princípio da conservação de massa

O princípio de conservação de massa pode ser definido como visto em [5]:

$$\left[\begin{array}{c} \text{O fluxo de massa} \\ \text{através da superfície de} \\ \text{controle} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Variação da massa no} \\ \text{interior do volume de} \\ \text{controle} \end{array} \right] = 0 \quad (3.1)$$

Um exemplo de volume de controle é representado na figura 3.2 para maior entendimento:

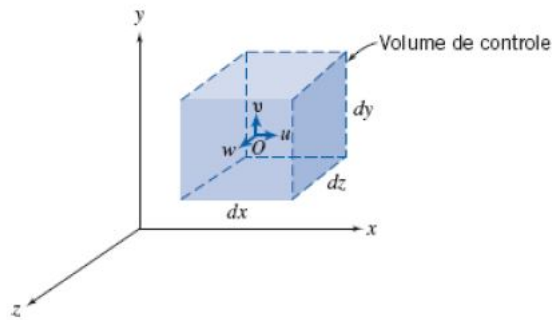


Figura 3.2: Volume de controle diferencial em coordenadas retangulares [5]

O fluxo de massa através da superfície de controle apresentada é calculado por:

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.2)$$

Enquanto a variação da massa no volume é definida como a derivada parcial da massa no tempo. A massa é descrita matematicamente, como a densidade ρ ,

multiplicado pelo volume $dx dy dz$, logo sua variação é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (3.3)$$

Juntando essas duas definições, é possível obter a equação diferencial para o princípio de conservação de massa:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

Para fluidos incompressíveis, onde a densidade é constante, a equação da continuidade pode ser simplificada para:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

Utilizando a definição de divergente, esta equação também pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.6)$$

3.1.2 Princípio da conservação da Quantidade de Movimento

O princípio de conservação da quantidade de movimento pode ser obtido a partir da segunda lei de Newton ([5]). Sendo \mathbf{P} a quantidade de movimento do sistema:

$$\mathbf{F} = \left. \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)_{\text{sistema}} \quad (3.7)$$

Pode-se escrever na forma integral:

$$\mathbf{P}_{\text{sistema}} = \int_{\text{massa(sistema)}} \mathbf{v} dm \quad (3.8)$$

Sendo o diferencial da força resultante calculada como o diferencial da massa vezes a devida da velocidade:

$$d\mathbf{F} = dm \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \quad (3.9)$$

Ao analisar as forças atuando em uma partícula fluida, torna-se possível desmembrar a força resultante \mathbf{F} em função das tensões atuantes. Escrevendo tais tensões em termos dos gradientes de velocidades e propriedades dos fluidos, é possível obter a equação abaixo, conhecida como Equação de Navier-Stokes (considerando fluidos incompressíveis).

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g \quad (3.10)$$

3.1.3 Formulação Corrente - Vorticidade

Na metodologia deste trabalho, a formulação corrente-vorticidade será utilizada. Desta forma, torna-se importante a compreensão da função corrente e da vorticidade separadamente, assim como da obtenção de tal formulação.

Função Corrente

As linhas de corrente são linhas tangentes aos vetores velocidade, representando a trajetória de um fluido em um certo instante (figura 3.3). A função corrente é o instrumento matemático utilizado para dar forma às linhas de corrente e à escala das velocidades nos pontos representativos do escoamento [5].

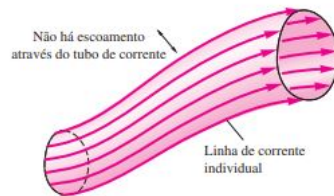


Figura 3.3: Linhas de Corrente dentro de um tubo [6]

Para o escoamento bidimensional de um fluido incompressível no plano xy , a equação da conservação de massa (ou continuidade) descrita acima, é simplificada:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.11)$$

Definindo a função corrente $\psi(u, v)$ de forma que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.12)$$

Torna-se possível definir as duas componentes da velocidade com uma só função, simplificando a resolução de alguns problemas. Como é possível ver substituindo na equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Linhas cujo ψ é constante são simplesmente linhas de corrente do escoamento. Como foi dito, tais linhas são sempre tangentes ao vetor velocidade, assim, se $d\mathbf{r}$ é o comprimento elementar de uma linha de corrente, temos a equação desta linha:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0 = (\hat{i}u + \hat{j}v) \times (\hat{i}dx + \hat{j}dy) = \hat{k}(u dy - v dx) \quad (3.14)$$

$$u dy - v dx = 0 \quad (3.15)$$

Substituindo u e v (3.12), temos a equação da linha em função de ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0 \quad (3.16)$$

Resultando em:

$$d\psi = 0 \quad (3.17)$$

Assim, para uma linha de corrente, a variação de ψ é nula, comprovando que a função corrente é realmente constante ao longo de uma linha de corrente.

Outra propriedade importante sobre as linhas de corrente é que através delas, não pode haver fluxo. Dessa forma, é possível calcular a vazão volumétrica entre quaisquer duas linhas de corrente no campo de escoamento utilizando a diferença entre as suas funções corrente:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \psi_2 - \psi_1 \quad (3.18)$$

Vorticidade

A vorticidade de um escoamento, é definida como o rotacional da velocidade. Ou seja, é uma medida de rotação do campo em questão.

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.19)$$

Considerando um escoamento bidimensional, é possível simplificá-la e deixá-la em função de ψ , com a equação 3.12. Assim, encontra-se uma relação entre a função corrente e a vorticidade:

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.20)$$

$$\omega_z = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\nabla^2 \psi \quad (3.21)$$

Formulação corrente-vorticidade

Para solucionar problemas de Dinâmica de Fluidos Computacional, a equação de Navier Stokes (3.10) é utilizada. Entretanto, esta equação conta com o campo de velocidades \mathbf{v} e o campo de pressões p como incógnitas do problema. A formulação corrente-vorticidade é uma formulação escalar que permite a resolução destes campos de forma independente, ou seja, os campos de velocidade e pressão são desacoplados. O passo a passo para a obtenção dessa formulação está demonstrado a seguir.

Primeiramente, aplica-se o operador rotacional a equação de Navier-Stokes 3.10:

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g \right) \quad (3.22)$$

A identidade vetorial abaixo será utilizada para as simplificações a seguir:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.23)$$

Assim, substituindo na equação de Navier-Stokes e aplicando o rotacional nos elementos da equação:

$$\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p + \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) + (\nabla \times g) \quad (3.24)$$

Os operadores que contém o operador gradiente se anulam, pois $\nabla \times \nabla f = 0$. O termo gravitacional também se anula, já que as derivadas parciais de uma constante são zero. Dessa forma, é possível chegar a equação abaixo:

$$\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}) = \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (3.25)$$

Introduzindo a definição de vorticidade 3.19:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.26)$$

Em seguida, será utilizada a seguinte identidade vetorial:

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (3.27)$$

Considerando um caso bidimensional, a vorticidade, definida na equação 3.20 é perpendicular ao plano xy e portanto, perpendicular a velocidade \mathbf{v} , e portanto,

ao seu gradiente, tornando o ultimo termo da equação acima nulo. Dessa forma, a equação escalar do Transporte da Vorticidade bidimensional pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega_z \quad (3.28)$$

Esta equação, junto com as equações: relação vorticidade com a função corrente 3.21 e as relações da função corrente com as velocidades u e v 3.12, compõem a formulação corrente-vorticidade e permitem o cálculo do campo de velocidade, do campo de vorticidade e da função corrente do escoamento em um dado instante.

3.2 Métodos Computacionais

Os métodos computacionais que serão descritos neste trabalho tem muito em comum. Como foi visto no início deste capítulo, para a engenharia, os fluidos são contínuos. Para obter soluções numéricas em uma região contínua é preciso dividi-la em um número finito de pontos e elementos, onde a solução será calculada. Esse conjunto de pontos e elementos é chamado de malha, um exemplo é mostrado na figura 3.4. A distribuição desses pontos é fundamental para uma boa solução.

De acordo com [7], o escoamento a ser estudado é especificado pelos seguintes fatores: escolha da malha; parâmetros do escoamento; propriedades físicas dos fluidos; condições de contorno e condições iniciais do problema. Após a obtenção da solução, os resultados precisam ser analisados antes de serem considerados corretos. Quanto maior o número de pontos, maior a chance de obter um resultado que representa o modelo, porém maior o custo operacional. Por isso, na maioria das vezes apenas aonde existe uma grande variação espacial da solução a malha é mais refinada, como é mostrado na figura 3.4.

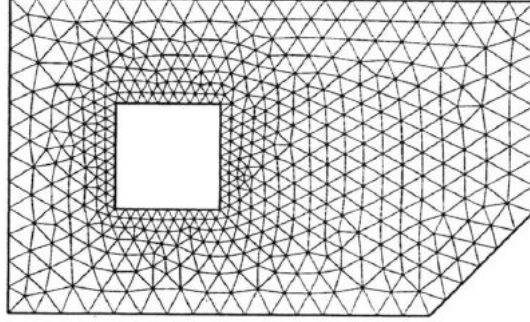


Figura 3.4: Geometria com uma malha não uniforme refinada em torno do quadrado no seu interior [7]

3.2.1 Diferenças Finitas

O primeiro método que será introduzido neste trabalho é o método das diferenças finitas. Este método usa a aproximação de derivadas por diferenças finitas para resolver o escoamento de domínios discretizados em malhas.

Na maioria das vezes a aproximação por diferenças finitas é feita através da expansão em série de Taylor e interpolação polinomial como descrito em [12]. Para uma função f , contínua no intervalo $[a, b]$ do domínio unidimensional, e que possui derivadas contínuas até a ordem N , a expansão em série de Taylor é:

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} + \dots + R_N \quad (3.29)$$

E a derivada desta função é:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - R_d^2 \quad (3.30)$$

Onde: $\Delta x = x - x_0$; R_N representa os termos de ordem superior a 2; R_d^N representa os termos da derivada de ordem superior a 2 e i são os pontos da malha.

A série de Taylor é infinita, sendo truncada a partir de certo termo. Este truncamento introduz um erro na solução do problema e deve ser levado em conta na análise de resultados. Desconsiderando as derivadas de ordem acima de 2, obtém-se a expressão em torno de x_i :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (3.31)$$

A expressão acima é uma aproximação de primeira ordem da derivada de f utilizando diferenças progressivas. Outra possibilidade é a utilização das diferenças regressivas, utilizando o termo anterior a x_i , x_{i-1} ao invés do termo posterior a x_i , x_{i+1} utilizado previamente:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \quad (3.32)$$

Além disso, é possível também utilizar as diferenças centradas, obtidas com uma combinação das diferenças progressivas e regressivas, obtendo uma ordem mais elevada. As diferenças centradas são demonstradas abaixo:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_i \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x} \quad (3.33)$$

3.2.2 Elementos Finitos

O método dos elementos finitos é um método muito utilizado para a resolução de problemas diferenciais. Inicialmente, foi muito utilizado em problemas de mecânica dos sólidos e mais recentemente vem sendo cada vez mais utilizado na área dos fluidos. Neste método, uma sequência combinatória é utilizada para caracterizar a variação de cada variável dentro dos elementos da malha, como é detalhado em [12].

Para encontrar a solução buscada, primeiramente transforma-se a equação original (forma forte), em sua forma fraca, equação integral. Para isso, é preciso multiplicar esta forma fraca por uma função chamada *função peso*, representada por w . Outras funções também satisfazem as condições para serem usadas nesta etapa, entretanto a *função peso* é interessante porque para os pontos onde as condições de contorno são do tipo Dirichlet esta função se anula, ou seja $w = 0$. Essa primeira etapa será demonstrada para a equação do transporte da vorticidade, a partir da sua forma forte demonstrada previamente na equação 3.28.

O passo a passo do método dos elementos finitos que será apresentado a seguir foi utilizado para a construção do problema apresentado neste trabalho. Foi a partir dele que o modelo computacional que será apresentado no próximo capítulo foi criado.

$$\int_{\Omega} w \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z - \nu \nabla^2 \omega_z \right) d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

Prosseguindo com a multiplicação da *função peso*:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \omega_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z d\Omega - \int_{\Omega} w \nu \nabla^2 \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.35)$$

Em seguida é realizada a integração por partes do termo laplaciano para a redução da ordem e separação do termo de contorno, representado por Γ :

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \omega_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z d\Omega - \int_{\Gamma} w \nu \nabla \omega_z d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nu \nabla \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.36)$$

O próximo passo é a simplificação. Como foi dito antes, a função peso nos pontos onde existe condição de contorno de Dirichlet é zero, ou seja, no contorno da geometria, $w = 0$. Caso as condições de contorno sejam do tipo Neumann homogêneo, $\nabla \omega \cdot \vec{n} = 0$ Assim, nestes dois casos, a integral de contorno será zero. E por fim obtem-se a forma final do problema:

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial \omega_z}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} w \mathbf{v} \cdot \nabla \omega_z d\Omega + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nu \nabla \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.37)$$

Em seguida, as incógnitas são discretizadas com a utilização das funções N_i e N_j , chamadas *funções de forma* ou *funções de interpolação*:

$$\omega_z(x, y, t) = \sum_i^n \omega_{z_i}(t) N_i(x, y) \quad (3.38)$$

]

$$w(x, y, t) = \sum_j^n w_j(t) N_j(x, y) \quad (3.39)$$

Substituindo nas integrais:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n N_j w_j \frac{\partial(N_i \omega_{z_i})}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n N_j w_j \mathbf{v} \cdot \nabla(N_i \omega_{z_i}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n \nabla(N_j w_j) \cdot \nu \nabla(N_i \omega_{z_i}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Em seguida, aplica-se o Teorema de Galerkin, que diz que $N_i(x, y) = N_j(x, y)$ o que possibilita a junção dos somatórios. Divide-se a equação por w_j já que todos os termos são multiplicados por ele. Por fim, sabendo que ω_z é apenas função do tempo enquanto as funções de forma são apenas função do espaço, é possível simplificar as integrais e obter a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}^n \frac{\partial \omega_{z_i}}{\partial t} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i,j}^n \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (N_j \nabla N_i) d\Omega + \\ \sum_{i,j}^n \omega_{z_i} \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nu \nabla N_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Em seguida, as seguintes definições são utilizadas. Os termos $m_{i,j}^e$ compõem a matriz de massa de cada elemento, os termos $k_{i,j}^e$ compõem a matriz de rigidez de cada elemento e os termos $g_{i,j}^e$ compõem a matriz gradiente de cada elemento.

$$m_{i,j} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (3.42)$$

$$g_{i,j} = \int_{\Omega} N_i \nabla N_j d\Omega \quad (3.43)$$

$$k_{i,j} = \int_{\Omega} \nabla N_i \nabla N_j d\Omega \quad (3.44)$$

Como foi dito antes, essa equação possui derivadas no tempo e no espaço. O espaço foi discretizado em uma malha e o método dos elementos finitos foi aplicado. Para o tempo, o método das diferenças finitas será aplicado, utilizando as diferenças progressivas. Dessa forma, é possível obter a equação de cada elemento e da malha:

$$m_{i,j}^e \left(\frac{\omega_{z_i}^{n+1} - \omega_{z_i}^n}{\Delta t} \right) + \mathbf{v} \cdot g_{i,j}^e \omega_{z_i} + \nu k_{i,j}^e \omega_{z_i} = 0 \quad (3.45)$$

Através da montagem das matrizes globais, chega-se então a equação global do problema:

$$M \left(\frac{\omega_{z_i}^{n+1} - \omega_{z_i}^n}{\Delta t} \right) + \mathbf{v} \cdot G \omega_{z_i} + \nu K \omega_{z_i} = 0 \quad (3.46)$$

Resolvendo esta equação é possível obter o valor da vorticidade ω_z em cada nó da malha para um dado instante. Assim, o próximo passo do problema é a obtenção da função corrente a partir da equação 3.21. Esta também é feita pelo mesmo método dos elementos finitos e será demonstrada abaixo.

Primeiramente, multiplica-se pela função peso w :

$$\int_{\Omega} w (\nabla^2 \psi + \omega_z) d\Omega = 0 \quad (3.47)$$

$$\int_{\Omega} w \nabla^2 \psi d\Omega + \int_{\Omega} w \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.48)$$

Integrando por partes:

$$\int_{\Gamma} w \nabla \psi d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla w \nabla \psi d\Omega + \int_{\Omega} w \omega_z d\Omega = 0 \quad (3.49)$$

Após a simplificação, considerando as condições de contorno como Dirichlet ou Neumann homogêneo, anulando a integral de contorno:

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla \psi \, d\Omega - \int_{\Omega} w \omega_z \, d\Omega = 0 \quad (3.50)$$

O próximo passo é a substituição pelas *funções de forma*. Para a vorticidade, a mesma função 3.39 será utilizada. E para psi:

$$\psi(x, y) = \sum_i^n \psi_i N_i(x, y) \quad (3.51)$$

Substituindo na na forma fraca:

$$\int_{\Omega} \nabla \sum_j^n N_j w_j \cdot \nabla \sum_i^n N_i \psi_i \, d\Omega - \int_{\Omega} \sum_j^n N_j w_j \sum_i^n N_i \omega_{z_i} \, d\Omega = 0 \quad (3.52)$$

Com as simplificações, dividindo pela função peso e sabendo que $N_i = N_j$ (método de Galerkin), juntando os somatórios em um só:

$$\sum_e^n \psi_i w_j \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i \, d\Omega - \sum_e^n w_j \omega_{z_i} \int_{\Omega} N_j N_i \, d\Omega = 0 \quad (3.53)$$

Utilizando as equações para os termos das matrizes de massa, rigidez e gradiente para cada elemento (3.42, 3.63 e 3.44), substitui-se na equação acima, obtendo a equação para cada elemento do domínio:

$$\psi_i k_{i,j}^e - \omega_{z_i} m_{i,j}^e = 0 \quad (3.54)$$

E então após a montagem das matrizes globais, é possível obter a equação da função corrente:

$$K\psi - M\omega = 0 \quad (3.55)$$

Com a resolução desta segunda equação, é então possível obter a função corrente

do escoamento em cada ponto do domínio.

Fazendo o mesmo procedimento acima para as equações de velocidade em função de ψ (3.12), encontra-se também as equações globais para u e v . Assim, torna-se possível encontrar o campo de velocidades do escoamento.

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w \left(u - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \\ \int_{\Omega} w \left(v - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

Desenvolvendo as equações:

$$\begin{cases} \int_{\Omega} w u d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{\partial \psi}{\partial y} d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} w v d\Omega - \int_{\Omega} w \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

Adicionando as funções de forma para as variáveis u e v e as já definidas para a função peso w e ψ :

$$u(x, y) = \sum_i^n u_i N_i(x, y) \quad (3.58)$$

$$v(x, y) = \sum_i^n v_i N_i(x, y) \quad (3.59)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \sum_j^n w_j N_j \sum_i^n u_i N_i d\Omega - \int_{\Omega} \sum_j^n w_j N_j \sum_i^n \frac{\partial(\psi_i N_i)}{\partial y} d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \sum_j^n w_j N_j \sum_i^n v_i N_i d\Omega - \int_{\Omega} \sum_j^n w_j N_j \sum_i^n \frac{\partial(\psi_i N_i)}{\partial x} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

Em seguida, com as simplificações pelo Método de Galerkin e dividindo por w :

$$\begin{cases} \sum_e^n u_i \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega - \sum_e^n \psi_i \int_{\Omega} N_j \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega = 0 \\ \sum_e^n v_i \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega - \sum_e^n \psi_i \int_{\Omega} N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

Sabendo que:

$$g_{x_i,j} = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \quad (3.62)$$

$$g_{y_i,j} = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \quad (3.63)$$

É possível obter as equações abaixo, para encontrar o campo de velocidade do escoamento:

$$\begin{cases} m_{i,j}^e u_i = g_{y_i,j}^e \psi_i \\ m_{i,j}^e v_i = -g_{x_i,j}^e \psi_i \end{cases} \quad (3.64)$$

E com a montagem das matrizes globais:

$$\begin{cases} Mu = G_y \psi \\ Mv = -G_x \psi \end{cases} \quad (3.65)$$

Formulação Matricial

Para a resolução da equação global, a forma matricial é adotada. Isto ocorre pois esta é um sistema linear com uma equação(3.45) para cada elemento, sendo as incógnitas as vorticidades em cada nó. Assim, tal equação pode ser resolvida como um sistema linear se for organizada da seguinte forma:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.66)$$

Sendo \mathbf{x} um vetor com as incógnitas e o vetor \mathbf{b} um vetor com os valores que não dependem da incógnita de ω . Dessa forma, é preciso encontrar a matriz A e o vetor resultante b , resultantes de combinações lineares das matrizes globais M, K, G . Tais matrizes, por sua vez, são constituídas pelas matrizes elementares m^e, k^e, g^e e a montagem delas será demonstrada a seguir.

Para exemplificar a montagem de uma matriz global, um exemplo de domínio dividido em 2 elementos é mostrado na figura 3.5.

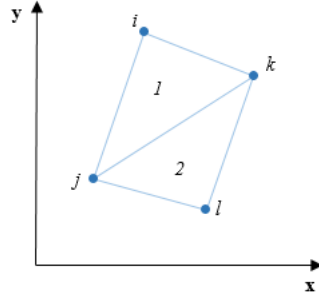


Figura 3.5: Dois elementos triangulares do domínio

A montagem da matriz de massa (M) global será exemplificada para estes dois elementos. Sendo as matrizes dos elementos 1 e 2 matrizes 3×3 por causa dos elementos triangulares, que possuem 3 nós:

$$\begin{bmatrix} m_{1,1}^e & m_{1,2}^e & m_{1,3}^e \\ m_{2,1}^e & m_{2,2}^e & m_{2,3}^e \\ m_{3,1}^e & m_{3,2}^e & m_{3,3}^e \end{bmatrix}; \quad e = 1, 2 \quad (3.67)$$

A junção das 2 matrizes é feita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m_{1,1}^1 & m_{1,2}^1 & m_{1,3}^1 & 0 \\ m_{2,1}^1 & m_{2,2}^1 + m_{1,1}^2 & m_{2,3}^1 + m_{1,2}^2 & m_{1,3}^2 \\ m_{3,1}^1 & m_{3,2}^1 + m_{2,1}^2 & m_{3,3}^1 + m_{2,2}^2 & m_{2,3}^2 \\ 0 & m_{3,1}^2 & m_{3,2}^2 & m_{3,3}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \\ \omega_l \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

A matriz do primeiro elemento ocupa as 3 primeiras colunas da matriz pois são as colunas que multiplicam as incógnitas dos nós i, j, k , nós que formam o primeiro elemento. O segundo elemento é formado pelos nós j, k, l , por isso tal matriz está posicionada nas colunas que multiplicam as incógnitas com tais coeficientes. Para os nós que estão presentes em mais de um elemento, como o nó j , tanto os componentes da matriz 1 quanto os componentes da matriz 2 multiplicam tal nó.

Para fazer a montagem das matrizes globais, é preciso calcular as matrizes de cada elemento. Para isso serão considerados elementos triangulares lineares como na figura 3.5. Para elementos lineares, as funções de forma $N(x, y)$ são funções lineares das coordenadas do espaço.

$$N(x, y) = [N_i \ N_j \ N_k] \quad (3.69)$$

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (3.70)$$

Sendo A , a área do elemento, calculada pelo determinante da matriz com as posições dos nós:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

A partir disso é possível obter os coeficientes da *função de forma* do elemento :

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j & b_i &= y_j - y_k & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k & b_j &= y_k - y_i & c_j &= y_i - y_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i & b_k &= y_i - y_j & c_k &= y_j - y_i \end{aligned} \quad (3.72)$$

Assim, é possível obter as matrizes de cada elemento. A matriz m^e , ou matriz de massa é a seguinte:

$$m^e = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

A matriz de rigidez, ou matriz k^e é uma composição da matriz k_x^e e da matriz k_y^e .

$$k_x^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$k_y^e = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$k^e = k_x^e + k_y^e \quad (3.76)$$

Por fim, a matriz g^e , ou matriz do gradiente, também é composta por g_x^e e g_y^e :

$$g_x^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$g_y^e = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Com o conhecimento de tais matrizes e de como é feita a combinação delas para a construção do sistema linear, torna-se possível resolver a equação global 3.46.

Capítulo 4

Metodologia

Neste capítulo será detalhada a metodologia utilizada neste trabalho para a obtenção de resultados sobre o escoamento estudado. O método dos elementos finitos detalhado no capítulo anterior para a solução da formulação corrente-vorticidade será aplicado a um código em linguagem *Python*. O domínio do problema será criado a partir do software *Gmsh* e a visualização e pós-tratamento de resultados será feita com o software *Paraview*.

4.1 Importação da Malha

O primeiro passo para a resolução do problema de elementos finitos é a geração da malha sobre a geometria. Para isso foi utilizado o software *Gmsh* versão 4.2.2, apresentado na figura (4.1). Nele é possível fazer geometrias unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais de formas simples e gerar malhas para tais geometrias. Neste trabalho o domínio estudado será bidimensional, a malha utilizada será não estruturada, para melhor adaptação a geometria, e formada por elementos triangulares.

É também no *Gmsh* em que as superfícies em que serão aplicadas condições de contorno são definidas. É possível dar nomes aos elementos da geometria criados, tornando mais simples identificá-las na construção do código de elementos finitos.

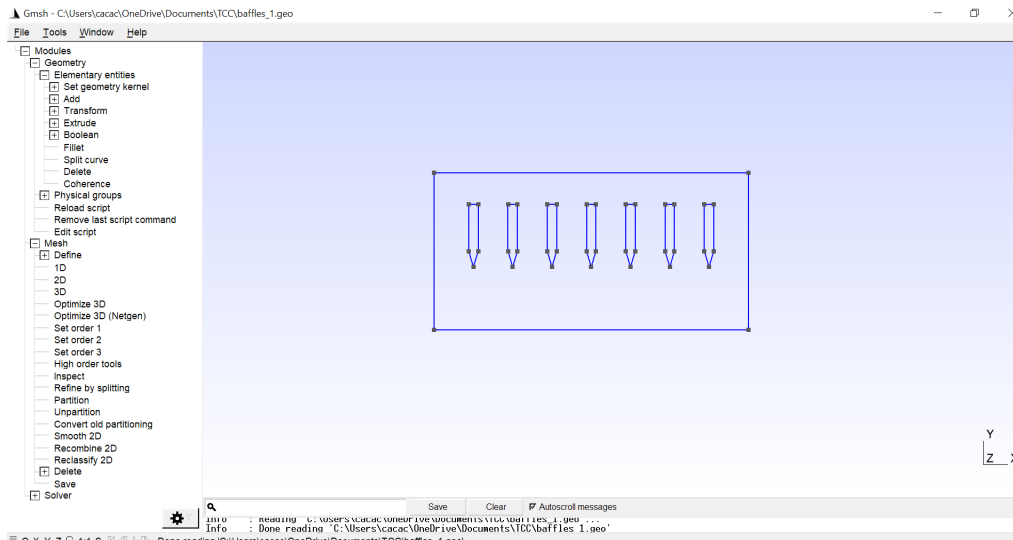


Figura 4.1: Exemplo de geometria construida no Gmsh

A malha gerada no arquivo do tipo *.msh* (versão 2.2) deve ser importada no código Python. Para isso a biblioteca *meshio* do Python é utilizada (versão 5.3.4). Ela tem funções que leem o arquivo *.msh*. Este arquivo contém informações sobre a posição dos nós da malha e uma matriz chamada IEN que contém os elementos da malha, ou seja, cada linha representa um elemento e é constituída pelos nós que o formam. Nele também estão presentes as condições de contorno. Esta parte do código criado é mostrada abaixo, tornando possível observar as informações importantes que foram retiradas do arquivo *.msh*.

```
import meshio as mesh #importa a biblioteca

msh = mesh.read('file.msh') #leitura da malha
X = msh.points[:,0] #lista com coordenada x de cada no
Y = msh.points[:,1] #lista com coordenada y de cada no
IEN = msh.cells['triangle'] #matriz IEN para elementos internos
IENbound = msh.cells['line'] #matriz IEN para elementos de contorno
ne = IEN.shape[0] #numero de elementos
npoints = len(X) #numero de pontos
```

Os elementos são separados em duas matrizes, a dos elementos internos (IEN) e a dos elementos de contorno (IENbound). Enfim, para finalizar a leitura do arquivo

.msh, as condições de contorno são lidas pelo código. É criada uma lista chamada *ccName* com o nome da condição de contorno que cada nó pertence. É a partir dessa lista que as condições de contorno serão impostas mais a frente no problema.

```

IENboundTypeElem = list(msh.cell.data[ 'line '][ 'gmsh:physical' ] - 1)
boundNames = list(msh.field.data.keys()) #lista com os nomes das
    condicoes de contorno

IENboundElem = [boundNames[elem] for elem in IENboundTypeElem]
# cria lista de nos do contorno

cc = np.unique(IENbound.reshape(IENbound.size))
#cria lista com nome da condicao de contorno de cada no do contorno

ccName = [[] for i in range( len(X) )]
for elem in range(0, len(IENbound)):
    ccName[ IENbound[elem][0] ] = IENboundElem[elem]
    ccName[ IENbound[elem][1] ] = IENboundElem[elem]

```

4.2 Montagem das matrizes globais

Após a importação da malha, tendo definido os nós e elementos do domínio, o próximo passo é a montagem das matrizes M, K, G que foram apresentadas no capítulo anterior. Primeiramente, é feito um *loop* onde as matrizes elementares são montadas para cada elemento, em seguida dois outros *loop*'s usando o comando *for* são feitos com o objetivo de criar índices para o posicionamento dos elementos das matrizes elementares criadas nas matrizes globais. Esse passo a passo é demonstrado pelo código abaixo:

```

for e in range(0, ne):
    #montagem da matriz para cada elemento
    for ilocal in range(0, 3):
        iglobal = IEN[e, ilocal]
        for jlocal in range(0, 3):
            jglobal = IEN[e, jlocal]

```

```

#montagem das matrizes globais
K[iglobal,jglobal] += k[ilocal,jlocal]
M[iglobal,jglobal] += m[ilocal,jlocal]
Gx[iglobal,jglobal] += gx[ilocal,jlocal]
Gy[iglobal,jglobal] += gy[ilocal,jlocal]

```

4.3 Inicialização da Vorticidade

O próximo passo é a definição das condições necessárias para a construção do algoritmo de resolução do problema. Neste momento, as equações globais desenvolvidas pelo método dos elementos finitos no Capítulo 3 serão introduzidas no código.

Primeiramente a equação global do transporte da vorticidade é retomada. É escolhido o método de diferenças regressivas para a discretização do tempo, em que a equação é calculada para ω_z^{n+1} em função de ω_z^n , como demonstrado abaixo:

$$M \left(\frac{\omega_z^{n+1} - \omega_z^n}{\Delta t} \right) + \mathbf{v} \cdot G\omega_z^{n+1} + \nu K\omega_z^{n+1} = 0 \quad (4.1)$$

Assim, é preciso encontrar a condição inicial de ω_n para o início do algoritmo. Para isso é utilizada a equação de definição da vorticidade, apresentada no capítulo 3, 3.20. Desenvolvendo o método dos elementos finitos nela, como foi feito para as outras equações do sistema, é possível obter a seguinte expressão, em função das matrizes globais:

$$M\omega_z = G_x v - G_y u \quad (4.2)$$

Com esta equação, a vorticidade inicial do escoamento é obtida. Foram considerados u e v nulos em todo o domínio, com exceção do contorno, onde as condições de contorno foram impostas. Esse passo a passo é mostrado no código abaixo:

```

#inicializacao das velocidades

```

```

u = np.zeros((npoints), dtype="float64")
v = np.zeros((npoints), dtype="float64")

#inicializa o do vetor com as vorticidades em cada no
w = np.zeros((npoints), dtype="float64")

#aplicacao da condicao de contorno diferente de zero
for i in cc:
    if ccName[i] == 'inlet':
        u[i] = 1

#resolucao do sistema linear Mw = b_cc da vorticidade inicial
b_cc = np.matmul(Gx, v) - np.matmul(Gy, u)
w = np.linalg.solve(M, b_cc)

```

No caso do código mostrado a única condição de contorno diferente de zero é no contorno chamado "inlet", cuja componente de velocidade u deve ser 1.

4.4 Algoritmo

Antes da inicialização do algoritmo, alguns parâmetros necessários para os cálculos que serão realizados devem ser definidos.

```

#definicao dos parametros
dt = #passo do tempo
nu = #viscosidade cinematica, utilizada para definir o numero de
    Reynolds
nIter = #numero de iteracoes do algoritmo, definindo o instante final
    do resultado

```

A primeira variável calculada no algoritmo é a vorticidade. Para isso, a sua equação é organizada de forma que possa ser resolvida como um sistema $Ax = b$.

$$\left(\frac{M}{\Delta t} + \mathbf{v} \cdot G + \nu K\right) \omega_z^{n+1} = \frac{M}{\Delta t} \omega_z^n \quad (4.3)$$

Sendo:

$$A = \frac{M}{\Delta t} + \mathbf{v} \cdot G + \nu K$$

$$x = \omega_z^{n+1}$$

$$b = \frac{M}{\Delta t} \omega_z^n$$

Ao obter a solução para ω_z^{n+1} é possível encontrar a função corrente reorganizando a equação 3.55:

$$K\psi = M\omega \quad (4.4)$$

Assim, reorganizando como um sistema linear $Cx = d$, foi possível encontrar a função corrente no domínio. Sendo:

$$C = K$$

$$x = \psi$$

$$d = M\omega_z^{n+1}$$

Para finalizar o algoritmo, são calculadas as velocidades com a solução da função corrente. Para isso, as equações 3.65 são utilizadas.

Esses cálculos foram realizados até então para um determinado instante t , assim, o "loop" for é então reiniciado para o cálculo da vorticidade, função corrente e campo de velocidade para os próximos instantes. O número de vezes que o "loop" ocorre é definido pelo parâmetro "nIter" definido acima. Entretanto, antes de reiniciar o loop, é necessário redefinir as condições de contorno da velocidade, pois durante o cálculo as velocidades podem mudar o valor.

4.5 Condições de contorno

Para a obtenção da solução dos sistemas lineares citados na última seção, é preciso impor as condições de contorno do sistema corretamente.

A maioria das condições de contorno são do tipo *Dirichlet*, ou seja, com o resultado definido para os determinados pontos. Um exemplo disso são as condições de contorno nas paredes do escoamento. Considera-se condição de contorno "no slip", ou seja, não ocorre deslizamento do fluido nos pontos de contato, isso significa que tanto a componente u quanto a componente v da velocidade são nulas nesses pontos.

Para aplicar as condições de Dirichlet, devem ser feitas alterações na matriz global do sistema. Para os nós do contorno, as linhas e colunas correspondentes devem ser zeradas, restando somente o encontro da linha e coluna com valor igual a 1. Isto é mostrado na representação de sistema $A_{m \times n} x_n = b_m$ abaixo, supondo que o ponto i está em contato com a parede.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & 0 & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Outro tipo de condição de contorno presente no sistema é a condição de *Neumann homogêneo*. Tal condição aplicada aos pontos de uma fronteira Γ diz que não há variação da solução na direção \mathbf{n} , normal a Γ . Sendo i um ponto de tal fronteira:

$$\nabla x_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.6)$$

Para estas condições de contorno, as matrizes não precisam ser alteradas.

As condições de contorno de vorticidade, função corrente e velocidade serão aplicadas da seguinte forma:

- **Velocidade** : As condições de contorno de velocidade serão sempre impostas com as mesmas hipóteses. Para exemplificar, um escoamento dentro de um domínio bidimensional (escoamento entre duas placas planas) está representado pela figura retangular abaixo 4.2.

Considera-se as linhas 1 e 3 formadas por pontos em contato com a parede da

tubulação, logo, como foi dito antes, as velocidades nestas linhas serão nulas:

$$u_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad u_3 = 0 \quad v_3 = 0 \quad (4.7)$$

A linha à esquerda, linha 4, será o *inlet* onde a velocidade de entrada (u_0) será definida. As velocidades de entrada neste trabalho serão sempre perpendiculares ao *inlet*:

$$u_4 = u_0 \quad v_4 = 0 \quad (4.8)$$

A linha à direita, linha 2, será o *outlet* do escoamento, onde serão consideradas condições de contorno de velocidade do tipo Neumann homogêneo.

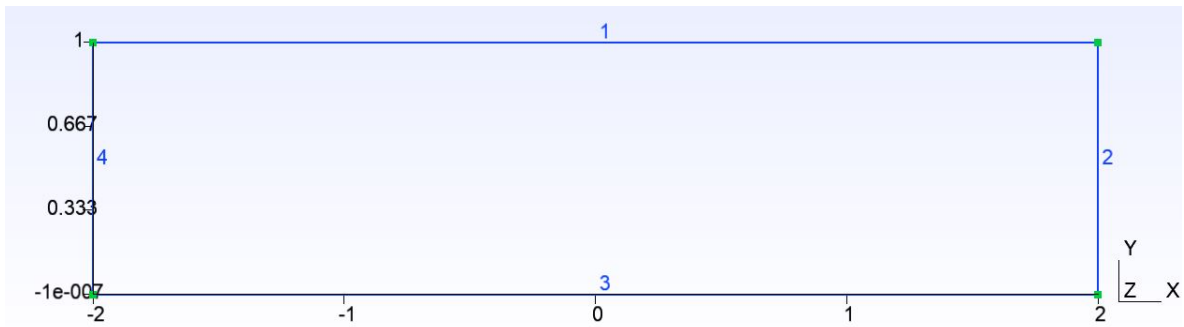


Figura 4.2: Geometria representativa de uma seção axial de uma tubulação

- **Função corrente:** Da mesma forma que foi feito para a velocidade, as hipóteses utilizadas para as condições de contorno da função corrente serão sempre as mesmas no decorrer do trabalho. Como foi explicado no capítulo anterior, a diferença entre a função corrente de duas linhas de corrente é igual a vazão volumétrica entre elas. Essa propriedade será utilizada para o cálculo das condições de contorno. Sabendo que a vazão volumétrica é a velocidade vezes a área de uma seção radial do escoamento:

$$Q = v A \quad (4.9)$$

Neste caso, se tratando se um escoamento bidimensional, a área é representada apenas pelo comprimento de uma linha vertical. Considera-se ψ na linha 3

nulo. A partir disso é possível calcular a função corrente de cada ponto i do contorno.

$$\psi_3 = 0 \quad (4.10)$$

Visto que o *inlet* e a linha 3 compartilham um vértice, cujo valor de ψ é conhecido, torna-se possível encontrar o valor da função corrente dos demais pontos i desta fronteira da seguinte forma:

$$u_0 y_i = \psi_i - \psi_3 = \psi_i - 0 \quad (4.11)$$

$$\psi_i = u_0 y_i \quad (4.12)$$

No final do *inlet*, a altura y chega a 1. O valor neste ponto é o mesmo valor na linha de corrente da parede superior, linha 1.

$$\psi_1 = u_0 \quad (4.13)$$

As condições de contorno da função corrente no *outlet* são do tipo Neumann homogêneo. Definindo que para os pontos j da linha 2 não há variação de função corrente na direção x .

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

- **Vorticidade:** Mesmo sendo a primeira a ser calculada no algoritmo, as condições de contorno de vorticidade são as últimas a serem definidas, pois elas são calculadas em função das velocidades ou da função corrente no contorno, com a utilização das equações 3.20 e 3.21.

Neste trabalho, a equação 3.20 será utilizada para o cálculo das condições de contorno da vorticidade da mesma maneira que foram utilizadas para a inicialização da vorticidade, com a resolução do sistema linear 4.2.

A imposição das condições de contorno e o algoritmo explicado na seção anterior são demonstrados em linguagem Python abaixo:

```

for n in range (0,nIter) :
    print(n) #contabilizacao da iteracao
    #definicao das matrizes A e b para o calculo da vorticidade em n+1
    A = (M/dt) + nu*K + np.dot(np.diagflat(u),Gx) + np.dot(np.diagflat(
        v),Gy)
    b = (M/dt)*w
    #condicao de contorno vorticidade
    b_cc = np.matmul(Gx,v)-np.matmul(Gy,u)
    w_cc = np.linalg.solve(M,b_cc)
    for i in cc:
        A[i,:] = 0
        A[i,i] = 1
        b[i] = w_cc[i]
    #calculo da vorticidade em n+1
    w = np.linalg.solve(A,b)
    #inicializacao da funcao corrente
    psi = np.zeros((npoints),dtype="float64")
    #definicao das matrizes C e d para o calculo da funcao corrente
    C = K
    d = np.matmul(M,w)
    #aplicacao das condicoes de contorno da funcao corrente
    for i in cc:
        C[i,:] = 0
        C[i,i] = 1
        if ccName[i] == 'inlet':
            d[i] = Y[i]
        if ccName[i] == 'linha_1':
            d[i]= 1
        if ccName[i] == 'linha_3':
            d[i] = 0
    #calculo da funcao corrente

```

```

psi = np.linalg.solve(C,d)
#calculo das velocidades
u = np.linalg.solve(M,np.matmul(Gy,psi))
v = np.linalg.solve(M,np.matmul(-Gx,psi))
#condicoes de contorno velocidade
for i in cc:
    if ccName[i] == 'inlet':
        u[i] = 0
        v[i] = -1
    if ccName[i] == 'linha_1':
        u[i] = 0
        v[i] = 0
    if ccName[i] == 'linha_3':
        u[i] = 0
        v[i] = 0

```

Após o cálculo das velocidades, as condições de contorno foram impostas novamente. Isso é feito para garantir que os valores das velocidades no contorno serão os definidos previamente e assim, no próximo loop, as condições de contorno da vorticidade serão também obtidas de forma correta.

4.6 Visualização dos resultados

Para a visualização e o pós processamento dos resultados obtidos, o software Paraview será utilizado. Este software permite a manipulação dos resultados de forma simples e visual, com diferentes escalas e com a possibilidade de manipulação dos dados e geração de gráficos para melhor análise dos resultados obtidos.

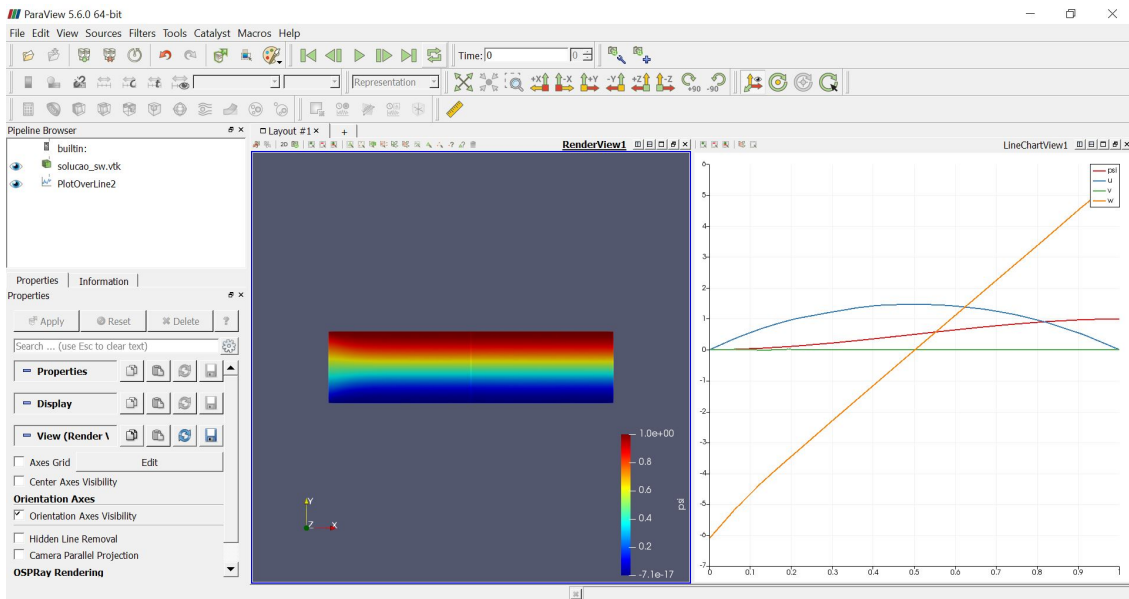


Figura 4.3: Software Paraview com exemplo de visualização de solução

Para a visualização dos resultados com tal software, é preciso salvá-los em um arquivo do tipo *.vtk*. Para isso, o seguinte código em Python é utilizado:

```
#plot dos resultados e exportacao para o paraview
point_data = {'w': w, 'psi': psi, 'v':v, 'u':u}
mesh.write_points_cells('solucao.vtk',msh.points,
                        msh.cells,#file_format='vtk-ascii'
                        point_data=point_data,
                        )
```

4.7 Verificação do código

Com o código numérico pronto, é preciso se certificar de que este esteja respondendo como esperado. Por isso, os códigos são sempre testados e verificados. Neste trabalho, a verificação será feita comparando o resultado do código com o resultado de um problema conhecido.

O problema escolhido para isso foi o escoamento de *Hagen Poiseuille*. Este é um escoamento laminar permanente de um fluido incompressível viscoso entre duas placas paralelas. Este escoamento é muito conhecido pois possui solução analítica.

De acordo com [13], a solução para o perfil de velocidade deste escoamento, considerando a velocidade de entrada uniforme é a seguinte:

$$u(y) = \frac{6}{L^2}y(L - y) \quad (4.15)$$

As condições de contorno deste escoamento são mostradas na figura abaixo 4.4.

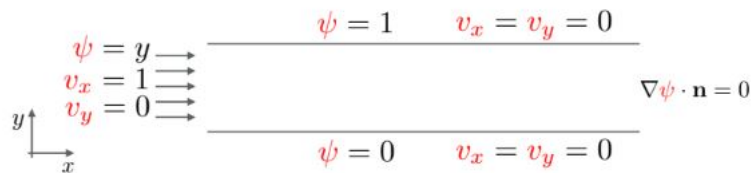


Figura 4.4: Condições de contorno do escoamento de Hagen-Poiseuille

Os resultados obtidos com o código detalhado neste trabalho são mostrados abaixo. Foi utilizada uma malha com 1912 elementos e 1078 nós e a geometria da figura 4.2. Os parâmetros utilizados foram $Re = 10$, $dt = 0.01$ e $nIter = 200$.

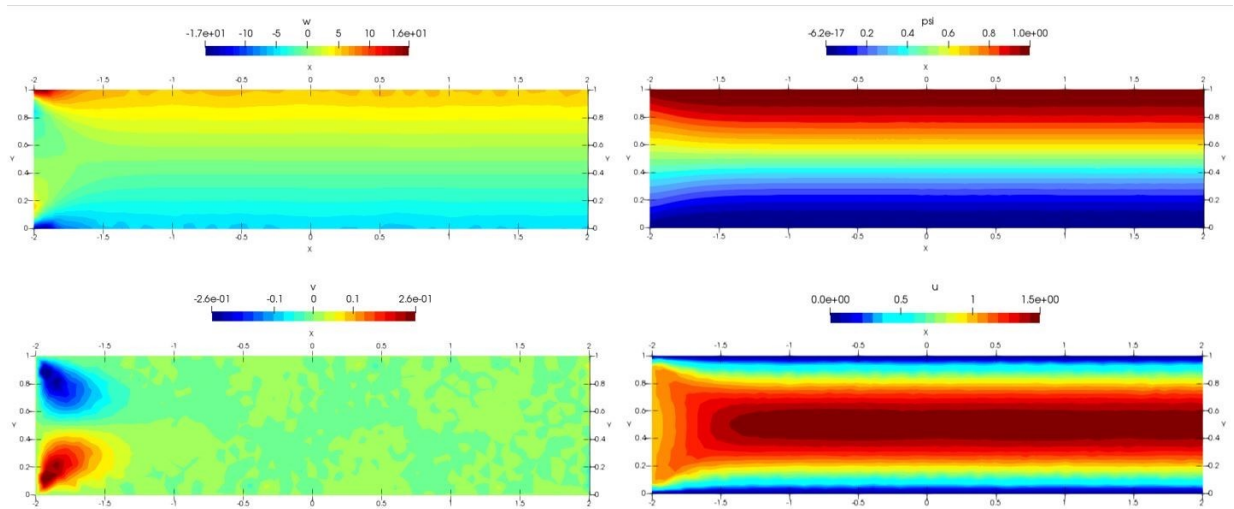


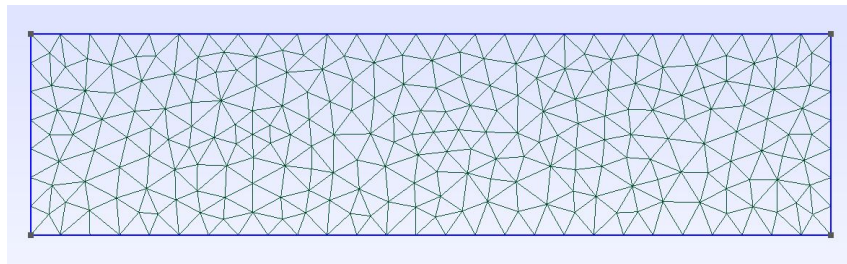
Figura 4.5: Resultados de vorticidade, função corrente e velocidades para o escoamento de Hagen Poiseuille

É possível observar na figura 4.5 que os resultados estão de acordo com física do problema. É possível também comparar com a solução calculada pelo código criado com a solução analítica, considerando L a distância entre as placas, ou seja, a altura do escoamento. Isso foi feito para 4 malhas diferentes, detalhadas na tabela abaixo. O refinamento da malha foi realizado pela função "*Refine by splitting*" que refina a malha dividindo seus elementos. As malhas utilizadas foram geradas pelo Gmsh de

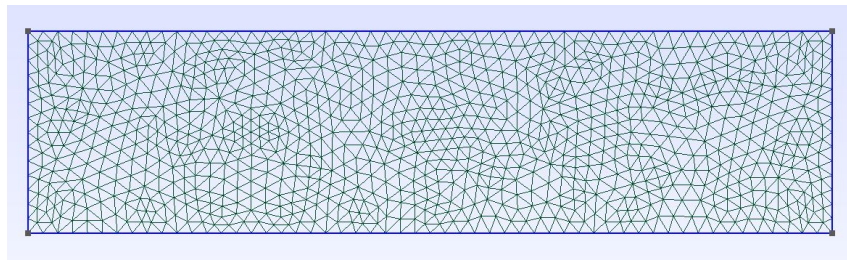
forma automática e estão apresentadas na figura 4.6.

Tabela 4.1: Malhas Testadas

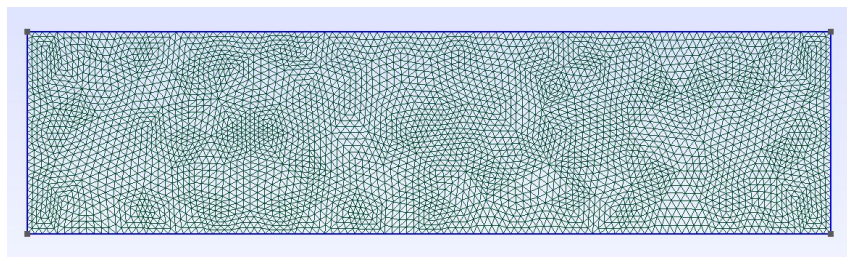
Malha	Nós	Elementos
1	300	577
2	1078	1912
3	4068	7648



(a) Malha 1



(b) Malha 2



(c) Malha 3

Figura 4.6: Malhas criadas no Gmsh para o escoamento de Hagen-Poiseuille

No gráfico mostrado na figura 4.7 é possível ver que as soluções obtidas pelo código são muito próximas da solução analítica, tornando possível a validação dos resultados do código utilizado neste trabalho. É possível observar igualmente que a medida que a quantidade de nós e elementos da malha aumenta, a solução calculada se aproxima mais da solução analítica, indicando que o código está convergindo para a solução esperada.

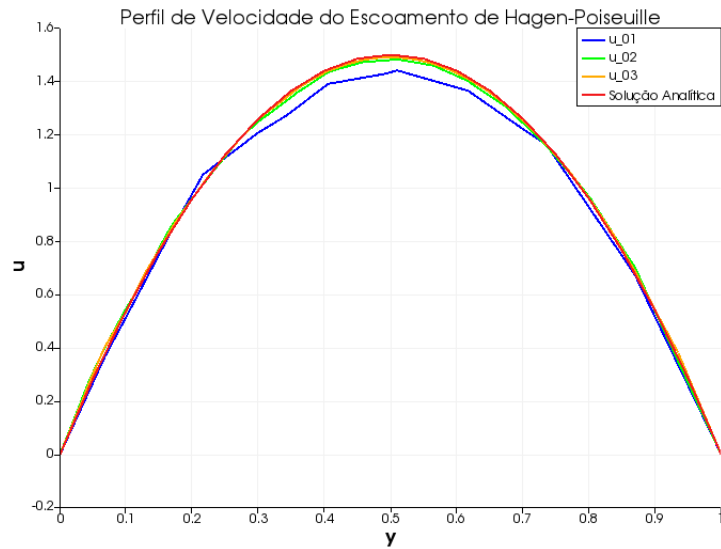


Figura 4.7: Comparação do perfil de velocidades calculado com a equação de Poiseuille e com o código python desenvolvido neste trabalho para varias malhas

Estas simulações mostram que a malha ideal é a malha 3, que se aproxima mais da solução exata. Assim, nas geometrias estudadas uma malha próxima a malha 3 deveria ser buscada. Entretanto, devido a capacidade do computador utilizado e o objetivo de obter resultados qualitativos para comparação, as malhas utilizadas não serão tão refinadas.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Este capítulo descreve as simulações realizadas, justificando as geometrias, as malhas e as condições de contorno escolhidas. Em seguida, os resultados serão mostrados e avaliados.

Como detalhado no capítulo 2, os bancos de prova são separados em 3 seções: a entrada de ar, a seção de trabalho e a saída de ar. As simulações do escoamento na célula foram divididas da mesma forma.

Primeiramente foi estudado o escoamento da célula de testes antes do motor. Nesta parte do escoamento é muito importante que o escoamento seja uniforme, com poucas variações de velocidade e que a vorticidade seja mínima. Diferentes composições serão testadas para esta seção, os perfis de velocidade após os obstáculos serão estudados e as distorções de velocidade serão calculadas e comparadas.

A seção de trabalho será detalhada e comentada junto a saída de ar. O estudo desta segunda parte será focado no duto ampliador e no seu efeito sobre o escoamento. Este elemento é essencial para manter uma boa razão de *Bypass* e evitar a re-ingestão de gases de exaustão. Os outros elementos da saída de ar não serão abordados nesta análise visto que tem funções majoritariamente acústicas, ou seja, reduzir o ruído.

5.1 Hipóteses adotadas

Como visto anteriormente no detalhamento da metodologia deste trabalho, o código foi feito para o estudo de um escoamento em 2D. Assim, esta foi a primeira hipótese

adotada, mesmo que o escoamento real seja tridimensional, a análise aqui presente será de uma seção de corte axial deste escoamento. Em alguns pontos da geometria esta simplificação é mais custosa, como na passagem da seção quadrada para a seção circular do duto ampliador após o motor. Este cálculo não representa corretamente esta parte do escoamento e os erros devem ser levados em conta na avaliação dos resultados.

Além disso, visto que o motor e as forças geradas por ele não estão no escopo do trabalho em questão, algumas hipóteses foram utilizadas para a representação do escoamento sem a modelização do motor. O escoamento na célula de testes é provocado pela sucção do motor, gerada por uma diferença de pressão entre seus componentes. Entretanto, neste trabalho, o escoamento é originado de uma velocidade imposta na entrada de ar do banco. A exaustão do motor também é simplificada, desconsiderando as altas temperaturas dos gases de exaustão e representada por uma maior vazão e uma aceleração pela restrição de fluxo como será mais detalhado a seguir. Esses fatores podem implicar em diferenças entre os resultados dos cálculos e o escoamento real.

As escolhas de geometria para os elementos que compõem a geometria da célula de testes foram baseadas naquelas mais encontradas nas células existentes. As análises feitas neste trabalho são apenas de caráter aerodinâmico e não levam em consideração aspectos como acústica e prevenção de FOD (*Foreign Object Damage*).

O objetivo do estudo em questão é entender a influência dos elementos de uma célula de testes para motores aeronáuticos no escoamento do ar com simulações simples. Assim, não foi buscado um escoamento semelhante ao real, que implicaria em números de Reynolds muito altos. Entende-se que a grande diferença entre os números de Reynolds utilizados neste trabalho (por volta de 150) e os encontrados no escoamento real (por volta de 1 milhão) causam grandes diferenças no escoamento. A formação de vórtices e a turbulência são bem mais presentes no escoamento real. Infelizmente, as limitações do método utilizado no trabalho impedem a simulação com números de Reynolds maiores, visto que implicariam em resultados equivocados do escoamento. Dessa forma, a análise feita é qualitativa, a partir dela é possível entender os fenômenos físicos presentes, fazendo a comparação de escoamentos mais simples, com dimensões menores e velocidades reduzidas, entendendo

que a turbulência no escoamento será sempre muito maior nas células reais.

No entanto, a semelhança geométrica entre uma célula real e as geometrias estudadas neste trabalho foi mantida. Utilizou-se uma escala de 10:1 para tal. Assim, considerando um banco de provas de seção quadrada com $10m$ de lado, a seção é de $L = 1m$ nas geometrias construídas no Gmsh. As geometrias utilizadas neste trabalho serão apresentadas nos subcapítulos a seguir.

Os parâmetros e as condições de contorno escolhidas foram feitas com o objetivo de simplificar a problemática. O ν , viscosidade cinemática e a velocidade de entrada foram escolhidas de forma a encontrar os números de Reynolds buscados. Então para as simulações com o número de Reynolds igual a 100, $D = L = 1m$; $\nu = 0.01m^2/s$; $v = -1m/s$:

$$Re = \frac{L v}{\nu} = \frac{1}{0.01} = 100 \quad (5.1)$$

Enfim, todos os resultados apresentados neste capítulo são da centésima iteração com $\Delta t = 0.01s$, ou seja, em $t = 1s$.

5.2 Entrada de Ar

As geometrias utilizadas para o estudo da entrada de ar são compostas pelos elementos posicionados antes do motor. Estes foram apresentados no segundo capítulo do presente trabalho: silenciadores, defletores e tela porosa. As dimensões da célula de testes são sempre as mesmas para todas as geometrias e os formatos dos elementos também não são alterados. Assim, apenas a quantidade de elementos é alterada de uma geometria para outra.

Primeiramente, a figura 5.1 apresenta uma geometria completa de entrada de ar, com os silenciadores, defletores e tela porosa, desenhados no software *Gmsh*. Os índices presentes próximos aos elementos da geometria representam o conjunto em que tais elementos fazem parte. Estes conjuntos serão utilizados para definir as condições de contorno do problema. Nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4, é possível observar as geometrias utilizadas para os elementos da célula

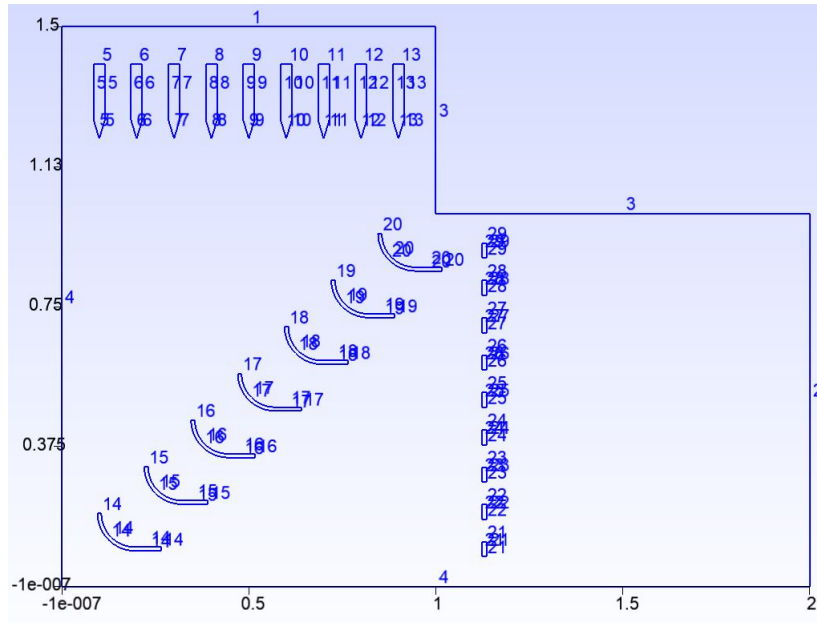


Figura 5.1: Exemplo de geometria da entrada de ar (eixos em metros)

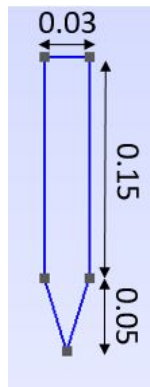


Figura 5.2: Geometria dos silenciadores (valores em metros)

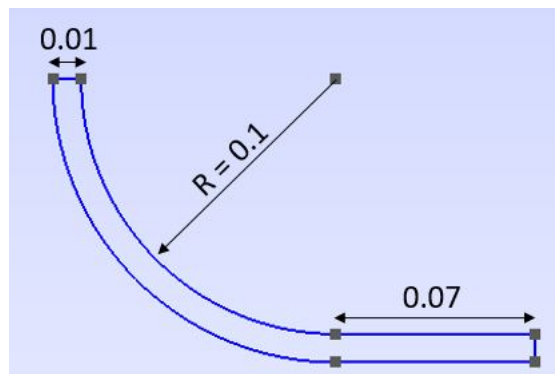


Figura 5.3: Geometria dos defletores (valores em metros)

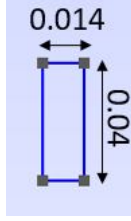


Figura 5.4: Geometria de um elemento da tela porosa

A velocidade de entrada, imposta na aresta chamada de *inlet*, com o índice 1 na figura 5.1 foi mantida em $v = -1$ para todas as simulações enquanto a viscosidade cinemática foi sendo alterada para atingir diferentes números de Reynolds. A velocidade em todos os outros elementos e paredes é nula devido a condição de não deslizamento, enquanto no *outlet* (índice 2), não serão impostas condições de contorno.

Já as condições de contorno da função corrente são obtidas da mesma forma que foi mencionada na metodologia, em uma das paredes ψ é considerado zero e os outros valores de função corrente são calculados a partir dele. Considerando a célula em formato de "U", existirá sempre uma parede interna (índice 3) e uma parede externa (índice 4). Considerando o ψ da parede externa nulo, é possível concluir que:

$$\psi_{parede\ interna} - \psi_{parede\ externa} = v L \quad (5.2)$$

$$\psi_{parede\ interna} = 1 \quad (5.3)$$

Já no inlet, a função corrente de cada nó é dependente da distância do nó até a parede externa, visto que a velocidade é 1.

5.2.1 Geometria 1: Entrada de ar com 7 silenciadores e sem defletores

A primeira geometria (figura 5.5) foi feita apenas com os silenciadores. O objetivo desta primeira simulação é servir como uma base de comparação para as próximas geometrias, com mais elementos. Por meio destas comparações busca-se compreender melhor os objetivos e efeitos de cada elemento da entrada de ar.

A malha utilizada para esta geometria foi gerada no Gmsh com 3105 nós e 5884 elementos, pelo método *Frontal-Delaunay*.

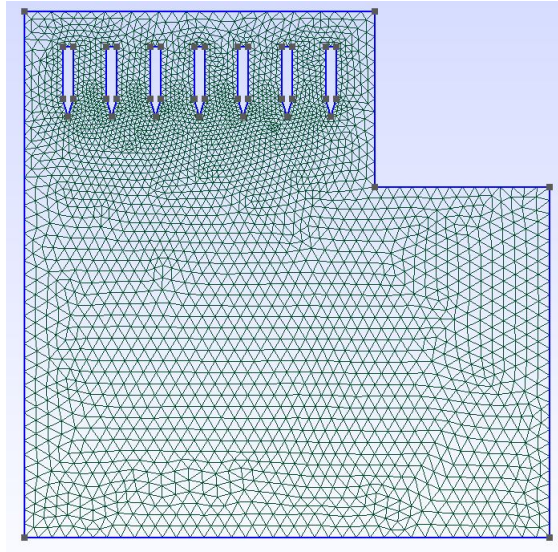


Figura 5.5: Geometria e malha 1: 7 silenciadores sem defletores

Os resultados do escoamento nesta primeira geometria para $Re = 100$ são apresentados na figura 5.6.

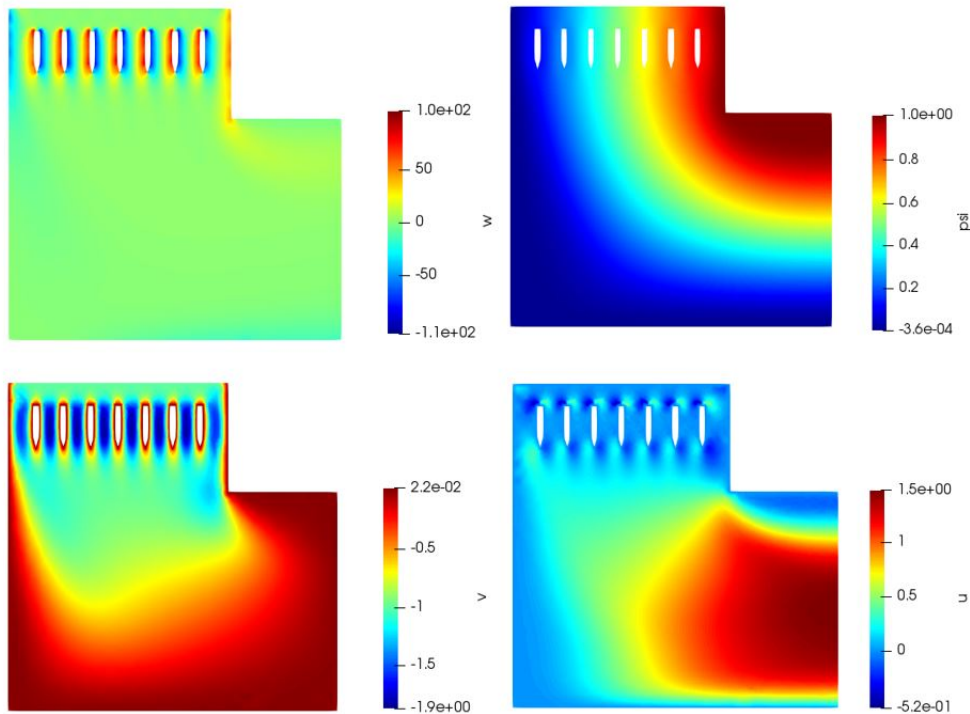


Figura 5.6: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 1 com $Re = 100$

A partir dos resultados é possível observar que o escoamento próximo aos silen-

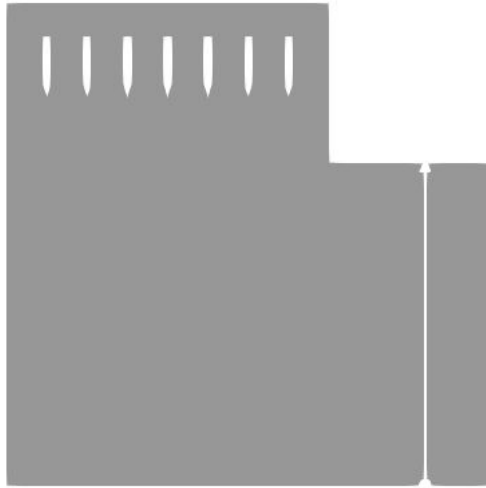


Figura 5.7: Linha vertical em $x = 1.3$ de onde os resultados de velocidade na direção da corrente da geometria 1 foram extraídos

ciadores apresenta uma vorticidade maior, como é esperado. É possível ver também como os elementos afetam o escoamento causando um aumento de velocidade onde existem restrições de fluxo.

O escoamento na geometria 1 foi calculado para 4 números de Reynolds diferentes: 100, 143, 200 e 250. Para fazer a análise de influência entre estas simulações, perfis de velocidade na direção da corrente foram traçados. Na figura 5.7, a linha de onde as velocidades foram obtidas é mostrada, ela representa uma seção próxima a área de sucção do motor.

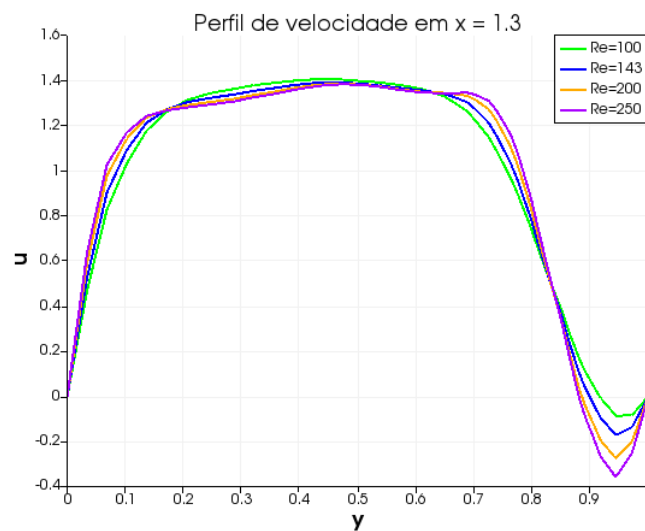


Figura 5.8: Gráfico de velocidade a direção da corrente na área de sucção do motor para geometria 1

É possível ver no gráfico da figura 5.8 que o módulo da velocidade média nesta posição é maior que o da velocidade imposta na entrada da célula ($v = 1$). Além disso, a velocidade sofre poucas alterações entre $y = 0.2$ e $y = 0.7$, sendo que as simulações com maior número de Reynolds tem menos influência da parede, visível pela maior inclinação da curva nas extremidades do gráfico. Ao analisar o gráfico, também é possível notar que próximo à $y = 1$ a velocidade na direção da corrente muda de sentido, atingindo velocidades negativas maiores para Reynolds mais altos. Isso aponta a presença de recirculação nessa região, caracterizando a possível formação de vórtices.

5.2.2 Geometria 2: Entrada de ar com 7 silenciadores e 4 defletores

A segunda geometria calculada foi da entrada de ar com os mesmos 7 silenciadores e desta vez com 4 defletores. A geometria e a malha utilizadas são representadas na figura 5.9. Estas foram geradas pelo software Gmsh.

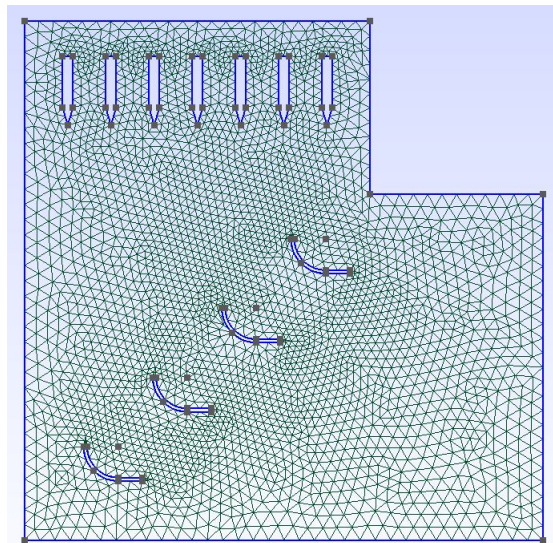


Figura 5.9: Geometria e malha 2: 7 silenciadores e 4 defletores

Foi gerada uma malha pelo método *Frontal-Delaunay* com 3185 nós e 6044 elementos, com refinamento nas proximidades dos obstáculos do escoamento, visto que nestes locais, os gradientes de velocidades, função corrente e vorticidade são maiores.

A primeira simulação feita foi com $Re = 100$ e os resultados encontrados foram mostrados na figura 5.10.

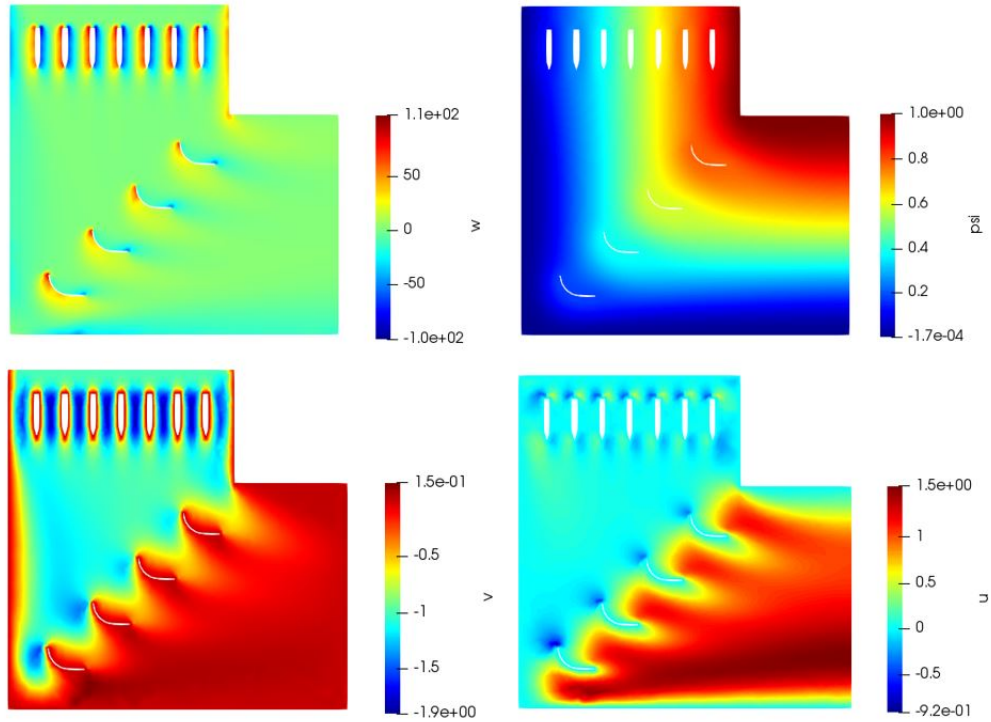


Figura 5.10: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 2 com $Re = 100$

Para esta geometria, novamente é observada uma maior vorticidade próxima aos elementos. Devido a maior quantidade de elementos, mais focos de maior vorticidade são encontrados, assim como mais restrições de fluxo que causam aumento da velocidade.

Para a análise de influência dos silenciadores, gráficos com o perfil de velocidade na direção da corrente foram traçados nas posições demonstradas na figura 5.11 e são apresentados na figura 5.12.

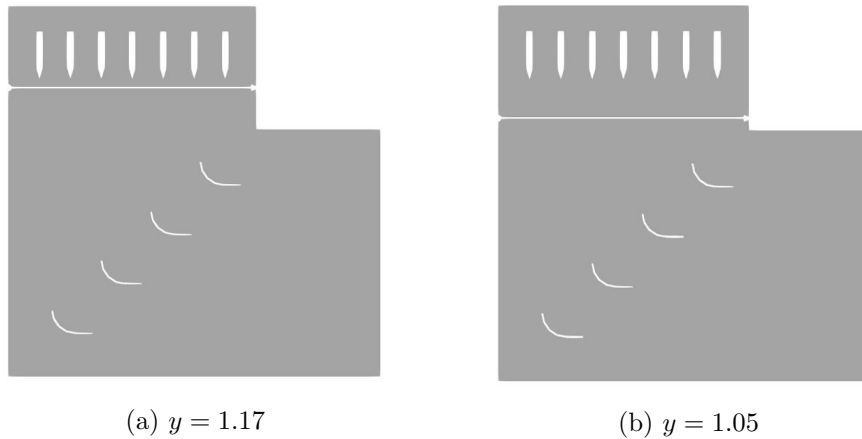


Figura 5.11: Linhas horizontais de onde os resultados da velocidade na direção da corrente na geometria 2 foram extraídos

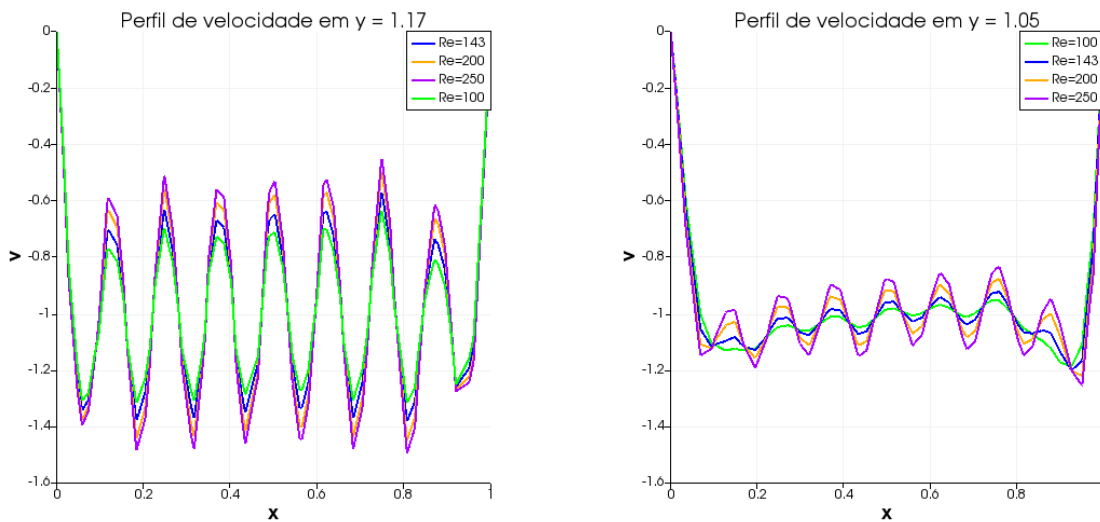


Figura 5.12: Gráficos de velocidade na direção da corrente após os silenciadores da geometria 2 para diferentes números de Reynolds

É possível perceber que com o aumento do número de Reynolds, a amplitude dos gráficos de velocidades aumentam, mas a velocidade média continua em torno de $v = -1$, a velocidade de entrada do ar. No gráfico mais afastado dos silenciadores, as amplitudes diminuíram mas é possível ver que a velocidade média é influenciada pelas paredes, principalmente próximo à $x = 1$, onde existe um ângulo de 90° .

Em seguida linhas são feitas nas posições $x = 1$ e $x = 1.2$ para analisar a influência dos defletores no escoamento:

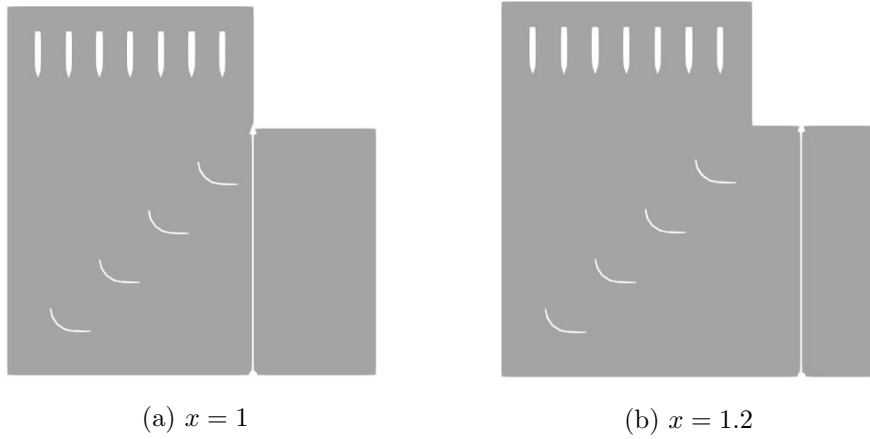


Figura 5.13: Linhas verticais de onde os resultados de velocidade na direção da corrente da geometria 2 foram extraídos

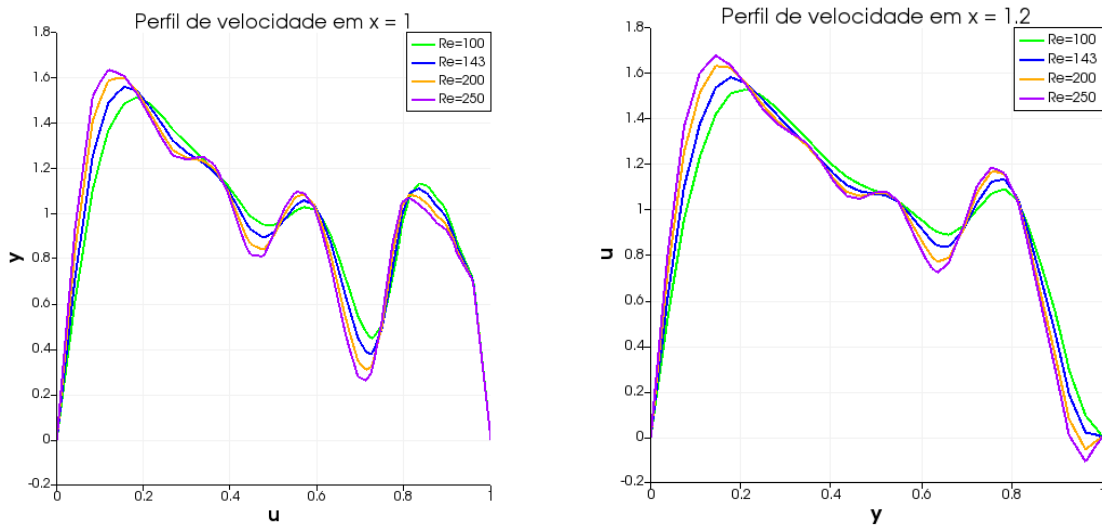


Figura 5.14: Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 2 para diferentes números de Reynolds

Da mesma forma que nos gráficos anteriores, na figura 5.14 é possível perceber que se afastando dos obstáculos as oscilações da velocidade diminuem. A presença dos defletores gera um perfil de velocidades com mais variações do que sem os defletores. A recirculação pode ser observada no perfil de velocidade em $x = 1.2$ próximo à $y = 1$. Entretanto, diferentemente do ocorrido no gráfico de velocidades da geometria 1, para esta geometria, a recirculação aparece apenas para números de Reynolds mais altos.

5.2.3 Geometria 3: Entrada de ar com 9 silenciadores e 4 defletores

Para analisar a influência de um número maior de silenciadores, uma geometria com 9 silenciadores e o mesmo número de defletores foi estudada (figura 5.15).

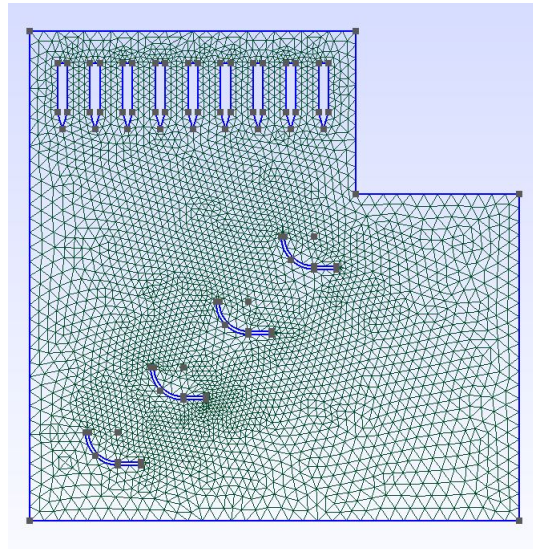


Figura 5.15: Geometria e malha 3: 9 silenciadores e 4 defletores

A malha utilizada para esta geometria foi gerada no Gmsh com 3543 nós e 6724 elementos, pelo método *Frontal-Delaunay*. Os resultados para o escoamento com $Re = 100$ são mostrados na figura 5.16.

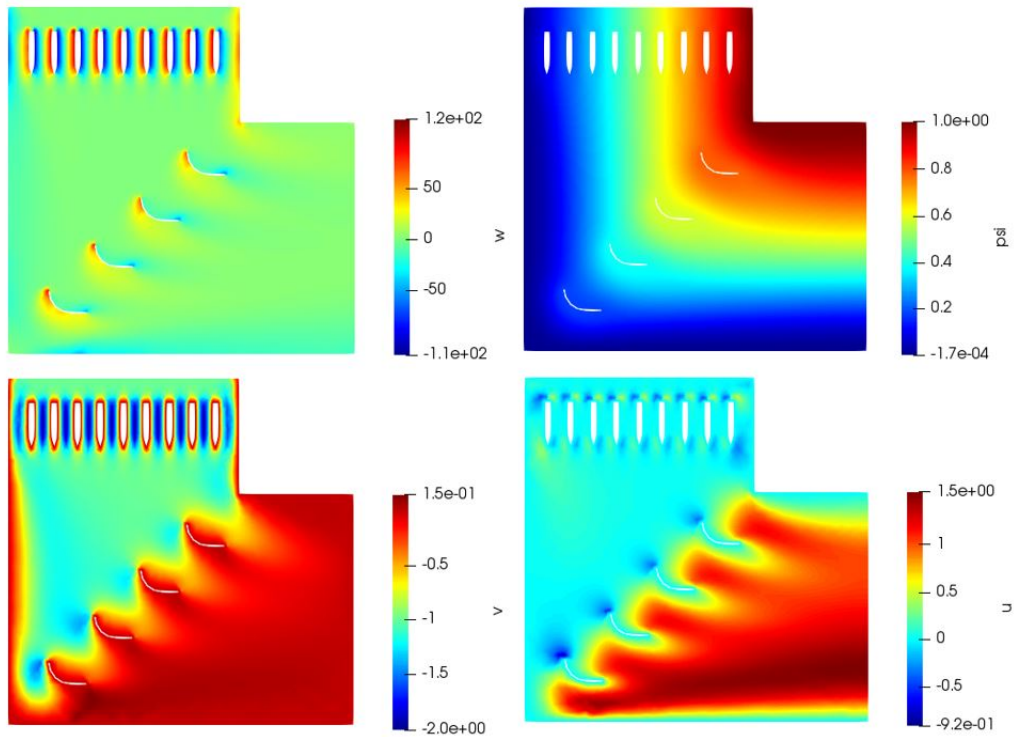


Figura 5.16: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 3 com $Re = 100$

As mesmas linhas traçadas na geometria 2, mostradas na figura 5.11 foram feitas para esta geometria, com o objetivo de obter os resultados do perfil de velocidades após os silenciadores e realizar a comparação entre as duas geometrias.

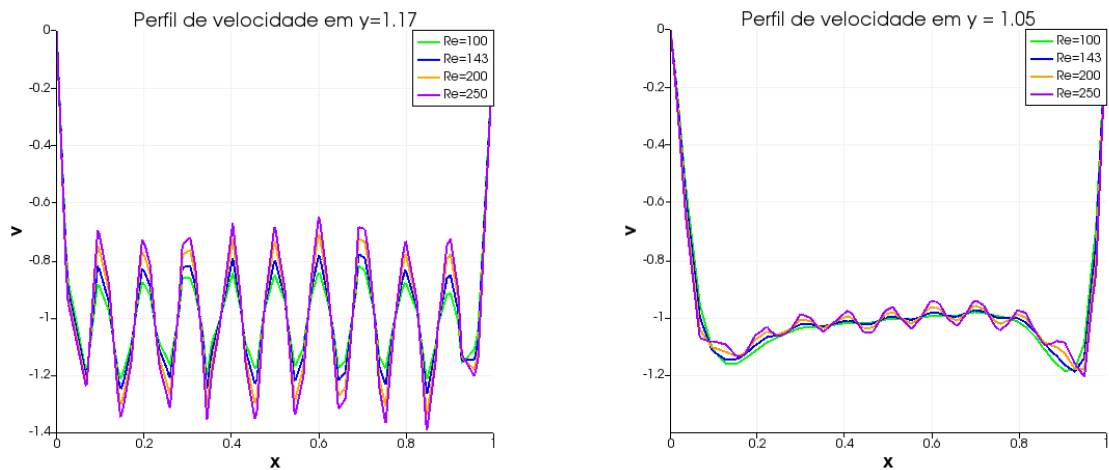


Figura 5.17: Gráficos de velocidade na direção da corrente após os silenciadores da geometria 3 para diferentes números de Reynolds

Com 9 silenciadores, as amplitudes das oscilações de velocidade foram reduzidas tanto na posição $y = 1.17$ quando na posição $y = 1.05$ em comparação a análise

anterior, com 7 silenciadores. Por outro lado, a velocidade média na direção da corrente continua em torno de $v = -1$ e o efeito da camada limite também é pouco influenciado pelo número de Reynolds.

Em seguida, para a análise dos defletores, linhas na vertical foram traçadas, assim como na geometria anterior, como mostrado na figura 5.13. Neste caso, o objetivo era ver se a mudança do número de silenciadores afeta o escoamento próximo a sucção do motor.

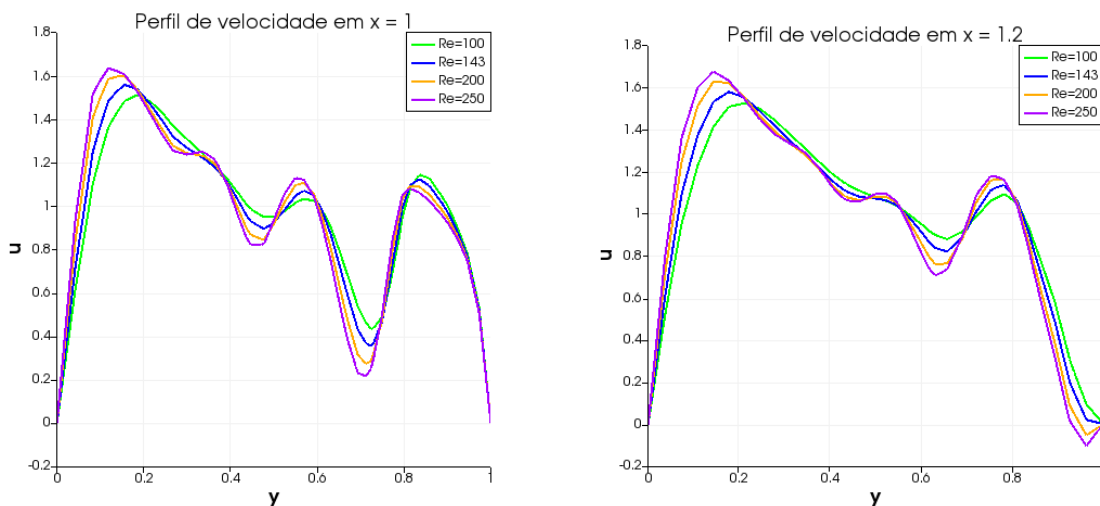


Figura 5.18: Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 3 para diferentes números de Reynolds

Os gráficos da figura 5.18 mostram poucas diferenças em comparação aos perfis de velocidade com um número reduzido de silenciadores. Isso mostra que o escoamento nesta posição, próximo à sucção do motor, foi pouco influenciado pelos silenciadores.

5.2.4 Geometria 4: Entrada de ar com 9 silenciadores e 7 defletores

Para a quarta geometria, (figura 5.19) os 9 silenciadores foram mantidos, visto que apresentaram menos oscilações nos perfis de velocidade obtidos. Para verificar a influência do defletores, a geometria 4 foi feita com 7 defletores.

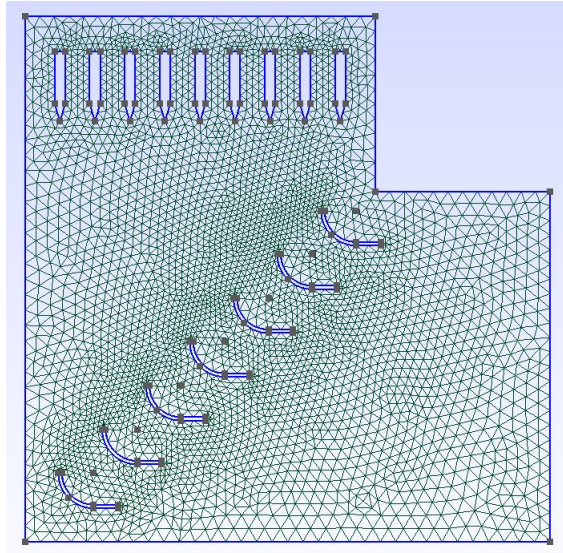


Figura 5.19: Geometria e malha 4: 9 silenciadores e 7 defletores

A malha utilizada para esta geometria foi gerada no Gmsh com 3756 nós e 7088 elementos, pelo método *Frontal-Delaunay*.

O primeiro cálculo para esta geometria, com $Re = 100$, tem os resultados apresentados na figura 5.20.

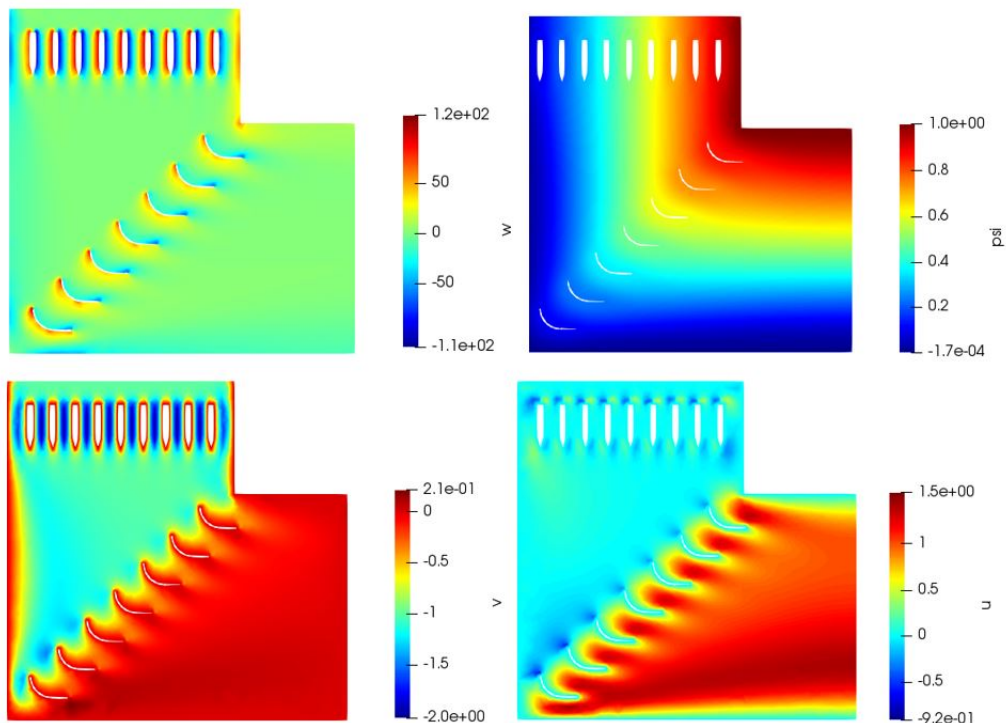


Figura 5.20: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 4 com $Re = 100$

Por um lado, estes resultados mostram mais pontos com maior vorticidade por

terem mais obstáculos na geometria. Por outro, o escoamento aparenta ser mais uniformemente distribuído ao longo de y com mais defletores. Porém apenas com os gráficos de perfil de velocidade que as diferenças no escoamento podem ser melhor analisadas.

Para esta geometria, a comparação foi feita apenas após os defletores, nas posições $x = 1.05$ e $x = 1.25$, linhas foram traçadas de forma similar a imagem 5.13. Entretanto, as posições foram ajustadas para melhorar a qualidade dos resultados obtidos.

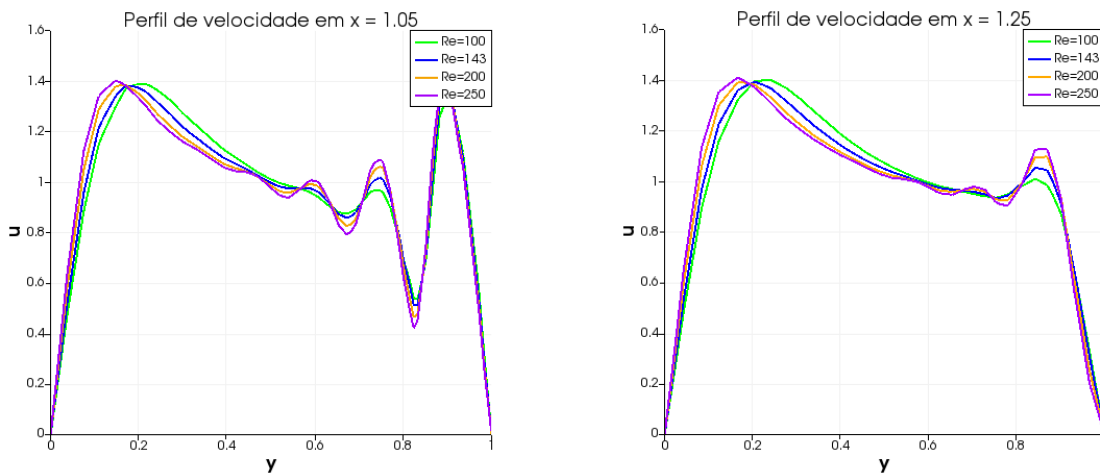


Figura 5.21: Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 4 para diferentes números de Reynolds

Nestes gráficos, as mesmas conclusões obtidas anteriormente também são observadas, como o aumento das amplitudes e a redução do efeito da parede com o aumento do número de Reynolds. Além da redução das oscilações com o distanciamento dos obstáculos. Os gráficos de velocidade traçados após os defletores mostram variações de velocidade menores que vistas nas geometrias com 4 defletores. A velocidade de corrente negativa também não está presente nesses resultados, mostrando que é menos provável que haja formação de vórtices próximo às paredes desta geometria.

5.2.5 Geometria 5: Entrada de ar com 9 silenciadores, 7 defletores e tela porosa

A última geometria (figura 5.22), para a entrada de ar é realizada com 9 silenciadores e 7 defletores, resultados que apresentaram mais uniformidade e menos probabilidade de recirculação. Além disso, a quinta geometria contém uma representação da tela porosa, presente nas células de testes reais. Para adicionar este último elemento foi necessário aumentar o comprimento do corpo da célula de teste.

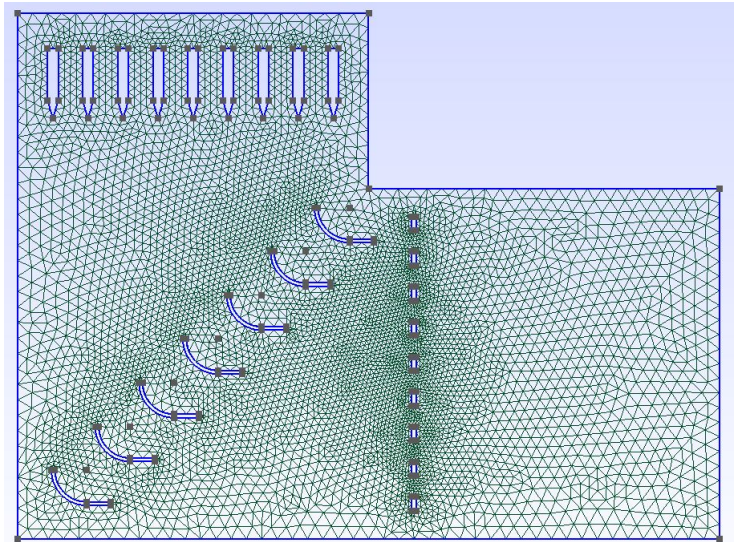


Figura 5.22: Geometria e malha 5: 9 silenciadores, 7 defletores e tela porosa

A malha utilizada para esta geometria foi gerada no Gmsh com 5921 nós e 11352 elementos, pelo método *Frontal-Delaunay*.

Na figura 5.23, os resultados para $Re = 100$ são apresentados:

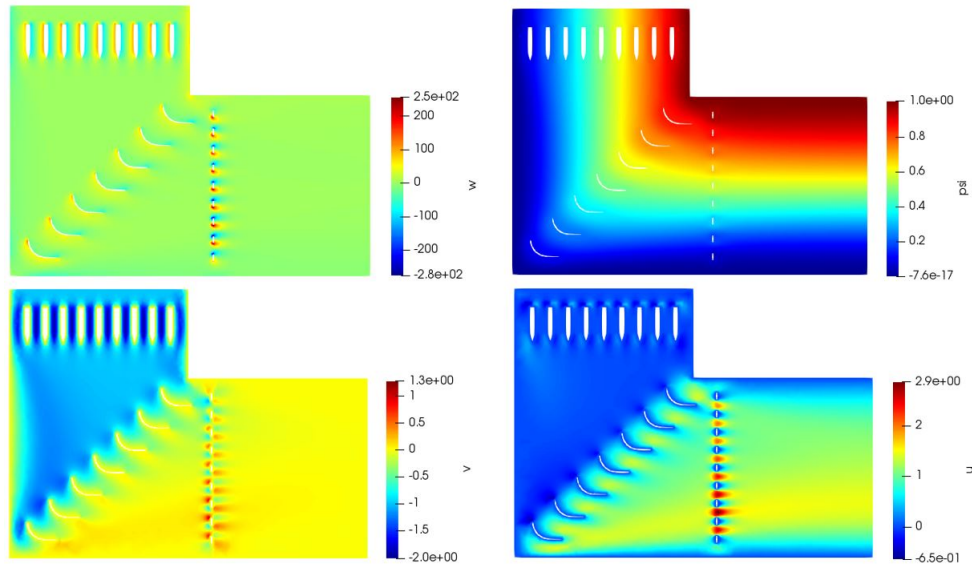


Figura 5.23: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 5 com $Re = 100$

Para esta geometria, os resultados de velocidade na direção da corrente foram extraídos nas posições $x = 1.3$ e em $x = 1.75$ (figura 5.24). O objetivo era entender a influência da tela e avaliar o perfil de velocidades próximo à sucção do motor com todos os elementos da entrada de ar.

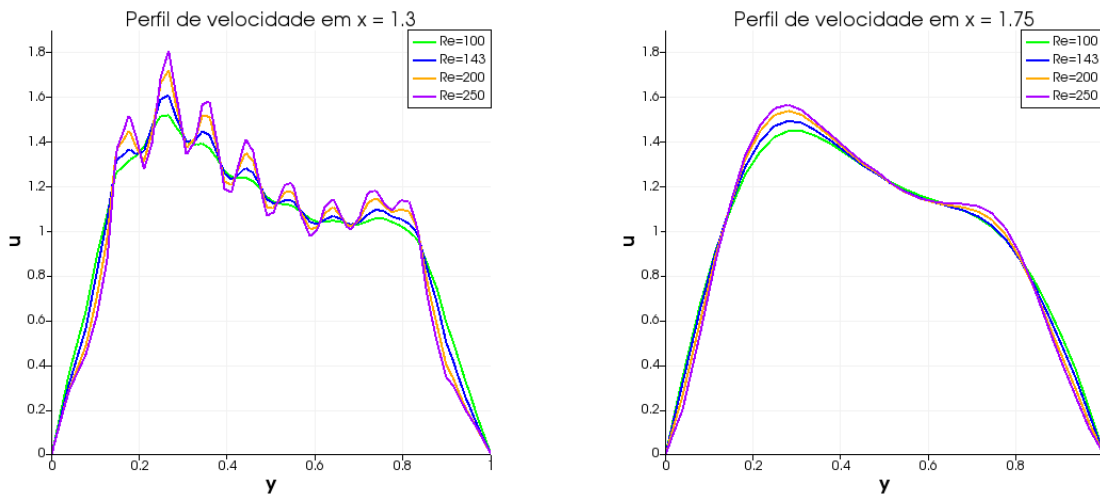


Figura 5.24: Gráficos de velocidade na direção da corrente após os defletores da geometria 5 para diferentes números de Reynolds

Os perfis de velocidade calculados para esta geometria apresentam um aumento na velocidade máxima comparado aos gráficos traçados para outras geometrias. Afastando-se dos obstáculos, nos gráficos traçados em $x = 1.75$, as oscilações não estão mais presentes. Por um lado, o escoamento nesta geometria não apresenta

velocidades contra a corrente, ou seja, recirculação. Por outro, o resultado encontrado em $x = 1.75$, mesmo que sem oscilações, apresenta variações de velocidade consideráveis.

5.2.6 Análise da distorção da velocidade na Entrada de Ar

Com o objetivo de tirar conclusões quantitativas sobre os resultados mostrados, foram obtidas as distorções de velocidade nas posições onde os gráficos foram traçados. Este parâmetro foi explicado detalhadamente no Capítulo 2 e é muito utilizado para a avaliação de eficiência de células de testes.

Para estes cálculos, o intervalo de velocidades analisado foi de $x = 0.1$ até $x = 0.9$ quando a velocidade da corrente era na direção y e de $y = 0.1$ até $y = 0.9$ quando a velocidade da corrente era na direção x . Isso foi feito pois próximo às extremidades ($x, y = 0$ e $x, y = 1$) as velocidades são afetadas pelas paredes causando grandes variações que alterariam os resultados. Como o motor fica posicionado no centro da célula, estas grandes variações nas extremidades trariam resultados indicando uma situação desfavorável fora da área de sucção do motor. Assim, estas margens foram adotadas para restringir a análise e observar as variações de velocidade na área de sucção do motor.

Primeiramente, a distorção de velocidade da geometria 1, sem defletores, é calculada na tabela 5.1 para ser comparada com as distorções de velocidade que serão mostradas para as geometrias com defletores.

Tabela 5.1: Distorção de velocidade da Geometria 1

	Geometria 1
Re	$x = 1.3$
100	117.85%
250	135.59%

Os resultados obtidos para esta primeira geometria mostram grandes variações de velocidade. Isto provavelmente é causado pela recirculação presente neste escoamento, visto nos gráficos apresentados anteriormente. Nestes gráficos, as velocidades contra a corrente eram maiores para números de Reynolds mais altos e isso fica evidente nos resultados de distorção de velocidade.

Para realizar a comparação das 2 disposições de silenciadores estudadas, sete

silenciadores na Geometria 2 e nove silenciadores na Geometria 3, as distorções de velocidade após os silenciadores foram calculadas e estão expostas na tabela 5.2. Os resultados demonstrados nesta tabela confirmam a análise feita pelos gráficos, mostrando que, assim como a amplitude das oscilações de velocidade aumentam com um número de Reynolds maior, a distorção de velocidade também aumenta. Da mesma forma, ao se afastar dos obstáculos estas oscilações reduzem e a distorção de velocidade também.

Tabela 5.2: Distorções de velocidade após silenciadores

Re	Geometria 2		Geometria 3	
	y = 1.17	y = 1.05	y = 1.17	y = 1.05
100	68.50%	21.24%	39.04%	19.10%
250	105.77%	35.08%	73.71%	19.02%

Para estudar o comportamento do escoamento com diferentes composições de defletores, as distorções de velocidade foram calculadas e estão apresentadas na tabela 5.3. Todos os resultados apresentam um aumento com maior número de Reynolds, com exceção da posição $x = 1.25$ na geometria 4. Ao analisar o gráfico 5.21 novamente, é possível observar que para números de Reynolds menores, o efeito da parede é maior no escoamento, esta provavelmente é a causa deste valor maior do que o esperado para a distorção de velocidade em $x = 1.25$ na geometria 3 para $Re = 100$.

Ao realizar a comparação destes resultados com as distorções de velocidade da primeira geometria, sem defletores, é possível ver que tais valores reduzem com o aumento de obstáculos no escoamento.

Tabela 5.3: Distorções de velocidade após defletores

Re	Geometria 2		Geometria 3		Geometria 4	
	x = 1	x = 1.2	x = 1	x = 1.2	x = 1.05	x = 1.25
100	99.94%	89.68%	101.09%	88.30%	79.98%	46.98%
250	133.37%	126.58%	137.55%	126.28%	93.27%	45.64%

Para finalizar a análise da entrada de ar, o mesmo parâmetro foi calculado para a última geometria, que contém a tela porosa. Dados foram obtidos logo após a tela, $x = 1.3$ e um pouco depois dela no escoamento, em $x = 1.75$. É possível ver que o resultado mais afastado da tela é maior do que o esperado para ambos os números de Reynolds. É possível observar que o escoamento ganha velocidade ao

se afastar dos obstáculos. Além disso, a mudança de direção do escoamento com os defletores causa uma curva de velocidade com uma inclinação considerável que afeta a distorção de velocidade.

Tabela 5.4: Distorção de velocidade após tela porosa

Re	Geometria 5	
	x = 1.3	x = 1.75
100	81.44%	80.38%
250	123.86%	96.84%

Esta análise permitiu concluir que a distorção de velocidade é uma maneira quantitativa de analisar os resultados obtidos com os gráficos de perfil de velocidade. Estes valores junto aos gráficos permitem um bom entendimento do escoamento, quantificando a eficácia da célula.

5.3 Saída de Ar

Neste subcapítulo a segunda parte da célula de testes será estudada. Esta contém os elementos após o motor, que direcionam a saída dos gases de exaustão. Foram apresentados no Capítulo 2 o duto ampliador e os silenciadores da saída. O objetivo do estudo desta seção é entender o escoamento da saída de ar e influência de diferentes dutos ampliadores, dessa forma os silenciadores não foram incluídos na geometria analisada.

A geometria estudada é mostrada na figura 5.25, onde é possível ver a representação do motor (índices 4 e 5), as 3 vazões de entrada (índices 1, 2 e 3), a parede externa (índices 7), a parede interna (índice 6) e a saída (índice 8). É possível ver que os outros elementos da sessão de trabalho, como a plataforma e o suporte do motor foram desconsiderados.

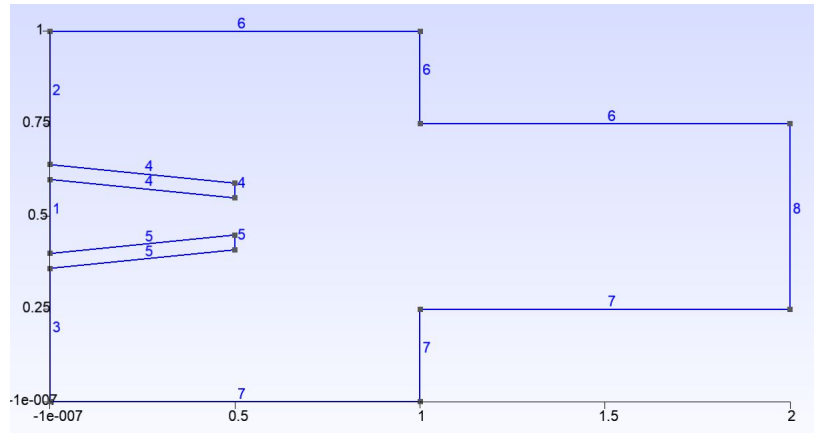


Figura 5.25: Geometria da saída de ar estudada: representação do motor e duto ampliador

O diâmetro do motor foi considerado 0.2m, sendo uma escala de 10:1, um diâmetro em torno 2m é comum em motores comerciais de médio porte. O comprimento do motor junto dos equipamentos presos a ele (bellmouth) também teve o valor escolhido de acordo com o que é encontrado na indústria, foi de 0.5m.

A modelização do motor é complexa devido as inúmeras variações de forças, temperaturas e pressões ao longo de sua geometria. Visto que este trabalho busca resultados qualitativos, provenientes de comparações entre simulações simples, tais informações sobre o motor não foram consideradas. Entretanto, para a análise da eficácia dos dutos é interessante que exista uma diferenciação entre o fluxo de Bypass e o fluxo de exaustão do motor.

Impondo uma razão de Bypass de 100% e considerando que a vazão total da célula é igual a imposta na entrada de ar, sendo:

$$\psi_{parede\ interna} = 1 \quad (5.4)$$

$$\psi_{parede\ externa} = 0 \quad (5.5)$$

Foi assim possível obter as condições de contorno de velocidade e função corrente para a entrada do escoamento nesta geometria (índices 1, 2, 3, 4, 5). No Apêndice A, o cálculo para a obtenção destas condições de contorno é detalhado.

5.3.1 Geometria 6: Saída de ar com distância de 0.5 entre motor e duto de diâmetro 0.5

A primeira geometria (figura 5.26) da saída de ar é composta por um duto ampliador de diâmetro igual a metade da sessão da célula, 0.5m. A distância entre a exaustão do motor e a entrada do duto é 0.5m.

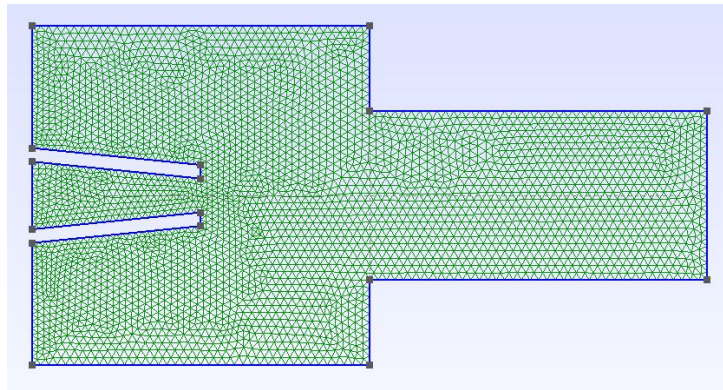


Figura 5.26: Geometria 6 e malha da primeira configuração de saída de ar

A malha utilizada foi construída pelo método *Frontal Delaunay* e é composta de 3524 nós e 6642 elementos.

Os resultados do escoamento na Geometria 6 com $\nu = 0.004$ estão presentes na figura 5.27.

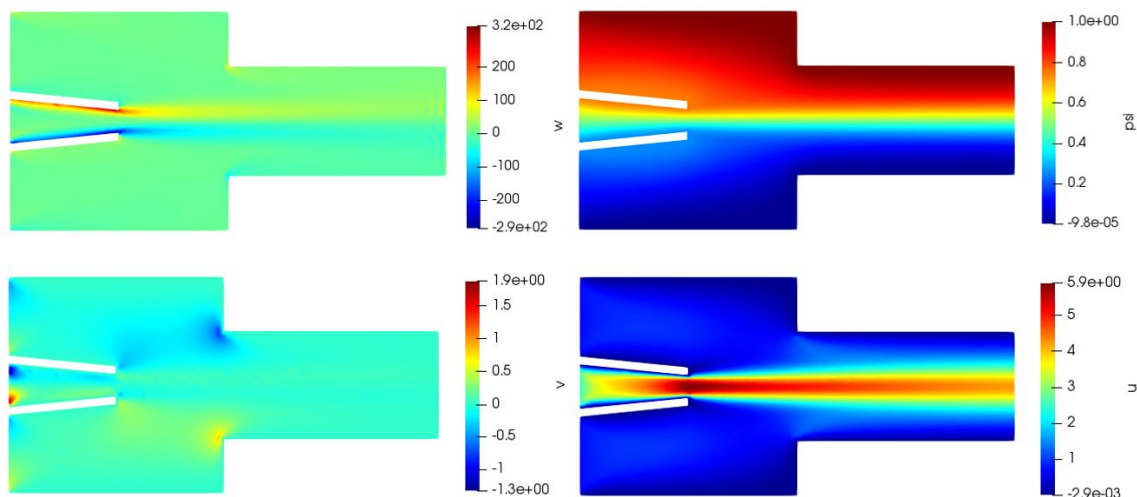


Figura 5.27: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 6

A simulação da razão de Bypass de 100% é visível nos resultados. É possível ver no gráfico de u a diferença de velocidades entre a exaustão do motor e a vazão de

Bypass, em torno do motor. Com tais resultados, torna-se mais fácil a compreensão da utilidade do duto ampliador, que é capturar a exaustão do motor e evitar que haja re-injeção destes gases.

No gráfico de u a vazão de Bypass direciona a exaustão para dentro do duto ampliador, onde ocorrerá o resfriamento desta exaustão pelo contato com a vazão de Bypass e a redução do ruído.

5.3.2 Geometria 7: Saída de ar com distância de 0.25 entre motor e duto de diâmetro 0.5

A segunda geometria (figura 5.28) da saída de ar tem uma distância menor entre o motor e o duto com o diâmetro, 0.25m.

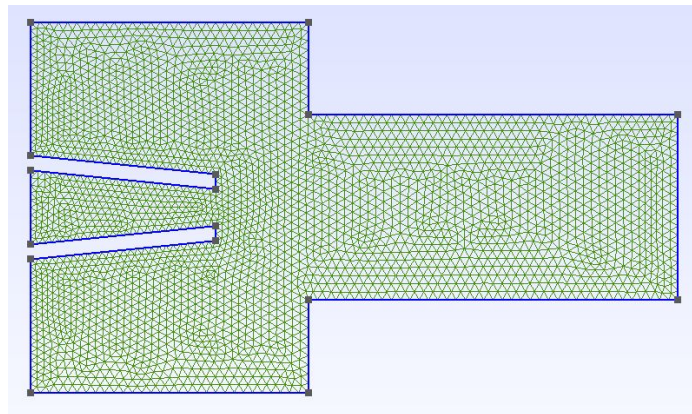


Figura 5.28: Geometria 7 e malha da segunda configuração de saída de ar

A malha utilizada foi construída pelo método *Frontal Delaunay* e é composta de 2982 nós e 5628 elementos.

Os resultados do escoamento na geometria 7 estão presentes na figura 5.29. Eles mostram uma velocidade u contra a corrente mais significativa, o que indica uma formação de vórtices mais significativa, provavelmente onde ocorre a mudança de seção da célula para o duto. Essa recirculação pode restringir a passagem da vazão de bypass, afetando a razão de Bypass, diminuindo a razão imposta como 100%. Isso não pode ser visto na simulação realizada já que nesse caso a razão de bypass foi imposta no problema e não calculada. Para melhores análises deste efeitos, outros tipos de simulações devem ser realizadas.

Além disso, no resultado da componente v da velocidade, na figura 5.29 é possível

ver que existe uma aceleração da velocidade entre o motor e o duto, na passagem da vazão de *bypass*. Isso indica que uma aproximação muito grande do motor com o duto causa uma restrição na passagem deste fluxo de *bypass* diminuindo a eficácia do duto em reduzir a velocidade, temperatura e ruído da exaustão com a mistura de vazões.

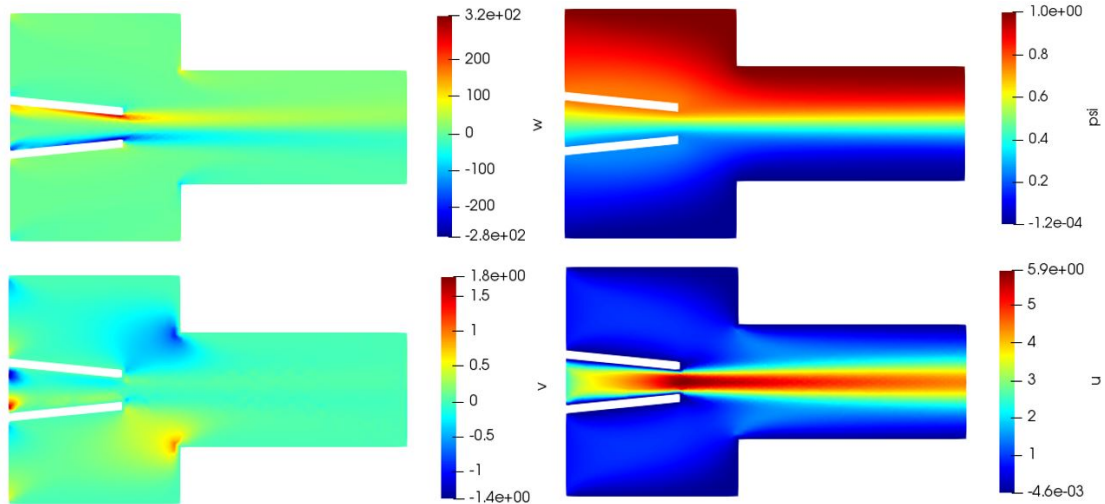


Figura 5.29: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 7

5.3.3 Geometria 8: Saída de ar com distância de 0.75 entre motor e duto de diâmetro 0.5

A oitava geometria estudada, terceira proposta para a saída de ar (figura 5.30) mostra um motor mais afastado do duto ampliador, ainda com o mesmo diâmetro. Esta distância agora é de 0.75m.

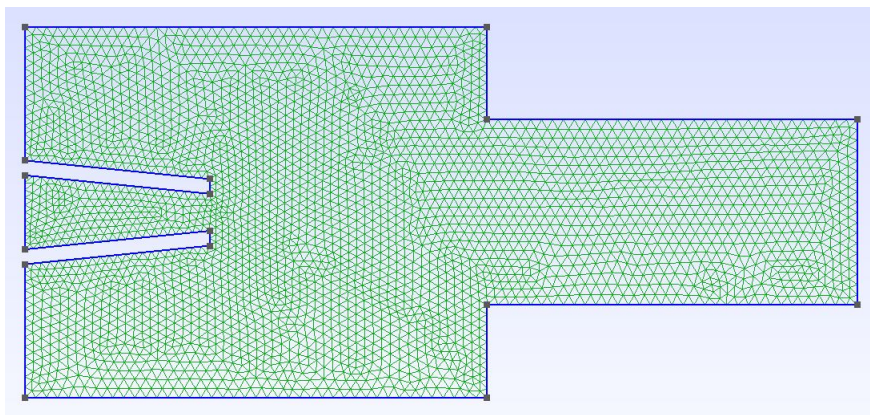


Figura 5.30: Geometria 8 e malha da terceira configuração de saída de ar

A malha utilizada foi construída pelo método *Frontal Delaunay* e é composta de 3181 nós e 6040 elementos.

Os resultados para o escoamento nesta geometria estão apresentados na figura 5.31.

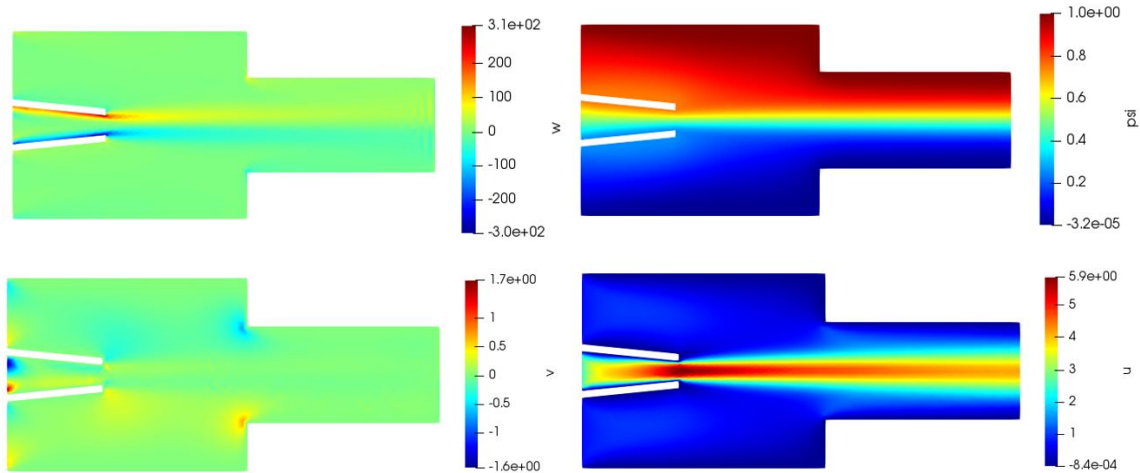


Figura 5.31: Resultados de vorticidade(ω), função corrente(ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 8

A velocidade u contra corrente é reduzida, indicando que quanto mais o duto é afastado da exaustão do motor, menos recirculação no escoamento. A vorticidade e a velocidade v no entanto, não apresentam grandes diferenças nas 3 últimas geometrias. Entretanto, é importante notar que com um grande afastamento do motor com o duto a probabilidade de ocorrer reingestão dos gases de exaustão aumenta. Isso ocorre pois o fluxo de exaustão se dispersa ao se afastar do motor e pode acabar não entrando no duto.

5.3.4 Geometria 9: Saída de ar com distância de 0.5 entre motor e duto de diâmetro 0.3

Nesta última simulação para a saída de ar, a distância entre o motor e o duto foi mantida em 0.5m. Nesta geometria foi buscada uma análise do diâmetro do duto, assim, este foi reduzido para 0.3 (figura 5.32).

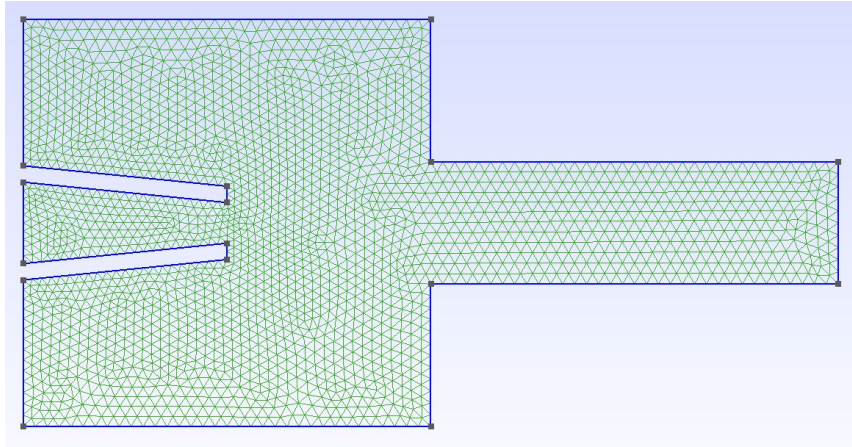


Figura 5.32: Geometria 9 e malha da quarta configuração de saída de ar

A malha utilizada foi construída pelo método *Frontal Delaunay* e é composta de 2359 nós e 4416 elementos.

Os resultados desta simulação são mostrados na figura 5.33. É possível ver que o fluxo de exaustão do motor é afetado pela entrada do duto, que causa uma restrição de fluxo aumentando a velocidade do fluido e impedindo a entrada de parte da exaustão devido a limitação de tamanho. Isso pode causar uma recirculação dos gases de exaustão e então a re-ingestão de tais gases. Além disso, isto impede que o duto cumpra seu objetivo de reduzir a velocidade e temperatura do escoamento, já que não ocorre a mistura com a vazão de Bypass.

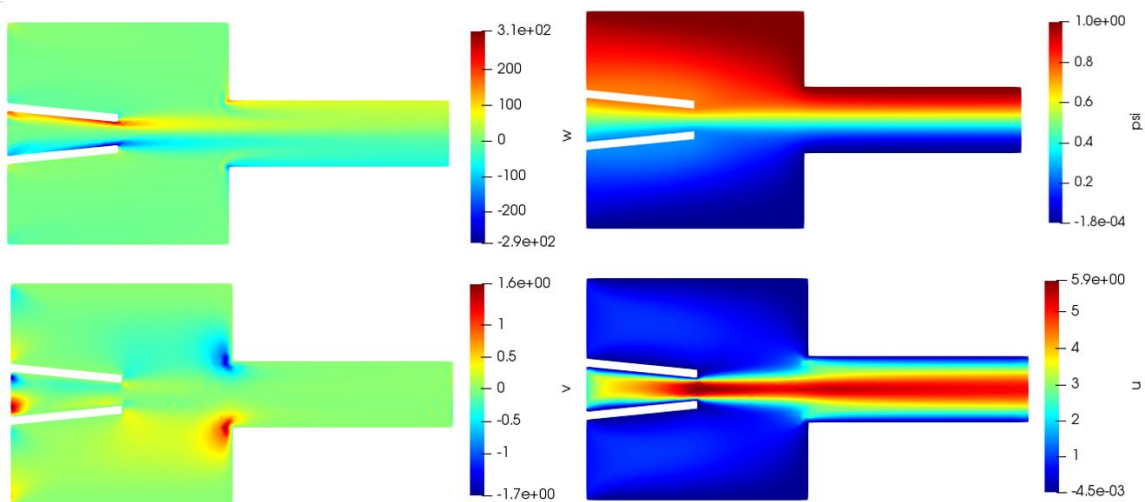


Figura 5.33: Resultados de vorticidade (ω), função corrente (ψ) e das componentes de velocidade (u e v) para o escoamento na geometria 9

Capítulo 6

Conclusões

O presente trabalho utiliza o método dos elementos finitos para a resolução de problemas de mecânica dos fluidos. Utilizando a formulação corrente-vorticidade, que permite um desacoplamento do campo de velocidade e de pressão, o escoamento é calculado e os campos de velocidade, função corrente e vorticidade são encontrados. A metodologia aplicada para tais cálculos é computacional. Um código em linguagem Python foi desenvolvido para a resolução dos problemas propostos neste trabalho.

Dessa forma, o escoamento de células de testes para motores aeronáuticos é estudado. Os resultados obtidos neste trabalho permitem uma maior compreensão do impacto de cada elemento no escoamento do ar na célula e sua importância para o bom funcionamento desta.

Primeiramente, foram feitas simulações de escoamento para diversas geometrias de entrada de ar, com os elementos posicionados antes do motor. A partir destes resultados, posições de interesse da geometria foram escolhidas, onde gráficos de velocidade na direção da corrente foram traçados. Junto a estes gráficos, cálculos de distorção de velocidade foram feitos para auxiliar na discussão de tais resultados.

Enfim, foi possível comparar e discutir os resultados obtidos. Ao aumentar a quantidade de elementos na célula, as oscilações da velocidade na direção da corrente reduziam, reduzindo também a distorção da velocidade. Isso ocorre por uma perda de carga que existe ao adicionar mais obstáculos no escoamento. Comparando as geometrias: 1, sem defletores, 2, com quatro defletores e 4, com sete defletores; foi possível concluir que com mais defletores, menos sinais de recirculação no escoamento

e perfis de velocidade menos variáveis.

Ao realizar as análises para diversos números de Reynolds, algumas outras conclusões foram obtidas. Foi possível ver nos gráficos e nos resultados de distorção de velocidade, que com Reynolds mais altos, o efeito da parede no escoamento é menor, ou seja, o fluido chega a velocidade da corrente em uma posição mais próxima da parede. Além disso, a recirculação e a conseqüente formação de vórtices apareceram mais para Reynolds mais altos. Levando em consideração que as células reais alcançam números de Reynolds muito maiores do que os estudados neste trabalho, a formação de vórtices é bem mais recorrente do que no presente trabalho. Assim, deve-se buscar células com mais elementos para maximizar a perda de carga e buscar formas arredondadas ao invés de geometrias com cantos vivos. Dessa forma, uma análise aprofundada de escoamentos com números de Reynolds maiores é uma sugestão para trabalhos futuros.

Em relação a saída de ar, o estudo realizado deu enfoque no duto ampliador. As condições de contorno aplicadas foram resultado da imposição de uma razão de Bypass de 100%. As geometrias construídas permitiram a comparação entre diferentes posicionamentos do duto em relação ao motor, além de diferentes diâmetros do duto. Visto que a simulação realizada foi bidimensional, deve-se levar em consideração um erro nos resultados na passagem da célula de seção quadrada para o duto de seção circular.

As análises realizadas permitiram uma melhor compreensão da função do duto na célula. Os resultados obtidos mostraram a importância da escolha do posicionamento e do diâmetro do duto ampliador para que este possa cumprir bem sua função no sistema completo do banco de provas.

O diâmetro do duto ampliador deve ser amplo o suficiente para absorver toda a exaustão do motor, junto a vazão de Bypass que tem a função de resfriar os gases de exaustão. A distância entre o motor e o duto também deve ser bem estudada, visto que uma distância muito pequena pode causar recirculação e conseqüentemente uma redução da razão de Bypass, e uma distância muito grande pode causar a reingestão dos gases de exaustão. Entretanto, visto que a razão de Bypass foi imposta no problema, não foi possível observar este efeito com a metodologia utilizada neste trabalho. Além disso, como as forças geradas pelo motor não foram impostas no

problema, a exaustão dos gases não pôde ser simulada com exatidão. Apenas com uma simulação mais detalhada do motor, os valores ideais para o diâmetro e a posição do duto podem ser encontrados. Assim, uma sugestão para trabalhos futuros é a simulação da sucção e exaustão do motor como condições de contorno que dão origem ao escoamento e a partir disso calcular as razões de *Bypass*, podendo assim, entender melhor a influência do duto ampliador no escoamento.

Referências Bibliográficas

- [1] TECNODEFESA, “GE Celma inaugura sofisticado Bancos de Provas de motores aeronáuticos em Três Rios”, <https://tecnodefesa.com.br/ge-celma-inaugura-sofisticado-bancos-de-provas-de-motores-aeronauticos-em-tres-rios/>, Accessed: 19/07/2022.
- [2] RAMOS, G. L. B., *Study of a Test Cell for Commercial Jet Engines*, Master’s Thesis, Técnico Lisboa, Portugal, 2015.
- [3] DESMARAIS, G., “Discrete tones in subsonic jet engine test cells”, 2018.
- [4] GILMORE, J. D., *Computation Fluid Dynamics Analysis of Jet Engine Test Facilities*, Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering at the University of Canterbury, Christchurch, New Zeland, 2011.
- [5] FOX, R., MCDONALD, A., PRITCHARD, P., *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. LTC, 2014.
- [6] WHITE, F. M., *Mecânica dos Fluidos*. Mc Graw Hill, 2011.
- [7] FORTUNA, A. D. O., *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. USP, 2000.
- [8] SAE, *Design Considerations for Enclosed Turbofan/Turbojet Engine Test Cells*, Tech. Rep. SAE AIR 4869, SAE International, 1995.
- [9] HO, W. H., *Investigation into the Vortex Formation Threshold and Infrasound Generation in a Jet Engine Test Cell*, Ph.D. Thesis, Mechanical Engineering at the University of Canterbury, New Zeland, 2009.
- [10] MEIER, N., “Civil Turbojet/Turbofan specifications”, <https://www.jet-engine.net/civtfspec.htm>, Accessed: 12/08/2022.

- [11] KARAMANLIS, A., SOKHEY, J., DUNN, T., et al., “Theoretical and Experimental Investigation of Test Cell Aerodynamics for Turbofan Applications”, 1986.
- [12] ANJOS, G., *Computação Científica para Engenheiros*. 2021.
- [13] DOS SANTOS, F. O., *Simulação numérica de escoamento de fluidos utilizando diferenças finitas generalizadas*, Master’s Thesis, USP, São Carlos, 2005.
- [14] PONTES, J., MANGIACACCHI, N., *Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia. Volume 1: Fundamentos*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira da Matemática, 2013.

Apêndice A

Imposição da razão de Bypass nas geometrias de saída de ar

Sendo a vazão total da célula igual a vazão imposta na entrada de ar:

$$Q_T = \psi_{parede\ interna} - \psi_{parede\ externa} = 1 \quad (\text{A.1})$$

A soma das vazões de entrada deve ser igual a Q_T :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T = 1 \quad (\text{A.2})$$

Impondo a vazão de Bypass como 100%:

$$BPR = \frac{Q_T - Q_2}{Q_2} \times 100\% = \frac{Q_1 + Q_3}{Q_2} \times 100\% = 100\% \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{Q_1 + Q_3}{Q_2} = 1 \quad (\text{A.4})$$

Assim, é possível concluir que:

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 \quad (\text{A.5})$$

E então, substituindo na igualdade acima:

$$2Q_2 = 1 \quad (\text{A.6})$$

Obtem-se os valores das vazões de entrada, considerando a vazão $Q_1 = Q_3$:

$$Q_2 = 0.5 \quad Q_1 = Q_3 = 0.25 \quad (\text{A.7})$$

Visto que a vazão neste trabalho é calculada como a velocidade vezes a distância, neste caso representada por y , é possível obter as velocidades:

$$u_2 = \frac{0.5}{0.2} = 2.5 \quad (\text{A.8})$$

$$u_1 = u_3 = \frac{0.25}{0.36} = 0.69444 \quad (\text{A.9})$$

Os valores considerados para as distâncias são conforme a figura 5.25. As condições de contorno de velocidade para os índices 4 e 5 são nulos, já que representam o motor.

Em seguida é necessário definir as condições de contorno da função corrente, com o valor da velocidade obtida para cada parte do *inlet*:

$$\psi_3 = 0.69444y \quad (\text{A.10})$$

$$\psi_2 = 0.25 + 2.5(y - 0.4) \quad (\text{A.11})$$

$$\psi_1 = 0.75 + 0.69444(y - 0.64) \quad (\text{A.12})$$

Enquanto nos elementos do motor, índices 4 e 5, a função corrente é fixa:

$$\psi_5 = 0.25 \quad (\text{A.13})$$

$$\psi_4 = 0.75 \quad (\text{A.14})$$