

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

TIAGO ALVES CALVANO DO AMARAL

**ANÁLISE CFD DE DIFUSÃO DE ESPÉCIE QUÍMICA PARA
DIFERENTES GEOMETRIAS DE STENT FARMACOLÓGICO**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

2020



TIAGO ALVES CALVANO DO AMARAL

**ANÁLISE CFD DE DIFUSÃO DE ESPÉCIE QUÍMICA PARA
DIFERENTES GEOMETRIAS DE STENT FARMACOLÓGICO**

Projeto de Graduação apresentado ao
Curso de Engenharia Mecânica da Escola
Politécnica, Universidade Federal do Rio de
Janeiro, como parte dos requisitos necessários
à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos

RIO DE JANEIRO
DEZEMBRO DE 2020

ANÁLISE CFD DE DIFUSÃO DE ESPÉCIE QUÍMICA PARA DIFERENTES
GEOMETRIAS DE STENT FARMACOLÓGICO

Tiago Alves Calvano do Amaral

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO
DE ENGENHARIA MECÂNICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

Examinada por:

Prof. Gustavo Rabello do Anjos, Ph.D

Prof. Juliana Braga Rodrigues Loureiro, D.Sc

Prof. Daniel Onofre de Almeida Cruz, D.Sc

Eng. Leandro Marques dos Santos, M.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 2020

Amaral, Tiago Alves Calvano do

Análise CFD de difusão de espécie química para diferentes geometrias de stent farmacológico / Tiago Alves Calvano do Amaral. - Rio de Janeiro: UFRJ/ESCOLA POLITÉCNICA, 2020.

XIV, 101 p.: il.; 29.7 cm

Orientador: Gustavo Rabello dos Anjos.

Projeto de Graduação – UFRJ/ POLI/ Engenharia Mecânica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 91-94

1. Formulação Corrente-Vorticidade. 2. Método de Elementos Finitos. 3. Esquema Taylor-Galerkin. 4. Geometrias Stent Farmacológico. I. Anjos, Gustavo Rabello dos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Mecânica. III. Análise CFD de difusão de espécie química para diferentes geometrias de stent farmacológico

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Ursula Matos, pelo suporte, dedicação e amor de todos os dias.

Agradeço ao amigo Bernardo Vignoli, pelo auxílio de equipamento computacional, que permitiu análises e assim a realização deste trabalho, e pela amizade e colaboração nos estudos durante a faculdade.

Á meus amigos, Antônio Flávio, Bruno Mesquita, Fábio Fleming, Gabriel Leite, Gabriel Pires, João Octávio, Lucas Alves, Marcel Monclaro, Pedro Rezende, Rodrigo Cavallero, Tomas Faveret, Tomas Fischer, pela contribuição diária de sanidade mental que permitiu mesmo em momentos difíceis o foco e a gana para o meu desenvolvimento acadêmico neste período de 5 anos.

Á meus companheiros de Baja, Rafael Tabach, Sofia Asenjo e Victor Almeida pelos momentos proporcionados durante a faculdade, tais que permitiram maior tranquilidade e felicidade nessa longa jornada acadêmica.

Por fim, presto um especial agradecimento ao meu orientador Gustavo Rabello do Anjos e ao doutorando Leandro Marques, cujos ensinamentos, sugestões e compreensão foram alicerces desta monografia.

RESUMO

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Análise CFD de difusão de espécie química para diferentes geometrias de stent farmacológico

Tiago Alves Calvano do Amaral

Dezembro/2020

Orientador: Prof. Ph.D Gustavo Rabello dos Anjos

Curso: Engenharia Mecânica

Este trabalho objetiva-se no desenvolvimento de uma simulação computacional para a análise da difusão de uma espécie química no escoamento em uma artéria coronária em diferentes geometrias de stent farmacológico. O Método de Elementos Finitos foi utilizado para a resolução das equações que governam o escoamento sanguíneo na artéria coronária com a implementação de um stent farmacológico. O sangue foi definido como um fluido monofásico, incompressível e newtoniano. A formulação corrente-vorticidade - da equação de Navier-Stokes - com o transporte de espécie química foi utilizada como equações de governo. Devido a necessidade de eliminação de oscilações espúrias encontradas em simulações onde se encontram termo convectivo predominante, foi adotado o esquema Taylor-Galerkin.

Palavras-chave: Formulação Corrente-Vorticidade, Método de Elementos Finitos, Esquema Taylor-Galerkin, Geometrias Stent Farmacológico.

ABSTRACT

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

CFD analysis of chemical species diffusion for different pharmacological stent geometries

Tiago Alves Calvano do Amaral

Dezembro/2020

Advisor: Prof. Ph.D Gustavo Rabello dos Anjos

Course: Mechanical Engineering

This work aims to develop a computational simulation in order to perform an analysis of chemical species diffusion in the blood flow of a coronary artery for different pharmacological stent geometries. The Finite Element Method was used to solve the governing equations of the blood flow in coronary artery with atherosclerosis and drug-eluting stent placed. The blood was modeled as a single-phase, incompressible and Newtonian fluid. The stream-vorticity formulation - of Navier-Stokes equation - with chemical species transport equation were used as governing equations. Due to the necessity to decrease spurious oscillations as seen when the convective term is predominant, the Taylor-Galerkin scheme was adopted.

Keywords: Stream-Vorticity Formulation; Finite Element Method; Taylor-Galerkin Scheme; Drug-Eluting Stent; Stent geometries.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Implementação do stent farmacológico	6
Figura 2 – História do MEF	7
Figura 3 – Elemento de Malha Triangular	42
Figura 4 – Fluxograma de funcionamento do código	47
Figura 5 – Malha de um domínio qualquer	48
Figura 6 – Fluxograma do algoritmo de solução	53
Figura 7 – Escoamento de Poiseuille	57
Figura 8 – Solução numérica - Convergência de u	59
Figura 9 – Comparação Analítica x Numérica	59
Figura 10 – Lid-Driven Cavity Flow	60
Figura 11 – Perfil de u na linha central da cavidade ($x = 0.5$) para Reynolds = 100.	61
Figura 12 – Perfil de v na linha central da cavidade ($y = 0.5$) para Reynolds = 100.	61
Figura 13 – Geometria base com representações das distâncias padrão de posição do stent e do volume de estudo	63
Figura 14 – Geometria base - adimensionalizada	64
Figura 15 – Relação Número de Elementos x Erro	65
Figura 16 – Relação Número de Elementos x Tempo de processamento	65
Figura 17 – Relação Número de Elementos x Element Size Factor	66
Figura 18 – Geometria 1 - Stent canal	66
Figura 19 – Condições de contorno geometria 1, espécie química não representada	67
Figura 20 – Geometria 1 - Evolução do campo de concentração	68
Figura 21 – G1 - Campo de velocidade u	68
Figura 22 – G1 - Campo de velocidade v	68
Figura 23 – Geometria 2 - Stent mola helicoidal tipo 1	69
Figura 24 – Condições de contorno geometria 2, espécie química não representada	70
Figura 25 – Geometria 2 - Evolução do campo de concentração	71
Figura 26 – G2 - Campo de velocidade u	71
Figura 27 – G2 - Campo de velocidade u	72
Figura 28 – Geometria 3 - Stent mola helicoidal tipo 2	72
Figura 29 – Condições de contorno geometria 3, espécie química não representada	73
Figura 30 – Geometria 3 - Evolução do campo de concentração	73
Figura 31 – G3 - Campo de velocidade u	74

Figura 32 – G3 - Campo de velocidade v	74
Figura 33 – Geometria 3 - Evolução do acúmulo de concentração	75
Figura 34 – Geometria 4 - Stent anéis interligados	75
Figura 35 – Condições de contorno geometria 4, espécie química não representada	76
Figura 36 – Geometria 4 - Evolução do campo de concentração	77
Figura 37 – G4 - Campo de velocidade u	77
Figura 38 – G4 - Campo de velocidade v	77
Figura 39 – Geometria 5 - Stent mola helicoidal tipo 3	78
Figura 40 – Condições de contorno geometria 5, espécie química não representada	79
Figura 41 – Geometria 5 - Evolução do campo de concentração	79
Figura 42 – G5 - Campo de velocidade u	80
Figura 43 – G5 - Campo de velocidade v	80
Figura 44 – Geometria 6 - Stent atual	80
Figura 45 – Stent Farmacológico com balão	81
Figura 46 – Stent farmacológico em uma artéria	81
Figura 47 – Condições de contorno geometria 6, espécie química não representada	82
Figura 48 – Geometria 6 - Evolução do campo de concentração	83
Figura 49 – G6 - Campo de velocidade u	83
Figura 50 – G6 - Campo de velocidade v	83
Figura 51 – Geometria 7 - Stent mola helicoidal tipo 4	84
Figura 52 – Condições de contorno geometria 7, espécie química não representada	85
Figura 53 – Geometria 7 - Evolução do campo de concentração	85
Figura 54 – G7 - Campo de velocidade u	86
Figura 55 – G7 - Campo de velocidade v	86
Figura 56 – Geometria 7 - Evolução do acúmulo de concentração	86
Figura 57 – Geometria 8 - Stent mola helicoidal tipo 5	87
Figura 58 – Condições de contorno geometria 8, espécie química não representada	88
Figura 59 – Geometria 8 - Evolução do campo de concentração	88
Figura 60 – G8 - Campo de velocidade u	89
Figura 61 – G8 - Campo de velocidade v	89
Figura 62 – Geometria 8 - Evolução do acúmulo de concentração	90
Figura 63 – Geometria 9 - Stent com deformação	90
Figura 64 – Condições de contorno geometria 9, espécie química não representada	91
Figura 65 – Geometria 9 - Evolução do campo de concentração	92
Figura 66 – G9 - Campo de Velocidade u	92

Figura 67 – G9 - Campo de Velocidade v	92
Figura 68 – Geometria 10 - Stent senoidal	93
Figura 69 – Condições de contorno geometria 10, espécie química não representada	94
Figura 70 – Geometria 10 - Evolução do campo de concentração	94
Figura 71 – G10 - Campo de Velocidade u	95
Figura 72 – G10 - Campo de Velocidade v	95

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método de Elementos Finitos
CFD	Computational fluid dynamics
G1	Geometria 1
G2	Geometria 2
G3	Geometria 3
G4	Geometria 4
G5	Geometria 5
G6	Geometria 6
G7	Geometria 7
G8	Geometria 8
G9	Geometria 9
G10	Geometria 10

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Hipóteses consideradas e Método adotado	1
1.2	Organização do trabalho	3
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Stent Farmacológico	4
2.2	Método de Elementos Finitos - Equação Convecção-Difusão	6
3	EQUAÇÕES DE GOVERNO	9
3.1	Princípio da Conservação de Massa	9
3.2	Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento	11
3.3	Princípio de Conservação de Espécie Química	15
3.4	Adimensionalização	17
3.5	Formulação Corrente-Vorticidade	20
3.6	Equações de Governo Adimensionalizadas	23
4	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	24
4.1	Discretização Temporal	24
4.2	Formulação Forte e Fraca	28
4.2.1	Formulação Forte	28
4.2.2	Formulação Fraca	29
4.3	Discretização Espacial	35
4.4	Forma Matricial	41
5	CÓDIGO NUMÉRICO	46
5.1	Importação de Malha	47
5.2	Criação das Matrizes Globais	49
5.3	Implementação das Condições de Contorno	51
5.4	Algoritmo de Solução	52
5.4.1	Cálculo de vorticidade inicial	53
5.4.2	Criação das matrizes de estabilidade	54
5.4.3	Cálculo de vorticidade	54
5.4.4	Cálculo função corrente	54

5.4.5	Cálculo velocidades	55
5.4.6	Cálculo concentração	55
5.4.7	Reprocessamento para o próximo passo de tempo	55
6	VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NUMÉRICO	57
6.1	Validação do código numérico	57
6.1.1	Escoamento de Poiseuille	57
6.1.1.1	Malha	58
6.1.1.2	Condições de Contorno	58
6.1.1.3	Resultados	58
6.1.2	Lid-Driven Cavity Flow	59
6.1.2.1	Malha	60
6.1.2.2	Condições de Contorno	60
6.1.2.3	Resultados	60
7	RESULTADOS	62
7.1	Definição de Malha	64
7.2	Geometria 1 - Canal	66
7.2.1	Condições de Contorno	67
7.2.2	Resultados Obtidos	67
7.3	Geometria 2 - Mola Helicoidal com diâmetro maior que parede interna da artéria	69
7.3.1	Condições de Contorno	69
7.3.2	Resultados Obtidos	70
7.4	Geometria 3 - Mola Helicoidal com passo igual a 2mm	72
7.4.1	Condições de Contorno	72
7.4.2	Resultados Obtidos	73
7.5	Geometria 4 - Quatro Anéis interligados	75
7.5.1	Condições de Contorno	75
7.5.2	Resultados Obtidos	76
7.6	Geometria 5 - Mola Helicoidal com passo igual a 1mm	78
7.6.1	Condições de Contorno	78
7.6.2	Resultados Obtidos	79
7.7	Geometria 6 - Stent Atual	80
7.7.1	Condições de Contorno	81
7.7.2	Resultados Obtidos	82

7.8 Geometria 7 - Mola helicoidal com geometria retangular	84
7.8.1 Condições de Contorno	84
7.8.2 Resultados Obtidos	85
7.9 Geometria 8 - Mola helicoidal com geometria losangular	87
7.9.1 Condições de Contorno	87
7.9.2 Resultados Obtidos	88
7.10 Geometria 9 - Parede com placa grossa	90
7.10.1 Condições de Contorno	90
7.10.2 Resultados Obtidos	91
7.11 Geometria 10 - Stent senoidal	93
7.11.1 Condições de Contorno	93
7.11.2 Resultados Obtidos	94
8 CONCLUSÃO	96
Referências	98

1 INTRODUÇÃO

De acordo com a OMS (Organização mundial da saúde), em 2016 foram documentados 56.9 milhões de mortes ao redor do mundo, dentre elas, aproximadamente 9.7 milhões tiveram como causa doenças cardiovasculares isquêmicas, ou seja, cerca de 17% do total das fatalidades. As doenças cardiovasculares isquêmicas, afetam as artérias coronárias, impactando na circulação sanguínea e assim originando a redução de nutrientes e oxigênio para os músculos do coração provocando a angina (dor no peito) ou em casos de maior gravidade, levando ao infarto.

As principais causas dessas doenças são fumo, diabetes, hipertensão arterial e colesterol elevado, fatores esses, que auxiliam na formação de placas de ateroma na artéria. Esta formação dificulta a passagem sanguínea e chegando a casos graves é necessário tratamento corretivo, são estes: *bypass coronário*, o qual consiste em um tipo de cirurgia cardíaca na qual um pedaço da veia safena da perna é colocado no coração para transportar sangue desde a aorta até ao músculo cardíaco, e a *angioplastia coronária transluminal percutânea* (PTCA), que se trata de um procedimento minimamente invasivo para abrir artérias coronárias bloqueadas, onde é colocado um tubo aramado, conhecido como *stent*, que permite que o sangue circule desobstruído para o músculo cardíaco.

Neste trabalho teremos como objetivo desenvolver um código em *Python* utilizando Elementos Finitos para a formulação corrente-vorticidade com o transporte de espécie química, assim nos permitindo conhecer uma melhor geometria stentiana que nos permitirá entender melhor a dinâmica do escoamento sanguíneo com um stent farmacológico implantado. Junto a isto, analisaremos o impacto da geometria em relação ao campo de velocidade e a difusão do medicamento no sangue, na conclusão iremos abordar um correlação no impacto do campo de velocidade com o campo de concentração da espécie química e traremos uma discussão em relação a melhor geometria para a utilização do stent.

1.1 Hipóteses consideradas e Método adotado

Este trabalho foi desenvolvido considerando que as equações de governo do problema foram utilizadas segundo a hipótese do meio contínuo, assim nos permitindo a utilização dos princípios de conservação de massa, de quantidade de movimento linear e de espécie química. O sangue foi considerado como um fluido incompressível, newtoniano

e monofásico, como também o coeficiente difusivo foi aproximado como constante.

A Função Corrente Vorticidade é uma formulação da equação de Navier-Stokes que permite o desacoplamento da **velocidade** e **pressão**. As foram discretizadas, através do MEF, sobre uma malha triangular que foi gerada juntamente com o desenvolvimento das geometrias testadas, no software *GMSH*. A discretização temporal foi realizada utilizando a expansão da série de Taylor, devido a possibilidade de oscilações espúrias que são características de equações convecção-difusão, foi mantido os termos de segunda ordem. A formulação de Galerkin foi utilizada para discretizarmos as equações no espaço e devido a possibilidade de grandes oscilações em altos Reynolds, também característico da equação, foi utilizada uma correção no Método de Galerkin, usando um termo convectivo. Desta forma, caracterizando o método com Galerkin Característico ou Taylor-Galerkin como proposto por (DONEA, 1984) e (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

A validação do código foi analisada comparando a solução numérica de um escoamentos com solução analítica já disseminada, o Escoamento de Poiseuille. Além disso, foi comparada da solução do escoamento em uma cavidade com tampa deslizante (lid-driven cavity flow) com àquelas apresentadas por (MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009).

O estudo foi executado em 10 (dez) geometrias distintas, que tiveram como objetivo simular possibilidades geométricas para o Stent, são elas:

- Geometria 1 - Stent em formato de canal
- Geometria 2 - Stent em formato de mola helicoidal tipo 1
- Geometria 3 - Stent em formato de mola helicoidal tipo 2
- Geometria 4 - Stent em formato anéis interligados
- Geometria 5 - Stent em formato de mola helicoidal tipo 3
- Geometria 6 - Stent utilizado atualmente
- Geometria 7 - Stent em formato de mola helicoidal tipo 4
- Geometria 8 - Stent em formato de mola helicoidal tipo 5
- Geometria 9 - Stent com deformação aleatória
- Geometria 10 - Stent senoidal

A apresentação dos resultados através de imagens foi feita pelo software livre *Paraview*, permitindo melhor representação gráfica da solução do estudo feito.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho foi organizado em oito capítulos, onde poderemos mostrar no Capítulo 2 um breve introdução ao stent farmacológico e ao Método de Elementos finitos. Será apresentadas então, no Capítulo 3, as equações que governam o problema e a maneira que elas formam manipuladas até seu formato final utilizado neste trabalho. Apresentaremos no Capítulo 4 a metodologia MEF utilizada em nossas próprias equações de governo, composta pela sua discretização espacial e temporal.

Após toda essa introdução teórica do nosso trabalho iremos abordar no quinto capítulo o código criado para solucionar este problema, visando orientar futuras análises deste problema. Iremos fazer sua validação no Capítulo 6 e apresentar as geometrias utilizadas no problema. Mostraremos os resultados encontrados no Capítulo 7. Por fim iremos apresentar uma conclusão sobre o estudo no ultimo capítulo. Com isso, o trabalho foi organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 1** - *Introdução*
- **Capítulo 2** - *Revisão Bibliográfica*
- **Capítulo 3** - *Equações de Governo*
- **Capítulo 4** - *Método dos Elementos Finitos*
- **Capítulo 5** - *Código Numérico*
- **Capítulo 6** - *Geometrias e Validação do Código Numérico*
- **Capítulo 7** - *Resultados*
- **Capítulo 8** - *Conclusão*

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, iremos fazer uma breve contextualização histórica do Stent e sobre o problema que iremos trabalhar, além disso também falaremos sobre o método, MEF, que foi utilizado para a resolução do problema.

2.1 Stent Farmacológico

O Stent farmacológico foi um avanço revolucionário que mudou a face da angioplastia. Mesmo sendo um conceito antigo iniciado em 1912 através das experiências de (CARREL, 1912) em cachorros, que visavam a "intubação permanente" de vasos traumatizados, através de próteses vítreas tubulares, os Stents só começaram a ser apresentados na década de 1970. (DOTTER, 1969) avançou a pesquisa para próteses metálicas endoluminais com objetivo de manter as artérias sempre abertas ao fluxo de sangue.

Os modelos de Stent expansíveis começaram a surgir em 1982, com (CRAGG et al., 1983), e pouco depois com (PALMAZ et al., 1985) esse modelo foi usado pela primeira vez em pacientes em 1984, por (SIGWART et al., 1987), utilizando uma estrutura autoexpansível em formato de tudo, feita de aço inoxidável. No mesmo ano Palmaz e Schatz, com outros, difundiu sua nova geometria de stent, agora não mais sendo um tubo maciço, o novo formato que monopolizou o mercado de 1994 a 1998, como, praticamente, sendo a única opção, era constituído por dois elos de 7 mm articulados com uma junção de 1 mm, permitindo assim maior mobilidade e facilidade em passagem curvas.

Mesmo após todas as evoluções ao longo dos anos, os Stent ainda se deparavam com um grande problema, suas primeiras séries continham cerca de 20% dos casos com trombooses causadas pós-stent (FISCHMAN et al., 1994), mesmo com a utilização de diversos remédios recomendados. Tal inconveniente foi contornado após ser descoberto uma combinação de aspirina e passagem da heparinização venosa para anticoagulação oral (cumarínico), o que conseguiu reduzir para 3% dos casos, entretanto aumentava o período de hospitalização para uma semana e as hemorragias para 10% (FISCHMAN et al., 1994).

O último grande avanço no equipamento, foi a criação de stents revestidos, que possibilitaram através de um polímero preso sobre a plataforma metálica dos stents, o revestimento de agentes antiproliferativos (sirolimus, paclitaxel ou outros). Em 2000, foi iniciado o primeiro experimento deste novo modelo em humanos que foi comandado por

J. Eduardo Sousa (SOUSA et al., 2001) e em 2002 foi comprovado a eficácia do novo equipamento através do estudo *Sirolimus-Eluting Stents versus Standard Stent in Patients with Stenosis in a Native Coronary Artery*, onde mostrava que casos com reestenose no stent convencional ficavam em torno de 16% enquanto no stent revestido eram de 5%.

O desenvolvimento desse novo stent trouxeram a necessidade de pesquisas relacionadas a distribuição das drogas na corrente sanguínea, assim, (HWANG; WU; EDELMAN, 2001) apresentou uma simulação que relacionava a distribuição das drogas com o *Número de Peclet* e trouxe a importância dos estudos em geometrias que potencializam a difusão dos remédios.

(BOZSAK; CHOMAZ; BARAKAT, 2014) mostrou que a escolha do tipo de droga utilizada é essencial para a criação do stent farmacológico, devido ao transporte na parede da artéria. Em seu estudo foi proposto um modelo computacional para o transporte dos remédios *sirolimus* e *paclitaxel*, em que foi considerado as paredes das artérias como multicamadas porosas. Foi assim, usando a *Lei de Darcy* para entender o escoamento dentro das camadas e assim provou que a dinâmica de transporte varia de acordo com a droga analisada.

(Mangiavacchi et al., 2017) apresentou uma simulação, considerando as paredes da artéria como um meio poroso e anisotrópico, para a droga *sirolimus*. Foi utilizado o *Método de Elementos Finitos* nas equações que governam o caso e foi considerada a dissolução polimérica do stent além do transporte na parede da artéria em domínio axissimétrico. Foi identificada uma grande influência originada pelo escoamento sanguíneo e das propriedades da parede da artéria, na distribuição espacial da droga. Mostrando assim que os resultados são influenciados na saúde do paciente. Conseguiremos proporcionar neste trabalho, a apresentação da influência da parede da artéria na difusão do medicamento no escoamento, reproduzindo parcialmente a influência já encontrada na literatura exposta.

Atualmente, o uso do Stent farmacológico é um equipamento difundido e podemos entender melhor com a utilização do mesmo nos tempos atuais na **Figura 1**.

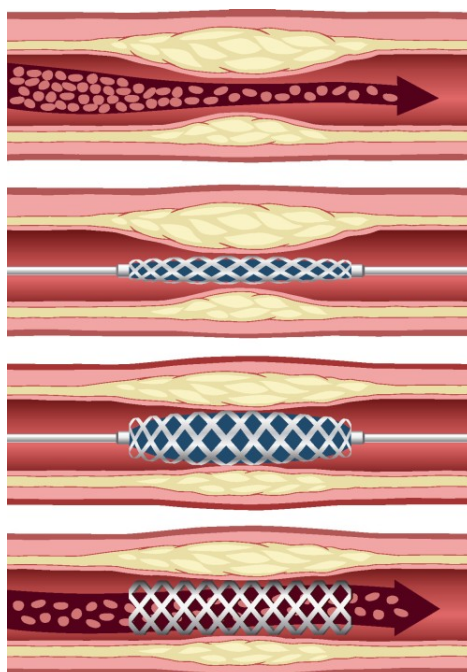


Figura 1 – Implementação do stent farmacológico

Fonte: (MELDAU, 2009)

2.2 Método de Elementos Finitos - Equação Convecção-Difusão

O Método de Elementos Finitos tem sua base matemática desenvolvida em 1909 pelo matemático e físico suíço, Walter Ritz (1878 - 1909) que transformava um problema contínuo em um problema discreto com finitos graus de liberdade, as variáveis eram aproximadas por funções conhecidas e constantes a serem determinadas. Em 1915, Galerkin através do Método dos Resíduos Ponderados define as constantes da formulação proposta por Ritz utilizando as funções bases equivalentes as funções pesos. Esta metodologia é uma das mais utilizadas na atualidade e ficou conhecida como *Formulação de Galerkin*.

(COURANT, 1943) aumenta as possibilidades do método proposto por Ritz introduzindo funções lineares definidas sobre elementos triangulares. (CLOUGH, 1960) introduziu, pela primeira vez, o termo elemento finito em seu artigo *The finite element method in plane stress analysis*. O Método de Elementos Finitos só passou a ser utilizado para simulações de problemas não estruturais em fluidos, termomecânica e eletromagnetismo no final dos anos 60. Para melhor entendimento sobre a história de desenvolvimento do Método de Elementos Finitos pode ser consultado o trabalho de (NARDINO; ARNDT, 2016), onde poderá ser analisado passos mais curtos de tempo que em nosso resumo, assim como mostrado na figura abaixo.

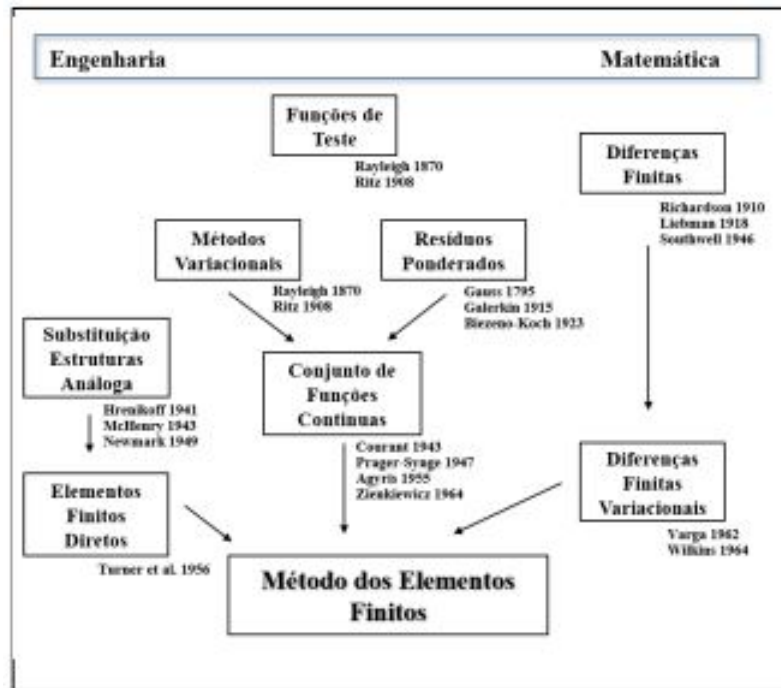


Figura 2 – História do MEF

Fonte: (NARDINO; ARNDT, 2016)

A utilização na solução de problema de fluidos foi uma das que mais se atrasou a se concretizar de maneira efetiva, esse fato se deve ao fato do surgimento de oscilações espúrias quando o termo convectivo era superior ao termo difusivo. Esta necessidade afomentou a criação de diversas metodologias para a resolução desse problema.

Em 1976, a *Formulação Petrov-Galerkin* foi desenvolvida por (CHRISTIE et al., 1976), esta formulação é marcada pela utilização de funções peso assimétricas ou quadráticas. Esta modificação foi capaz de solucionar o problema das oscilações espúrias para estudos unidimensionais e no ano seguinte, (HEINRICH et al., 1977) conseguiu abrangir a formulação para estudos bidimensionais.

Em 1982, foi criada a *Formulação Streamline Upwind Petrov-Galerkin* por (BROOKS; HUGHES, 1982), que utilizaria as funções peso de maneira que o operador de difusão não atuasse na direção perpendicular ao escoamento, assim atuando apenas na direção do escoamento. Esta modificação eliminou um problema que ocorria com a formulação de Petrov-Galerkin, que gerava excesso de difusão perpendicular ao escoamento.

Também em 1982, foi apresentada a metodologia que deu origem a esquema conhecido como *Galerkin Característico*. (PIRONNEAU, 1982) apresentou o Método das

Curvas Características com aplicação em MEF para resolução de problemas de convecção-difusão transientes e Navier-Stokes. Sua vantagem em relação as formulações anteriores é na resolução de sistemas lineares devido ao fato das matrizes serem simétricas neste caso, enquanto nos anteriores a alteração das funções pesos acarretavam em matrizes assimétricas.

Em 1984, a formulação conhecida como *Taylor-Galerkin* foi apresentada por (DONEA, 1984). Este método se resume em usar os termos de alta ordem da expansão de Taylor que atuará para a redução das oscilações espúrias. Diferentes das duas primeiras formulações mostradas, neste esquema não há necessidade de alterar as funções peso. Um fator interessante demonstrado por (LÖHNER; MORGAN; ZIENKIEWICZ, 1984) é que embora Taylor-Galerkin e Galerkin Característico apresentem diferentes formas de discretização, para um estudo com equações convecção-difusão o sistema de equações é idêntico.

A formulação Taylor-Galerkin apresenta grandes vantagens em relação as outras opções apresentadas acima. A não necessidade de alteração das funções peso é um fator que de extrema importância, pois assim conseguiremos trabalhar com matrizes globais simétricas. Este fator resulta em uma maior facilidade para implementação computacional do sistema. Devido a semelhança dos sistemas de equações entre Taylor-Galerkin e Galerkin Característico, nenhuma escolha afetaria a implementação computacional, sendo assim, tal escolha foi feita por cunho pessoal.

Para esse projeto foi escolhido fazer as discretizações pelo esquema *Taylor-Galerkin*.

3 EQUAÇÕES DE GOVERNO

Neste trabalho, como explicado previamente na introdução, o fluido em questão, o sangue, será considerado como um meio contínuo, ou seja, se considerarmos um elemento de fluido infinitesimal do fluido não haverá a presença de espaços vazios em seu meio. Podemos assim, modelar o escoamento segundo os princípios de conservação universal, sendo esses os três a seguir:

- Conservação da Massa
- Conservação da Quantidade de Movimento Linear
- Conservação de Espécie Química

Estes princípios irão governar o escoamento proposto. Este capítulo irá apresentar os princípios expostos da seguinte maneira:

Em nossa primeira seção, introduzirá o princípio da conservação da massa juntamente com a equação da continuidade para um fluido incompressível.

Na segunda seção, introduziremos segundo o princípio de conservação da quantidade de movimento linear para um elemento de fluido, a equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível.

Na terceira seção, será apresentada a equação de Transporte de Espécie Química.

Na quarta seção, iremos adimensionalizar as equações de governo.

Por final, na quinta seção iremos apresentar a equação de Navier-Stokes seguindo a formulação corrente-vorticidade.

3.1 Princípio da Conservação de Massa

Segundo (PONTES; MANGIAVACCHI, 2009), o princípio de conservação da massa estabelece que:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação de massa dentro do volume,} \\ \text{isto é, a quantidade de massa acumulada,} \\ \text{dentro do volume por unidade de tempo.} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{l} \text{O fluxo líquido de massa} \\ \text{que cruza a fronteira.} \end{array} \right]$$

Temos que, a taxa de acumulação de massa dentro do volume de controle é

matematicamente representada pela integral da variação da quantidade de massa sobre todo o volume.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm \quad (1)$$

Como estamos falando de valores infinitesimais, podemos expressar $dm = \rho dV$, assim obtemos que:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \rho \frac{\partial dV}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2)$$

A representação matemática do fluxo líquido sobre todo o volume é expressa da seguinte maneira:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3)$$

Assim, podemos facilmente definir pelo princípio da conservação de massa que:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (4)$$

Utilizando o *Teorema de Gauss* sobre a **Equação 3**, observamos que:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (5)$$

Assim, substituindo a **Equação 5** na **Equação 4** e reformulando-a, obtemos que:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad (6)$$

Sabemos que $dV \neq 0$, logo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (7)$$

A **Equação 7** é conhecida como *Equação da Continuidade*, onde ρ é a massa específica do fluido, \mathbf{v} é o campo velocidade, no nosso caso, bidimensional, ou seja, $\mathbf{v} = [u, v]$. ∇ representa o vetor gradiente, matematicamente representado por $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right]$. Desenvolvendo a equação anterior, encontramos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

Como expresso anteriormente, nesse trabalho foi adotado a aproximação do sangue para um fluido incompressível, logo ρ não depende do tempo e do espaço. Com isso temos que $\partial \rho / \partial t = 0$ e $\nabla \rho = 0$, logo:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

A **Equação 9** é conhecida como *Equação da continuidade para um fluido incompressível*.

3.2 Princípio da Conservação da Quantidade de Movimento

(PONTES; MANGIAVACCHI, 2009), faz a seguinte descrição para o esse princípio:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação da quantidade de} \\ \text{movimento dentro do volume de controle,} \\ \text{isto é, variação da quantidade de movimento} \\ \text{dentro do volume por unidade de tempo.} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{l} \text{O fluxo líquido} \\ \text{de quantidade de movimento} \\ \text{para fora do volume.} \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{l} \text{Resultante das forças aplicadas} \\ \text{à superfície de controle.} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Resultante das forças de volume.} \end{array} \right]$$

Vamos então, assim como na seção anterior, representar matematicamente a descrição do princípio, sendo elas:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação da} \\ \text{quantidade de movimento} \\ \text{dentro do volume de controle.} \end{array} \right] = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV \quad (10)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{O fluxo líquido de} \\ \text{quantidade de movimento} \\ \text{para fora do volume.} \end{array} \right] = \oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad (11)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Resultante das forças aplicadas} \\ \text{à superfície de controle.} \end{array} \right] = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA \quad (12)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor de tensões.

$$\left[\text{Resultante das forças de volume.} \right] = \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (13)$$

Onde \mathbf{g} é o vetor da aceleração da gravidade. Temos então, que respeitando o princípio de conservação da quantidade de movimento linear:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (14)$$

Ao aplicarmos o *Teorema de Gauss* nas integrais de área, reformulamos a **Equação 14**:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (15)$$

Ou seja,

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{g} \right) dV = 0 \quad (16)$$

Nos devemos ater ao fato que $dV \neq 0$, podemos então expressar a **Equação 16** da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) - \nabla \cdot \sigma - \rho \mathbf{g} = 0 \quad (17)$$

Sendo assim,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (18)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo, obtemos:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}) \longrightarrow \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \mathbf{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) \right] \quad (19)$$

Podemos perceber que o último termo acima trata-se da *Equação de Continuidade*, que sabemos que é igual a zero. Sendo assim, podemos reescrever a **Equação 19**:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{g} \quad (20)$$

Podemos decompor o tensor de tensões (σ) na soma de dois outros tensores, isto é:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau \quad (21)$$

Onde é de se observar que, p é o campo de pressão, \mathbf{I} é a matriz identidade e τ é o tensor desviatório, utilizando essa relação na **Equação 20** obtemos:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{g} \quad (22)$$

O tensor desviatório (τ) pode ser relacionado as propriedades do físicas do fluido, pois ele é dependente da taxa do tensor deformação. Sendo assim, como estamos considerando o meio como sendo homogêneo, isotrópico e que τ é uma função contínua do gradiente de velocidade, obtemos que:

$$\tau = \mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (23)$$

Onde é de se observar que μ é a viscosidade dinâmica do meio, λ é chamado de segundo coeficiente de viscosidade. Ao utilizarmos na **Equação 22**, obtemos:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (24)$$

Ou seja,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (25)$$

Iremos considerar que a μ não depende da posição, teremos:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^T] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (26)$$

Logo,

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mu [\nabla^2 \mathbf{v} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})^T] + \nabla \cdot [\lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (27)$$

Utilizando a **Equação 9** sobre a **Equação 27**, obteremos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (28)$$

Onde é de se observar que ν é o coeficiente de viscosidade cinemática do meio. A **Equação 28**, para o caso de fluido incompressível, homogêneo, isotrópico e com viscosidade constante em função do espaço, é a conhecida *Equação de Navier-Stokes*.

3.3 Princípio de Conservação de Espécie Química

Este princípio é definido da seguinte maneira:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação da} \\ \text{quantidade de espécie química} \\ \text{dentro do volume de controle.} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{l} \text{O fluxo líquido} \\ \text{da quantidade} \\ \text{de espécie} \\ \text{química que} \\ \text{cruza a fronteira} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{A resultante da} \\ \text{taxa de geração} \\ \text{de espécie química} \\ \text{no volume} \end{array} \right]$$

Vamos mais uma vez, assim como nas seções anteriores, representar matematicamente a descrição do princípio, sendo elas:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de acumulação da} \\ \text{quantidade de espécie química} \\ \text{dentro do volume de controle.} \end{array} \right] = \int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV \quad (29)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{O fluxo líquido} \\ \text{da quantidade} \\ \text{de espécie} \\ \text{química que} \\ \text{cruza a fronteira} \end{array} \right] = \oint_S c\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dA - \oint_S D\nabla c \cdot \mathbf{n}dA \quad (30)$$

Onde é importante observar que D é o coeficiente de difusão de espécie química.

$$\left[\begin{array}{l} \text{A resultante da} \\ \text{taxa de geração} \\ \text{de espécie química} \\ \text{no volume} \end{array} \right] = \int_V \dot{R}dV \quad (31)$$

Temos então, que respeitando o princípio de conservação de espécie química:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \oint_S c\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}dA + \oint_S D\nabla c \cdot \mathbf{n}dA + \int_V \dot{R}dV \quad (32)$$

Ao aplicarmos o *Teorema de Gauss* nas integrais de área reformulamos a **Equação 32**:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (c\mathbf{v})dV + \int_V \nabla \cdot (D\nabla c)dV + \int_V \dot{R}dV \quad (33)$$

Ou seja,

$$\int_V \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) - \nabla \cdot (D\nabla c) - \dot{R} \right] dV = 0 \quad (34)$$

Assim como nas resoluções anteriores, sabemos que $dV \neq 0$, assim, podemos reformular a **Equação 34**:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) - \nabla \cdot (D\nabla c) - \dot{R} = 0 \quad (35)$$

Ou seja,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{v}) = \nabla \cdot (D\nabla c) + \dot{R} \quad (36)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo, obtemos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c + c(\nabla \cdot \mathbf{v}) \longrightarrow \nabla \cdot (D\nabla c) + \dot{R} \quad (37)$$

Já identificamos, de acordo com a **Equação 9**, que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, assim:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D\nabla c) + \dot{R} \quad (38)$$

Em nosso estudo, iremos considerar que não há geração de espécie química e que D é constante. Sendo assim, obtemos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = D\nabla^2 c \quad (39)$$

Para nosso estudo, que considera um fluido incompressível, com coeficiente de difusão constante e sem geração de espécie química, temos que a **Equação 39** é a *Equação de Transporte de Espécie Química*.

3.4 Adimensionalização

A adimensionalização de equação é usada para nos dar melhor entendimento de quais são os fatores que têm maior influência sobre as equações. Nessa seção iremos adimensionalizar as duas principais equações do problema estudado, *Equação de Navier-Stokes* e *Equação de Transporte de Espécie Química*. As seguintes adimensionalidades foram utilizadas, onde o asterisco representa a variável adimensional:

$$\rho = \rho_0 \rho^* \quad \nu = \nu_0 \nu^* \quad p = \rho_0 U^2 p^* \quad D = D_0 D^* \quad c = (c_s - c_0) c^* + c_0$$

$$x = Lx^* \quad t = \frac{L}{U}t^* \quad \nabla = \frac{1}{L}\nabla^* \quad \mathbf{v} = U\mathbf{v}^* \quad \mathbf{g} = g_0\mathbf{g}^*$$

Primeiramente, vamos substituir os parâmetros acima na *Equação da Continuidade para um fluido incompressível*:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{U}{L}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (40)$$

Iremos fazer o mesmo procedimento para a *Equação de Navier-Stokes*:

$$\frac{U^2}{L} \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \frac{U^2}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu_0 U}{L^2} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + g_0 \mathbf{g}^* \quad (41)$$

Isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu_0}{UL} \nu^* \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \quad (42)$$

Observemos que o valor de ρ^* e ν^* são iguais a unidade, assim obteremos a forma final da *Equação adimensionalizada de Navier-Stokes*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + \frac{\nu_0}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{g_0 L}{U^2} \mathbf{g}^* \quad (43)$$

Iremos fazer, novamente, o mesmo procedimento para a *Equação de Transporte de Espécie Química*:

$$(c_s - c_0) \frac{U}{L} \frac{\partial c^*}{\partial t^*} + (c_s - c_0) \frac{U}{L} \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = (c_s - c_0) \frac{D_0}{L^2} D^* \nabla^{*2} c^* \quad (44)$$

Trabalhando a equação, podemos multiplicar ambos os lados $L/U(c_s - c_0)$, obtemos:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{D_0}{UL} D^* \nabla^{*2} c^* \quad (45)$$

Observemos que o valor de D^* é igual a unidade, assim obteremos a forma final da *Equação adimensionalizada de Transporte de Espécie Química*:

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* c^* = \frac{D_0}{UL} \nabla^{*2} c^* \quad (46)$$

Analisando as Equações adimensionalizadas foi possível encontrar grupos adimensionais importantes para nosso estudos, são eles:

1. **Número de Reynolds** (Re) relaciona as forças viscosas com as forças de inércia, nos mostrando se podemos considerar como a primeira desprezível em relação a segunda. (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2004) define que para um escoamento interno em tubos, se $Re < 2300$ definimos o escoamento como laminar, se obtemos $Re > 2300$ definimos como turbulento.

$$Re = \frac{UL}{\nu_0} \quad (47)$$

onde, U representa a velocidade de referência, L o comprimento característico e ν_0 a viscosidade cinemática do meio.

2. **Número de Froude** (Fr) pode ser interpretado como a razão entre forças de inércia e de gravidade, segundo (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2004). Número de Froude maiores que a unidade indicam escoamento supercrítico, valores menores que a unidade indicam escoamentos subcríticos e valor igual a unidade indica escoamento crítico.

$$Fr = \frac{G}{\sqrt{g_0 L}} \quad (48)$$

onde, g_0 representa a aceleração, de referência, da gravidade.

3. **Número de Schmidt** (Sc) pode ser entendido como a relação entre a espessura da camada limite hidrodinâmica e a difusão da espécie química.

$$Sc = \frac{\nu_0}{D_0} \quad (49)$$

onde, D_0 representa o coeficiente de difusão da espécie química.

4. **Número de Péclet de massa** (Pe_m) pode ser definido como sendo a relação entre a concentração da espécie química transferida por convecção e difusão. O número de Péclet pode ser representado como o produto de dois grupos adimensionais já apresentados, sendo eles o Número de Reynold e o Número de Schmidt.

$$Pe_m = \frac{D_0}{UL} \longrightarrow Pe_m = \frac{1}{ScRe} \quad (50)$$

Com isso, iremos substituir tais grupos adimensionais na equação encontrados e conseguimos:

$$\text{Equação da Continuidade} \longrightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (51)$$

$$\text{Equação de Navier-Stokes} \longrightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (52)$$

$$\text{Equação de Transporte de Espécie Química} \longrightarrow \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (53)$$

Relembrando que as **Equações 51, 52 e 53** são limitadas a um fluido newtoniano e incompressível.

3.5 Formulação Corrente-Vorticidade

A já representada *Equação de Navier-Stokes* apresenta um dificuldade para sua implementação computacional, essa dificuldade é encontrada devido a seu acoplamento entre o campo de pressão e o campo de velocidade do fluido. Para resolvermos este problema, já foi desenvolvida uma metodologia que consegue desacoplar esse dois fatores, sendo esta nada mais do que uma reformulação da equação de Navier-Stokes, conhecida como *formulação corrente-vorticidade*. Nesta seção iremos encontrar tal formulação, para isso devemos introduzir a seguinte identidade vetorial:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} \quad (54)$$

Implementando tal identidade na *Equação de Navier-Stokes*, encontramos:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \quad (55)$$

Aplicando o rotacional em toda a equação,

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \times \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \times \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g} \quad (56)$$

Reformulando,

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] + \nabla \times \nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}] = -\nabla \times \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] + \frac{1}{Fr^2} \nabla \times \mathbf{g} \quad (57)$$

Sabemos que o rotacional do gradiente de um escalar é zero, assim os termos que apresentam o operador gradiente se anulam. Semelhantemente, o fato de \mathbf{g} ser uma constante, nós sabemos que a derivada de um constante é igual a zero, sendo assim:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{v}] - \nabla \times [\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}] = \frac{1}{Re} \nabla^2 [\nabla \times \mathbf{v}] \quad (58)$$

O vetor $\nabla \times \mathbf{v}$ é reconhecido como *vorticidade* (ω), então,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \omega] = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (59)$$

Nos é importante entendermos a seguinte identidade vetorial,

$$\nabla \times [\mathbf{v} \times \omega] = -\mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (60)$$

Introduzindo essa identidade na **Equação 59**, obtemos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla v = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (61)$$

(PONTES; MANGIAVACCHI, 2009) demonstra que o produto $\omega \cdot \nabla v$ é igual a zero em casos que vorticidade é perpendicular ao vetor velocidade - considerando escoamentos bidimensionais - o que se assemelha ao nosso caso estudado, tendo isto,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (62)$$

A equação apresentada acima é reconhecida como a *Equação da vorticidade* restrita a escoamento bidimensionais, com fluidos newtonianos e incompressíveis. Devido ao escoamento ter as restrições expressas na sentença anterior e ser permanente, podemos calcular a velocidade a partir da vazão volumétrica, sendo assim substituiremos a velocidade por um escalar que é conhecido como *função de corrente* (ψ). A relação entre essas duas partes é apresentada expandido a *Equação da continuidade*.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (63)$$

Para a satisfação da **Equação 63**, temos que a seguinte relação entre a *Função de corrente* e as componentes da velocidade deve ser definida:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (64)$$

Expandindo a equação da vorticidade, considerando um escoamento bidimensional, encontramos:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (65)$$

Juntando as **Equações** 64 e 65, identificamos:

$$\omega = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (66)$$

Assim, conseguimos identificar a forma final da relação corrente-vorticidade.

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (67)$$

3.6 Equações de Governo Adimensionalizadas

Após todas essas análises conseguimos identificar todas as nossas equações de governo de forma adimensionalizada.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (68)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (69)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (70)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c \quad (71)$$

Onde, \mathbf{D} representa um operador de componentes $\left[\frac{\partial}{\partial y}; -\frac{\partial}{\partial x} \right]$.

4 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

No capítulo anterior apresentamos as equações que usamos para governo do nosso problema. Neste capítulo iremos apresentar a metodologia que foi usada para resolução do problema, podendo assim completar toda o procedimento utilizado para formulação do problema e resolução das equações. O Método de Elementos Finitos (MEF) é um procedimento numérico para soluções aproximadas de problemas sobre o contorno de equações diferenciais em uma formulação variacional. Por isso, este capítulo será dividido em 4 partes, sendo elas

- Discretização Temporal
- Formulação Forte e Fraca
- Discretização Espacial
- Forma Matricial

O MEF apresenta como característica a utilização da forma fraca das equações, além disso nesse problema utilizaremos a expansão da série de Taylor até segunda ordem na etapa de discretização temporal e utilizaremos o *método de Galerkin* para elemento de malha triangular linear na etapa de discretização espacial. Por final apresentando a formulação matricial segunda o esquema Taylor-Galerkin. Podemos consultar mais detalhadamente sobre o esquema consultando os trabalho de (DONEA, 1984), (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000) e (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2012).

4.1 Discretização Temporal

Nesta seção iremos apresentar o processo de discretização no tempo da equação de vorticidade, para a equação de transporte de espécie química foi feito um procedimento semelhante. Como descrito anteriormente, faremos a discretização através da expansão da série de Taylor para a variável em questão, usada assim para aproximação da derivada temporal. Será utilizada a expansão até segunda ordem com intenção de reduzir as oscilações espúrias comuns em nossa equação por ser do tipo convecção-difusão.

Iniciaremos esse procedimento expandindo os termos da equação da vorticidade

Equação 68:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (72)$$

logo,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (73)$$

Aplicando $\partial/\partial t$ em ambos os lados, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (74)$$

Considerando a expansão de Taylor:

$$\omega^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k \omega^n}{\partial t^k} \frac{\Delta t^k}{k!} \quad (75)$$

logo,

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \frac{\partial \omega^n}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + \frac{\partial^3 \omega^n}{\partial t^3} \frac{\Delta t^3}{3!} + \frac{\partial^4 \omega^n}{\partial t^4} \frac{\Delta t^4}{4!} + \dots \quad (76)$$

Como explicado anteriormente, iremos truncar a expansão de Taylor até a segunda ordem:

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \frac{\partial \omega^n}{\partial t} \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2!} + O(\Delta t^3) \quad (77)$$

ressaltando que $O(\Delta t^3)$ é o erro originado do truncamento, por isso que - como explicito anteriormente - esse método é uma aproximação do resultado real, pois existe um

erro existente. Temos que na equação acima ω^{n+1} é a vorticidade que iremos calcular e ω^n é a calculada no passo de tempo anterior.

Devemos então utilizar as **Equações 73 e 74** na **Equação 77** e omitir o erro do truncamento.

$$\begin{aligned} \omega^{n+1} = w^n + \Delta t & \left[-u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left[-u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (78)$$

Em nosso problema, temos que u e v são constantes e iremos inverter a ordem de derivação nos termos que contém derivadas da vorticidade em função do tempo e do espaço, encontraremos:

$$\begin{aligned} \omega^{n+1} = w^n + \Delta t & \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \omega^n}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (79)$$

Podemos substituir os termos $\partial \omega / \partial t$ pela equação da vorticidade, obtendo assim,

$$\begin{aligned} \omega^{n+1} = w^n + \Delta t & \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left(-u \frac{\partial}{\partial x} \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right. \\ & \quad \left. - v \frac{\partial}{\partial y} \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (80)$$

Podemos então truncar os termos que apresentam ordem maior do que dois, obtendo assim,

$$\begin{aligned} \omega^{n+1} = \omega^n + \Delta t \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \right] \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \left[-u \frac{\partial}{\partial x} \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] - v \frac{\partial}{\partial y} \left[-u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} - v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] \right] + O(\Delta t^3) \end{aligned} \quad (81)$$

Logo, omitindo o termo de erro e reformulando a equação, encontramos:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} \right] + u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial x^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial y^2} \\ + \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] + \frac{\Delta t}{2} v \frac{\partial}{\partial y} \left[u \frac{\partial \omega^n}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^n}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (82)$$

Os termos multiplicados pelo $\Delta t^2/2$ são conhecidos como difusão artificial que são os termos responsáveis pela redução das oscilações espúrias características desse tipo de equação.

As equações de governo na forma vetorial apresentam as seguintes formas quando discretizadas no tempo:

$$\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \omega] \quad (83)$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot c] \quad (84)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (85)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (86)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade bidimensional, \mathbf{D} é o operador matemático que definimos como $\mathbf{D} = [\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}]$ e aproximamos as seguintes relações:

$$\dot{\omega} = \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} \quad \dot{c} = \frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} \quad (87)$$

4.2 Formulação Forte e Fraca

Neste seção iremos primeiro apresentar a formulação forte das equações de governo e em seguida apresentaremos a formulação fracas das mesmas.

4.2.1 Formulação Forte

A formulação forte é representada pelas equações de governo na forma diferencial com as condições de contorno. Assim, para o nosso problema apresentamos as seguintes formulações:

$$\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \quad (88)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (89)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{D}\psi \quad (90)$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \quad (91)$$

As equações apresentadas acima são validadas no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ para as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_\Gamma \text{ em } \Gamma_1 \\
 \psi &= \psi_\Gamma \text{ em } \Gamma_2 \\
 \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\Gamma \text{ em } \Gamma_3 \\
 c &= c_\Gamma \text{ em } \Gamma_4
 \end{aligned} \tag{92}$$

4.2.2 Formulação Fraca

(ANJOS, 2007) define que a formulação fraca é o resultado da ponderação da equação de governo e integrada sobre um domínio qualquer. Para nosso trabalho, apresentaremos a formulação fraca para um escoamento de um fluido monofásico, newtoniano e incompressível utilizando a formulação corrente-vorticidade com equação de transporte de espécie química, para obter mais detalhes podemos consultar o trabalho de (BRENNER; SCOTT, 1994). Tendo em vista que a metodologia usada é uma aproximação da solução numérica, iremos considerar que será produzido um Resíduo (R) nas equações que governam o problema.

$$\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] = R_1 \tag{93}$$

$$\nabla^2 \psi + \omega = R_2 \tag{94}$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{D}\psi = R_3 \tag{95}$$

$$\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] = R_4 \tag{96}$$

Assim como (FINLAYSON, 1972), iremos forçar o resíduo a ser nulo em uma consideração de média. Ou seja:

$$\int_{\Omega} R_1 \cdot \delta d\Omega = 0 \quad (97)$$

$$\int_{\Omega} R_2 \cdot \phi d\Omega = 0 \quad (98)$$

$$\int_{\Omega} R_3 \cdot \xi d\Omega = 0 \quad (99)$$

$$\int_{\Omega} R_4 \cdot \eta d\Omega = 0 \quad (100)$$

devemos observar que δ , ϕ , ξ e η são conhecidas como função peso, que é uma função arbitrária dentro de um espaço de funções que ainda iremos discutir sobre. Juntando as equações apresentadas nessa seção:

$$\int_{\Omega} \left[\dot{\omega} + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \right] \cdot \delta d\Omega = 0 \quad (101)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla^2 \psi + \omega] \cdot \phi d\Omega = 0 \quad (102)$$

$$\int_{\Omega} [\mathbf{v} - \mathbf{D}\psi] \cdot \xi d\Omega = 0 \quad (103)$$

$$\int_{\Omega} \left[\dot{c} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \frac{1}{ReSc} \nabla^2 c - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \right] \cdot \eta d\Omega = 0 \quad (104)$$

Necessitamos então desenvolver as integrais:

$$\int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \omega \delta d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \omega \delta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta d\Omega = 0 \quad (105)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega + \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega = 0 \quad (106)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega = 0 \quad (107)$$

$$\int_{\Omega} \dot{c} \eta d\omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \delta d\Omega = 0 \quad (108)$$

Com a intenção de diminuir a ordem da derivada do termo difusivo e separar o termo no contorno, iremos aplicar o *Teorema de Green* sobre o mesmo. Assim, teremos que o termo difusivo será:

$$-\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \omega \delta d\Omega = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Gamma} \delta \nabla \omega \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (109)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (110)$$

$$-\frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega = \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Gamma} \eta \nabla c \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (111)$$

Devemos ressaltar que \mathbf{n} é o vetor normal orientado para a direção externa do contorno Γ . Os termos de contorno Γ são reconhecidos como condição natural, em nosso

problema só possuímos condições essenciais - também chamadas de condições de Dirichlet - desta forma iremos utilizar a hipótese que $\delta = \phi = \eta = 0$ nas equações acima para todo o contorno Γ . Sendo assim, a integral em Γ é igual a zero e teremos os termos difusivos serão:

$$-\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla^2 \omega \delta d\Omega = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega \quad (112)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \psi \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega \quad (113)$$

$$-\frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla^2 c \eta d\Omega = \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (114)$$

Faremos um procedimento semelhante para o termos de difusividade numérica na **Equações 106 e 108**. Logo:

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (115)$$

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \delta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \eta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (116)$$

Pelo mesmo motivo apresentado para os termos difusivos, iremos anular as integrais no contorno de Γ . Portanto:

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \delta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega \quad (117)$$

$$-\frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \delta d\Omega = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega \quad (118)$$

Agora que conseguimos definir os novos termos difusivos, podemos substituir nas equações de governo:

$$\int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \omega \delta d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega = 0 \quad (119)$$

$$- \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega + \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega = 0 \quad (120)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega = 0 \quad (121)$$

$$\int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega = 0 \quad (122)$$

Definindo a mesma representação feita por (MARQUES, 2018):

$$\begin{aligned} m_1(\dot{\omega}, \delta) &= \int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\Omega & g_1(\mathbf{v}, \delta) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \omega \delta d\Omega \\ m_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega & g_3(\psi, \xi) &= \int_{\Omega} \mathbf{D} \psi \xi d\Omega \\ m_3(\mathbf{v}, \xi) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \xi d\Omega & g_4(\mathbf{v}, \eta) &= \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla c \eta d\Omega \\ m_4(\dot{c}, \eta) &= \int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega & k_1(\omega, \delta) &= \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla \delta d\Omega \\ k_{n1}(\omega, \delta) &= \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla \omega] \mathbf{v} \cdot \nabla \delta d\Omega & k_2(\psi, \phi) &= \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla \phi d\Omega \\ k_{n4}(c, \eta) &= \int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \nabla c] \mathbf{v} \cdot \nabla \eta d\Omega & k_4(c, \eta) &= \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \eta d\Omega \end{aligned} \quad (123)$$

Através da representação acima, podemos reformular nossas equações em forma fraca para:

$$m_1(\dot{\omega}, \delta) + g_1(\mathbf{v}, \delta) + \frac{1}{Re} k_1(\omega, \delta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n1}(\omega, \delta) = 0 \quad (124)$$

$$-k_2(\psi, \phi) + m_2(\psi, \phi) = 0 \quad (125)$$

$$m_3(\mathbf{v}, \xi) - g_3(\psi, \xi) = 0 \quad (126)$$

$$m_4(\dot{c}, \eta) + g_4(\mathbf{v}, \eta) + \frac{1}{ReSc} k_4(c, \eta) + \frac{\Delta t}{2} k_{n4}(c, \eta) = 0 \quad (127)$$

Seguindo os conjuntos de funções bases:

$$\mathbb{W} = \left[\omega \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \omega^2 d\Omega < \infty; \omega = \omega_{\Gamma} \right] \quad (128)$$

$$\mathbb{P} = \left[\psi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \psi^2 d\Omega < \infty; \psi = \psi_{\Gamma} \right] \quad (129)$$

$$\mathbb{V} = \left[v \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty; v = v_{\Gamma} \right] \quad (130)$$

$$\mathbb{C} = \left[c \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} c^2 d\Omega < \infty; c = c_{\Gamma} \right] \quad (131)$$

$$(132)$$

e aos espaços de funções pesos:

$$\mathbb{D} = \left[\delta \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \delta^2 d\Omega < \infty; \delta_{\Gamma} = 0 \right] \quad (133)$$

$$\mathbb{F} = \left[\phi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \phi^2 d\Omega < \infty; \phi_{\Gamma} = 0 \right] \quad (134)$$

$$\mathbb{X} = \left[\xi \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \xi^2 d\Omega < \infty; \xi_{\Gamma} = 0 \right] \quad (135)$$

$$\mathbb{N} = \left[\eta \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 : \int_{\Omega} \eta^2 d\Omega < \infty; \eta_{\Gamma} = 0 \right] \quad (136)$$

$$(137)$$

Como definido por (MARQUES, 2018), a formulação fraca se consiste em encontrarmos $\omega \in \mathbb{W}$, $\psi \in \mathbb{P}$, $v \in \mathbb{V}$, $c \in \mathbb{C}$ de modo que as **Equações** 124, 125, 126 e 127 sejam satisfeitas para todo $\delta \in \mathbb{D}$, $\phi \in \mathbb{F}$, $\xi \in \mathbb{X}$ e $\eta \in \mathbb{N}$.

4.3 Discretização Espacial

A discretização espacial que faremos utilizará a formulação de *Galerkin* que apresenta como característica a utilização das funções de forma como funções de peso e como função interpoladora das variáveis em questão. Devemos então apresentar a forma expandida das **Equações** 119,120, 121 e 122.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{\omega} \delta d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial \omega}{\partial x} \delta d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial \omega}{\partial y} \delta d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right] d\Omega \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial \delta}{\partial x} \left[u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial \delta}{\partial y} \left[u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (138)$$

$$- \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \omega \phi d\Omega = 0 \quad (139)$$

$$\int_{\Omega} u \xi d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \xi d\Omega = 0 \quad (140)$$

$$\int_{\Omega} v \xi d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \xi d\Omega = 0 \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \dot{c} \eta d\Omega + \int_{\Omega} u \frac{\partial c}{\partial x} \eta d\Omega + \int_{\Omega} v \frac{\partial c}{\partial y} \eta d\Omega + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] d\Omega \\ + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial \eta}{\partial x} \left[u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right] d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (142)$$

Devemos então discretizar o domínio em número de elementos (ne) e em número de nós (np) da malha computacional que será usada. Assim, obtemos:

$$\omega(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} \omega_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (143)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} \psi_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (144)$$

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} u_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (145)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} v_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (146)$$

$$c(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{np} c_i(t) N_i(\mathbf{x}) \quad (147)$$

Importante ressaltarmos que ω_i , ψ_i , u_i , v_i e c_i são vetores com np elementos e são os valores a serem encontrados que como podemos observar dependem apenas do tempo. N_i são as funções de interpolação e também são representadas por um vetor de np elementos, essas funções apresentam a restrição de que devem respeitar as condições de contorno, entretanto são escolhidas arbitrariamente. O método de Galerkin nos permite usar o mesmo tipo de elemento para todas as equações de governo, desta maneira encontraremos as mesmas funções bases para todas as equações.

Na formulação que estamos utilizando, as funções base são iguais as funções pesos, logo:

$$\delta(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \delta_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (148)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \phi_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (149)$$

$$\xi(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \xi_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (150)$$

$$\eta(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{j=1}^{np} \eta_j(t) N_j(\mathbf{x}) \quad (151)$$

Encontramos assim as equações de governo na forma variacional discretizada espacialmente:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i N_i \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega + u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \delta_j N_j d\Omega \\
& + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial x} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \delta_j N_j}{\partial y} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \omega_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{152}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \phi_j N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \omega_i N_i \sum_{j=1}^{np} \phi_j N_j d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{153}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} u_i N_i \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega = 0 \tag{154}$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} v_i N_i \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial \psi_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \xi_j N_j d\Omega = 0 \tag{155}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i N_i \sum_{j=1}^{np} \dot{\eta}_j N_j d\Omega + u \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \eta_j N_j d\Omega \\
& + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial x} + \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial x} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \sum_{j=1}^{np} \frac{\partial \eta_j N_j}{\partial y} \left[u \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial x} + v \sum_{i=1}^{np} \frac{\partial c_i N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{156}$$

Nas **Equações** 152 e 156 teremos que em nossa resolução os termos u e v (velocidades) não são incógnitas, pois iremos usar os valores do passo de tempo anterior na equação da vorticidade e iremos calcular previamente as componentes para a equação do transporte de espécie química. Tendo isso, nós podemos retirar as componentes comentadas das integrais nos termos convectivos, iremos fazer isso pois assim as equações poderão ser consideradas lineares.

Colocando a somatória para fora da integral, temos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{np} \delta_j \left[\sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} \omega_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \right. \right.
\end{aligned} \tag{157}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \phi_j \left[\sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega = 0 \right] \right] \tag{158}$$

$$\sum_{j=1}^{np} \xi_j \left[\sum_{i=1}^{np} u_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] \right] = 0 \quad (159)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \xi_j \left[\sum_{i=1}^{np} v_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] \right] = 0 \quad (160)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \eta_j \left[\sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} c_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \right. \right. \end{aligned} \quad (161)$$

Sabemos que $\sum_{j=1}^{np} \eta_j \neq 0$, $\sum_{j=1}^{np} \xi_j \neq 0$, $\sum_{j=1}^{np} \phi_j \neq 0$ e $\sum_{j=1}^{np} \delta_j \neq 0$, logo,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{\omega}_j \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \omega_j \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ \left. + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left(u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left(u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \right. \end{aligned} \quad (162)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega = 0 \right] \quad (163)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} u_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (164)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} v_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (165)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} c_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ & + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \frac{\partial N_j}{\partial x} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \frac{\partial N_j}{\partial y} \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \right. \end{aligned} \quad (166)$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \omega_j \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \omega_j \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ & + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \left(u \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \left(u \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \right. \end{aligned} \quad (167)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \psi_i \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega + \omega_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega = 0 \right] \quad (168)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} u_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (169)$$

$$\sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} v_i \left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega - \psi_i \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega \right] = 0 \quad (170)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{np} \sum_{i=1}^{np} \dot{c}_i \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega + \sum_{i=1}^{np} c_i \left[u \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j d\Omega + v \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j d\Omega \right. \\ & + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} u \left[u \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega} v \left[u \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right] = 0 \end{aligned} \quad (171)$$

4.4 Forma Matricial

Para encontrarmos a forma matricial desse problema, não podemos deixar de falar sobre a malha escolhida, pois está diretamente ligada a resolução do nosso problema. A malha utilizada impacta diretamente na precisão de nossa resolução, pois ela será a divisão espacial do nosso objeto de estudo, então quanto mais fina - ou seja, quanto mais nós e elementos - a malha, geralmente, geralmente mais precisa é a solução. Entretanto não é só a qualidade da malha que influencia em nosso resultado, mas também a geometria e a ordem do polinômio interpolador.

(ANJOS, 2007) apresenta uma classificação dos elementos de malha de acordo com sua geometria e ordem do polinômio interpolador:

- Geometria
 - Reta (Problemas unidimensionais)
 - Triangulares e Retangulares (Problemas bidimensionais)
 - Tetraédricas, Hexaédricas e Prismáticas
- Ordem do polinômio interpolador
 - Linear (Grau um)

- Quadrática (Grau dois)
- Cúbica (Grau três)

A escolha da ordem do polinômio interpolador deve ser feita de acordo com as restrições das equações a serem resolvidas, por exemplo, a equação de *Navier-Stokes* apresenta uma restrição conhecida como (Brezzi, 1974) e (BABUŠKA, 1971) devido ao seu forte acoplamento entre a velocidade e a pressão. Esta restrição implica na necessidade de ter número de nó variáveis de acordo com a variável a ser resolvida, sendo assim necessitamos utiliza um ordem de grau 2 ou 3.

Como já mostrado anteriormente iremos trabalhar com a equação de *Navier-Stokes* com a formulação de corrente-vorticidade, sendo assim não há acoplamento entre a velocidade e pressão. Este fato nos possibilita trabalhar com ordem de grau um. Para a escolha da geometria optamos pela triangular, por ser comumente usada no MEF e possibilitar, devido a sua simplicidade geométrica, um melhor discretização em superfícies irregulares do que as malhas retangulares.

Abaixo apresentamos um elemento de malha triangular linear, caracterizado por ter suas funções de interpolação planas. Devido a sua simplicidade e comum uso, facilmente encontramos as matrizes elementares analíticas deste tipo de elemento.

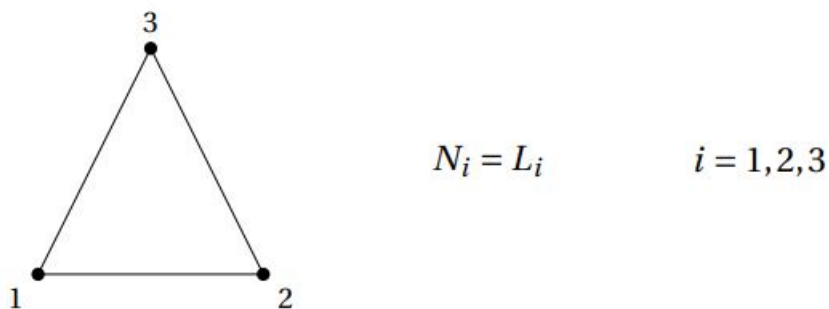


Figura 3 – Elemento de Malha Triangular

Fonte: (MARQUES, 2018)

Já definido a malha que será utilizada, podemos então representar as **Equações**

167 a 171 em suas formas matriciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\omega} + u \cdot \mathbf{G}_x \omega + v \cdot \mathbf{G}_y \omega + \frac{1}{Re} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \omega \\ + \frac{\Delta t}{2} u [u\mathbf{K}_{xx} + v\mathbf{K}_{yx}] \omega + \frac{\Delta t}{2} v [u\mathbf{K}_{xy} + v\mathbf{K}_{yy}] \omega = 0 \end{aligned} \quad (172)$$

$$- [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \psi + \mathbf{M}\omega = 0 \quad (173)$$

$$\mathbf{M}u - \mathbf{G}_y \psi = 0 \quad (174)$$

$$\mathbf{M}v - \mathbf{G}_x \psi = 0 \quad (175)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{c} + u \cdot \mathbf{G}_x c + v \cdot \mathbf{G}_y c + \frac{1}{Re} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] c \\ + \frac{\Delta t}{2} u [u\mathbf{K}_{xx} + v\mathbf{K}_{yx}] c + \frac{\Delta t}{2} v [u\mathbf{K}_{xy} + v\mathbf{K}_{yy}] c = 0 \end{aligned} \quad (176)$$

Importante ressaltar que as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{G}_x , \mathbf{G}_y , \mathbf{K}_{xx} , \mathbf{K}_{yy} , \mathbf{K}_{xy} e \mathbf{K}_{yx} são matrizes quadradas com dimensão np e são definidas como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}m^e \quad (177)$$

$$\mathbf{G}_x = \mathbf{A}g_x^e \quad (178)$$

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{A}g_y^e \quad (179)$$

$$\mathbf{K}_{xx} = \mathbf{A}k_{xx}^e \quad (180)$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \mathbf{A}k_{yy}^e \quad (181)$$

$$\mathbf{K}_{xy} = \mathbf{A}k_{xy}^e \quad (182)$$

$$\mathbf{K}_{yx} = \mathbf{A}k_{yx}^e \quad (183)$$

Ressaltando que \mathbf{A} é um operador que irá montar as matrizes elementares nas matrizes globais. Os fatores com sobrescrito e são as chamadas matrizes elementares que também são matrizes quadradas com dimensão igual a três para a nossa malha e são definidos por:

$$m^e = \int_{\Omega} N_i^e N_j^e d\Omega \quad (184)$$

$$g_x^e = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} N_j^e d\Omega \quad (185)$$

$$g_y^e = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e d\Omega \quad (186)$$

$$k_{xx}^e = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega \quad (187)$$

$$k_{yy}^e = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega \quad (188)$$

$$k_{xy}^e = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} d\Omega \quad (189)$$

$$k_{yx}^e = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} d\Omega \quad (190)$$

Assim, podemos representar a forma final das equações de governo que serão resolvidas em nosso código na forma adimensional discretizadas segundo o MEF com termo de convecção semi-explícito:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega^{n+1} + \frac{1}{Re} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \omega^{n+1} &= \frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \omega^n - u \cdot \mathbf{G}_x \omega^n - v \cdot \mathbf{G}_y \omega^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} u [u \mathbf{K}_{xx} + v \mathbf{K}_{yx}] \omega^n - \frac{\Delta t}{2} v [u \mathbf{K}_{xy} + v \mathbf{K}_{yy}] \omega^n \end{aligned} \quad (191)$$

$$[\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] \psi = \mathbf{M} \omega \quad (192)$$

$$\mathbf{M}u = \mathbf{G}_y\psi \quad (193)$$

$$\mathbf{M}v = \mathbf{G}_x\psi \quad (194)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}}{\Delta t}c^{n+1} + \frac{1}{ReSc} [\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}] c^{n+1} &= \frac{\mathbf{M}}{\Delta t}c^n - u \cdot \mathbf{G}_x c^n - v \cdot \mathbf{G}_y c^n \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} u [u\mathbf{K}_{xx} + v\mathbf{K}_{yx}] c^n - \frac{\Delta t}{2} v [u\mathbf{K}_{xy} + v\mathbf{K}_{yy}] c^n \end{aligned} \quad (195)$$

5 CÓDIGO NUMÉRICO

Neste capítulo apresentaremos o fluxograma de criação do código e sobre a lógica de resolução do problema com a visão iterativa do código. O código foi desenvolvido em linguagem Python 3.7, devido a seu uso já ser - em grande parte - difundido no meio acadêmico.

O desenvolvimento do código foi configurado em 5 etapas, sendo elas:

1. Importação de Malha
 - Levantamento do Número de Nós
 - Levantamento do Número de Elementos
 - Levantamento da Matriz IEN
 - Levantamento dos vetores de coordenadas
2. Criação das Matrizes Globais
3. Implementação da Condições de Contorno
 - Condições de contorno da corrente
 - Condições de contorno de velocidades
 - Condições de contorno da espécie química
4. Algoritmo de Resolução
 - Início da vorticidade
 - Cálculo de vorticidade
 - Cálculo da função corrente
 - Cálculo de velocidades
 - Cálculo do transporte de espécie química
5. Exportação dados em .vtk

A primeira etapa é importar transcreveremos o código para importação da malha, e expressarei seu software de origem. Na segunda explicaremos como foi feito para a criação das matrizes globais, em sua terceira etapa mostraremos como foi implementado as condições de contorno no código. A quarta etapa é a responsável pela resolução do problema, iremos apresentar como foi feito a lógica de resolução do trabalho, por fim, em sua etapa final exportamos os resultados para um arquivo .vtk usado para pós processamento do resultado, que nos possibilita uma melhor visão gráfica da solução.

Podemos entender melhor o funcionamento do código através do fluxograma apresentado abaixo.

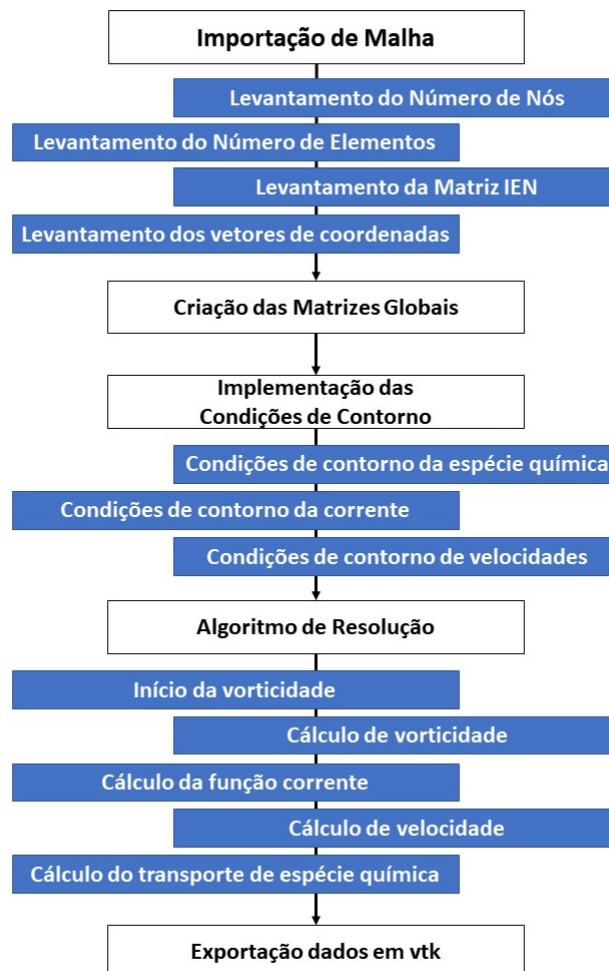


Figura 4 – Fluxograma de funcionamento do código

5.1 Importação de Malha

A malha de um problema é a junção de subdivisões espaciais de um certo domínio, em nosso caso o domínio é a artéria. Essa subdivisão é feita através de pequenos elementos - em nosso caso, triangular - e cada elemento apresenta um número de nó, que em nosso trabalho por usarmos uma malha de primeira ordem e triangular, cada elemento apresenta

três nós. O MEF, como já definido, é baseado em funções interpoladoras que interligarão esses nós, conseqüentemente os elementos.

Na figura abaixo conseguimos melhor identificar os nós e os elementos.

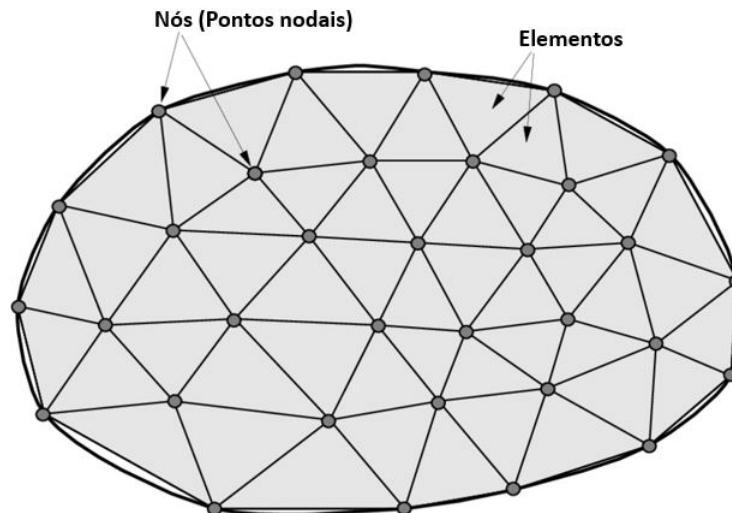


Figura 5 – Malha de um domínio qualquer

Todas as malhas em nosso problema foram geradas no software *GMSH 3.06* e importada através da biblioteca *meshio*. Para a importação é necessário criar previamente a malha no software *GMSH* e salvá-la em um arquivo *.msh*, assim conseguimos importa-la para a simulação e transformar os dados contidos no arquivo em listas no *Python*.

```
import meshio #importacao da biblioteca meshio para o codigo
```

```
msh = meshio.read('arquivo.msh') #leitura do arquivo .msh
```

```
X = msh.points[:,0] #lista com coordenada X
```

```
Y = msh.points[:,1] #lista com coordenada Y
```

```
IEN = msh.cells['triangle'] #matriz IEN
```

```
cc = msh.cells['line'] #matriz com pontos de contorno
```

```
cc.reshape((cc.size)) #reshape para vetor linha
```

```
cc.sort()
```

```
cc = np.unique(cc) #lista com pontos de contorno
```

Através da importação nós conseguimos levantar o número de nós do domínio, o número de nós no contorno do domínio - que são de extrema importância para a implementação das condições de contorno - o número de elementos, os vetores de coordenadas X e Y e a matriz IEN, também chamada de matriz conectividade.

No capítulo onde está apresentado os resultados iremos apresentar um estudo para definição da melhor malha a ser utilizado de acordo com seu refinamento, resultado e tempo de processamento.

5.2 Criação das Matrizes Globais

As equações 191 a 195 apresentam as forma matricial das equações de governo, nesta seção mostraremos como foi feita essas matrizes. Entretanto iremos utilizar as seguintes reformulações.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy}$$

Desta maneira, foi desenvolvido o seguinte código:

```

for e in range(0,ne): #loop sobre cada elemento
  for i in range(0,3):
    ii = IEN[e,i]
    for j in range(0,3):
      jj = IEN[e,j]

      # montagem (assembling) das matrizes K e M
      K[ii,jj] = K[ii,jj] + kele[i,j]
      M[ii,jj] = M[ii,jj] + m[i,j]
      Gx[ii,jj] = Gx[ii,jj] + gxele[i,j]
      Gy[ii,jj] = Gy[ii,jj] + gyele[i,j]
      Kx[ii,jj] = Kx[ii,jj] + kxele[i,j]
      Ky[ii,jj] = Ky[ii,jj] + kyele[i,j]
      Kxy[ii,jj] = Kxy[ii,jj] + kxyele[i,j]

```

As matrizes apresentadas acima não dependem de nenhum valor a ser calculado em nosso código, entretanto as matrizes de estabilidade que são definidas pela parte acrescentadas pelo Método de Taylor-Galerkin a nossa equação, e faremos as seguintes reformulações:

$$\mathbf{K}_{estx} = -\frac{\Delta t}{2}u [u\mathbf{K}_{xx} + v\mathbf{K}_{yx}]$$

$$\mathbf{K}_{esty} = -\frac{\Delta t}{2}v [u\mathbf{K}_{xy} + v\mathbf{K}_{yy}]$$

$$\mathbf{K}_{est} = \mathbf{K}_{estx} + \mathbf{K}_{esty}$$

Devido a presença dos valores das velocidades u e v , temos que é uma matriz dinâmica, ou seja, varia de acordo com os valores de velocidades encontrados. Tendo em vista essa necessidade, seu calculo é feito dentro do algoritmo de solução, entretanto iremos adiantar esta criação devido a se tratar da seção responsável por criação de matrizes.

```

for t in range(passos): #loop para cada passo de tempo
    for e in range(0,ne): #loop para cada elemento
        for i in range(0,3):
            ii = IEN[e,i]
            for j in range(0,3):
                jj = IEN[e,j]

                # montagem (assembling) das matrizes Kest
                Kestx[ii,jj] = Kestx[ii,jj] + kest1[i,j]
                Kesty[ii,jj] = Kesty[ii,jj] + kest2[i,j]

```

Para o cálculo elemental de cada matriz, considerando uma malha de elementos triangulares lineares, foi utilizado como referência os elementos de matriz definidos por (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2012).

5.3 Implementação das Condições de Contorno

Devemos então, após a definição das Matrizes Globais, implementar as condições de contorno. As condições de contorno do nosso problema são implementadas nas regiões, como o próprio nome já explicita, de contorno da geometria e como já mostrado anteriormente, durante a importação da malha foi identificado os nós relacionados a região de contorno. As condições de contorno são variáveis de acordo com a geometria e serão tratadas separadamente no capítulo de resultados.

As condições que possuem valores estabelecidos pelo problema são conhecidas como *Condição de Dirichlet*, logo os nós referentes a estes locais especificamente não podem ter seus valores modificados ao longo da simulação. Para mantermos esses valores (LEWIS; NITHIARASU; SEETHARAMU, 2012) demonstra que é necessário que para a solução e um sistema linear $Ab = c$ onde A representa uma matriz quadrada, b o vetor que queremos encontrar e c um vetor já calculado pelo código, devemos calcular o produto entre a coluna referente ao nó de contorno e o valor de condição de contorno do nó. Após o cálculo deveremos subtrair estes vetores ao lado direito da equação. Após esse passo, devemos zerar as linhas e colunas referente aos nós onde se encontram condições de contorno, igualar a diagonal de referência da linha com a unidade, desta maneira os valores impostos nos pontos nodais de contorno irão ser multiplicados por um e se manterão os mesmos.

Deve ser feito esse procedimento para os cálculos de ω , u , v , ψ e c , pois todos esses valores apresentam condições de contorno, devido ao fato do processo ser semelhante para todas as variáveis iremos apresentar a implementação apenas para um caso. Podemos então exemplificar como foi feito para o caso de cálculo da equação 192, onde $\mathbf{K} = \mathbf{A}_2$ e $\mathbf{M}\omega = b_2$:

```
for i in cc: #percorre todos os pontos nodais de contorno
    bc_psi += A_2*psicc[i]
    A_2[:,i] = 0.0 # zerando toda a coluna
    A_2[i,:] = 0.0 #zerando toda a linha
    A_2[i,i] = 1.0 #impondo 1 na diagonal
    b_2[i] = psicc[i] #impondo condicoes de contorno
    bc_psi[i] = psicc[i]

b_2 = b_2 - bc_psi #implementacao ao lado direito da equacao
psi = np.linalg.solve(A_2,b_2) #calculando valor de psi
```

Importante ressaltar que *cc* é uma lista que contém todos os pontos nodais do contorno e *psicc* é uma lista onde está implementado os valores de condição de contorno no ponto nodal específico.

Neste trabalho existem apenas *Condições de Dirichlet*, entretanto para entendimento da implementação da *Condições de Neumann* pode-se consultar o trabalho de (MARQUES, 2018).

5.4 Algoritmo de Solução

Nesta seção mostraremos como foi implementado o algoritmo que é responsável pelos cálculos da variáveis. Abaixo podemos ver um fluxograma melhor detalhado sobre esta etapa do projeto.

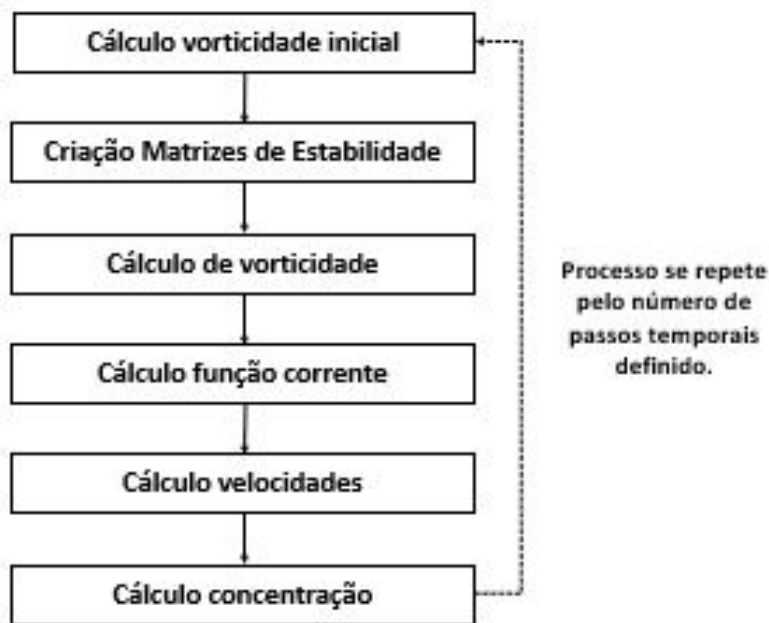


Figura 6 – Fluxograma do algoritmo de solução

O número de passos definido foi escolhido até a entendermos que a difusão da espécie química tenha sido completa, ou seja, mantendo a concentração constante na região estudada por um período de 1 segundo, em nossa análise os passos de tempo são de 0.1 segundo. Começaremos então a descrição dos passos detalhados do algoritmo.

5.4.1 Cálculo de vorticidade inicial

Em nosso primeiro passo, foi criada uma lista de zeros para os valores de u e v , após essa criação foi aplicada as condições de contorno nos nós de contorno. Nosso intuito inicial é calcularmos o primeiro valor da vorticidade, sendo assim, utilizando as listas criadas e acharemos os valores de ω inicial. Para isso é calculado a seguinte equação - já descrita anteriormente.

$$M\omega = G_x v - G_y u \quad (196)$$

Através deste passo, conseguimos calcular o valor de ω para todos os nós de contorno, assim devemos zerar os valores de ω para todos os nós internos da geometria - que não sejam nós de contorno - e assim possuiremos um vetor com apenas os valores da vorticidade de condição de contorno. Este vetor deverá ser aplicado para a resolução da vorticidade no terceiro passo.

5.4.2 Criação das matrizes de estabilidade

Este processo de criação já foi descrito na seção 5.2, entretanto é de extrema importância para o próximo passo. Importante lembrarmos da consideração que foi feita em sua criação:

$$\mathbf{K}_{estx} = -\frac{\Delta t}{2}u [u\mathbf{K}_{xx} + v\mathbf{K}_{yx}] \quad (197)$$

$$\mathbf{K}_{esty} = -\frac{\Delta t}{2}v [u\mathbf{K}_{xy} + v\mathbf{K}_{yy}] \quad (198)$$

$$\mathbf{K}_{est} = \mathbf{K}_{estx} + \mathbf{K}_{esty} \quad (199)$$

5.4.3 Cálculo de vorticidade

Em nosso terceiro passo calculamos a valor de vorticidade através da função corrente-vorticidade adimensionada, onde ω^{n+1} é a vorticidade a ser calculada e ω^n é a vorticidade calculada anteriormente. Tendo em vista isto, foi calculada a seguinte equação já apresentada anteriormente:

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t}\omega^{n+1} + \frac{1}{Re}\mathbf{K}\omega^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t}\omega^n - u \cdot \mathbf{G}_x\omega^n - v \cdot \mathbf{G}_y\omega^n - \mathbf{K}_{est}\omega^n \quad (200)$$

Para a correta resolução dessa equação, é necessário aplicar as condições de contorno na matriz massa as esquerda da equação, usando a metodologia explicada na seção 5.3, além de também aplicar ao lado direito da equação, também já explicado na seção a qual foi feita referência nesse paragrafo.

5.4.4 Cálculo função corrente

O quarto passo se constitui no cálculo da função corrente, ψ , para isso foi necessário resolver a seguinte equação já expressa anteriormente:

$$\mathbf{K}\psi = \mathbf{M}\omega \quad (201)$$

Para sua correta resolução é necessário, assim como nos passos anteriores, a aplicação das condições de contorno na matriz rigidez a esquerda da equação nas linhas

referentes aos nós de contorno, assim como é necessário a aplicação das condições de contorno de ψ no lado direito da equação.

5.4.5 Cálculo velocidades

O quinto passo se resume ao cálculo das velocidades u e v , para isso é necessário a resolução da seguinte equação já apresentada anteriormente:

$$\mathbf{M}u = \mathbf{G}_y\psi \quad (202)$$

$$\mathbf{M}v = -\mathbf{G}_x\psi \quad (203)$$

assim como nas seções anteriores, para a correta resolução do sistema é necessário levar em consideração as condições de contorno relacionadas a u e v .

5.4.6 Cálculo concentração

Em nosso sexto passo calculamos a valor da concentração através da função de transporte de uma espécie química adimensionada, onde c^{n+1} é a concentração a ser calculada e c^n é a concentração calculada anteriormente, em seu primeiro cálculo o valor de c^n é usado como uma lista apenas com os valores das condições de contorno diferente de zeros - nos nós onde tal valor se difere do nulo. Tendo isto em vista, foi calculada a seguinte equação já apresentada anteriormente:

$$\frac{\mathbf{M}}{\Delta t}c^{n+1} + \frac{1}{ReSc}\mathbf{K}c^{n+1} = \frac{\mathbf{M}}{\Delta t}c^n - u \cdot \mathbf{G}_xc^n - v \cdot \mathbf{G}_yc^n - \mathbf{K}_{est}c^n \quad (204)$$

Para a correta resolução dessa equação, assim como nas subseções anteriores, é necessário aplicar as condições de contorno na matriz massa as esquerda da equação, além de também aplicar ao lado direito da equação.

5.4.7 Reprocessamento para o próximo passo de tempo

Este passo explicados acima foram repetidos para cada passo de tempo determinado, até que tenha sido entendido que os valores se encontram convergidos. O processo foi feito inteiramente dentro do loop de passos temporais, entretanto existem etapas que podem ser feitas antes, tal uso pode ser utilizado para diminuição do tempo de processamento embora seu impacto possa ser considerado insignificante.

As seguintes etapas podem ser feitas fora do loop, Iniciação da vorticidade, aplicação de zerar as linhas nas matrizes globais e a iniciação da concentração.

Para resolução dos sistemas lineares foi reduzida todas as equações para $\mathbf{A}x = b$. Como exemplo usaremos o cálculo das velocidade u :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}u &= \mathbf{G}_y\psi \\ \mathbf{A} &= \mathbf{M} \text{ e } b = \mathbf{G}_x\psi \\ \text{Logo, } \mathbf{A}u &= b \end{aligned}$$

```

for t in range(passos):
    ...
    A = M.copy() #definindo A como uma copia de M
    b = np.dot(Gy, psi) #definido o vetor b
    u = np.linalg.solve(A,b) #calculando a velocidade u
    ...

```

O processo acima pode ser dividido em 3 etapas, a primeira é a definição da matriz \mathbf{A} , sendo ela sempre representando o lado esquerdo da equação que será multiplicado pelo vetor que queremos encontrar. A segunda etapa é a definição do vetor b , sendo ele a representação de todo o lado direito da equação. Por fim, a terceira etapa é o calculo do vetor solução para o sistema apresentado, em nosso código foi utilizado a biblioteca *numpy* que foi abreviado para *np* no algoritmo. Todas os sistemas resolvidos apresentam formulação semelhante, alterando apenas os fatores utilizados. Além das descrições anteriores, deve ser levado em consideração que todos as condições de contorno foram utilizadas para a resolução, mesmo não sendo expressada no código acima.

6 VALIDAÇÃO DO CÓDIGO NUMÉRICO

Neste capítulo iremos comparar o resultado de uma geometria com a resolução analítica, além disso faremos um caso externo - com uma geometria não usado no trabalho - para compararmos a solução numérica deste trabalho com a encontrada por (MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009).

6.1 Validação do código numérico

Iremos utiliza a geometria um, representada na **Subseção 7.2** como base de comparação ao *Escoamento de Poiseuille*, em nosso segundo estudo de validação será feita em um caso com análise *lid-driven cavity flow*, o resultado deste problema será comparado aos resultados de (MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009). Esse caso foi escolhido, pois em nossa geometria dois, abordada na **Seção 7.3**, apresenta condições de contorno, da região onde se localiza no inferior do stent, parecida com de uma cavidade de tampa móvel.

Foi entendido que com essas duas validações, apresentaremos resultados consolidados e assertivos na resolução do problema tratado nesse trabalho.

6.1.1 Escoamento de Poiseuille

O *Escoamento de Poiseuille* é definido segundo (PONTES; MANGIAVACCHI, 2009) sendo um escoamento monofásico, permanente e totalmente desenvolvido de um fluido newtoniano e incompressível entre duas placas planas paralelas e fixas, onde apresenta gradiente de pressão $\partial p/\partial x$ igual a constante. Devido a essa característica, o escoamento apresenta o seguinte perfil de velocidade:

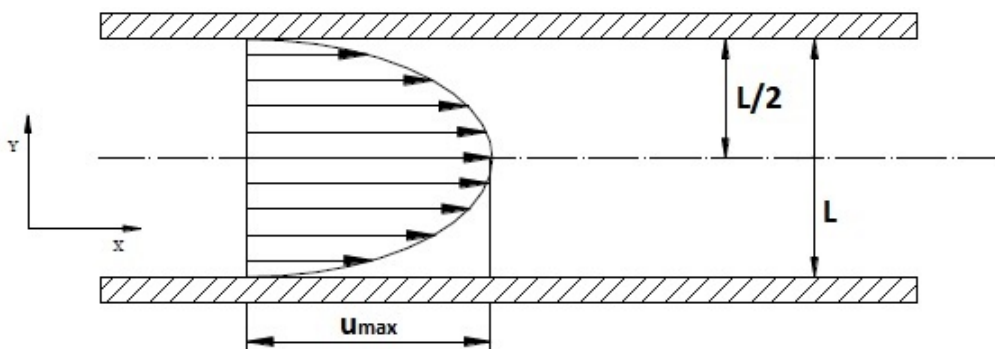


Figura 7 – Escoamento de Poiseuille

O perfil de velocidade exposta no imagem acima respeita a seguinte equação:

$$u = \frac{4u_{max}}{L^2}y[L - y] \quad (205)$$

Ressaltamos que, u_{max} é a velocidade máxima que é igual a $1.5\bar{u}$, L é a largura adimensional entre as placas ($L = 1$) e y é a distância do ponto calculado até a placa, logo apresenta valor variável entre $y = [0,1]$.

6.1.1.1 Malha

A elemento de malha utilizado foi triangular linear, por motivos já explicados em capítulos anteriores. A malha criada apresenta:

- Elementos = 8670
- Nós = 4336

6.1.1.2 Condições de Contorno

- Condição de Entrada \rightarrow esta condições é definida em $x = 0$, a componente da velocidade do eixo x , u , foi igualada a 1.0 e a componente normal, v , igualada a zero. A função corrente é especificada de acordo com a equação da continuidade que já definimos anteriormente, assim $\psi = y$.
- Condição de não escorregamento \rightarrow esta condição é definida nas placas, ou seja, Y_{min} e Y_{max} onde é definido que u e v são iguais a zero. A função corrente é definida como $\psi = 1.0$ na parede superior e zero na parede inferior.
- Condições de saída \rightarrow esta condições são aplicadas em $x = x_{max}$, ou seja, no *outflow*. Teremos que ambas as derivadas das componentes da velocidade são nulas, logo $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$.

6.1.1.3 Resultados

Em nosso problema, apresentamos $Re \approx 109$, abaixo na **Figura 8** conseguimos observar a evolução e convergência do cálculo da velocidade. Na **Figura 9** conseguimos comparar os resultados do perfil de velocidade obtidos de modo analítico e numérico. Podemos então concluir que o código numérico produz um resultado satisfatório.

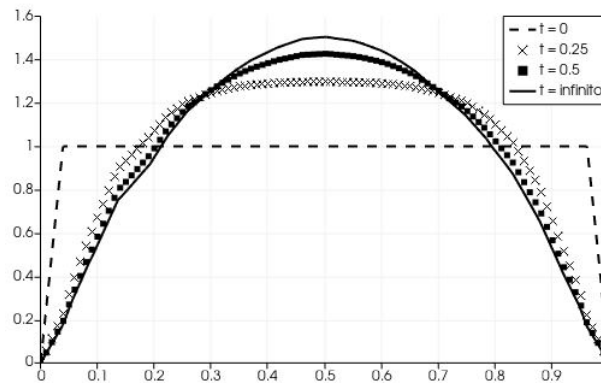
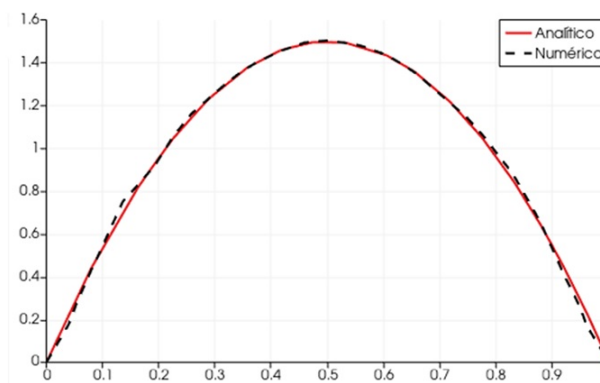
Figura 8 – Solução numérica - Convergência de u 

Figura 9 – Comparação Analítica x Numérica

6.1.2 Lid-Driven Cavity Flow

O *Lid-Driven Cavity Flow* é definido como um escoamento em uma cavidade com paredes laterais e inferior fixas e com uma tampa superior móvel com velocidade constante. O perfil do campo de velocidade esperado na resolução pode ser grosseiramente exemplificado na imagem abaixo.

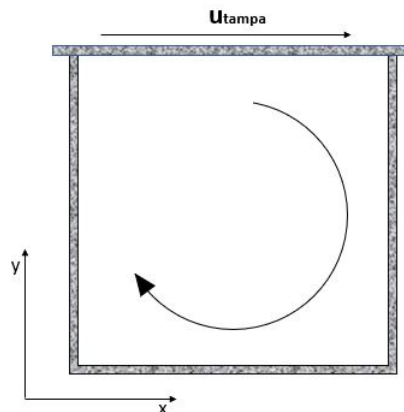


Figura 10 – Lid-Driven Cavity Flow

Para caráter de comparação iremos resolver esse escoamento com $Re = 100$, pois é o valor utilizado na resolução de (MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009) que mais se aproxima do nosso valor de Reynolds original deste trabalho.

6.1.2.1 Malha

A elemento de malha utilizado foi triangular linear, por motivos já explicados em capítulos anteriores. A malha criada apresenta:

- Elementos = 8196
- Nós = 4211

6.1.2.2 Condições de Contorno

- Condição de não escorregamento \rightarrow esta condição é definida nas paredes laterais e inferior, ou seja, Y_{min} , X_{min} e X_{max} onde é definido que u e v são iguais a zero. A função corrente é definida como $\psi = 0$ em todas as paredes.
- Condições de movimentação \rightarrow esta condições é definida em Y_{max} , ou seja, na parede superior. É definido $u = 1$ e $v = 0$. A função corrente é definida como $\psi = 0$ em todas as paredes.

6.1.2.3 Resultados

Nos gráficos abaixo comparamos os resultados obtido para o valor de u e v com o encontrado por (MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009) para o $Re = 100$. Tendo em

vista os resultados encontrados, concluímos que o código numérico apresenta resultados satisfatórios.

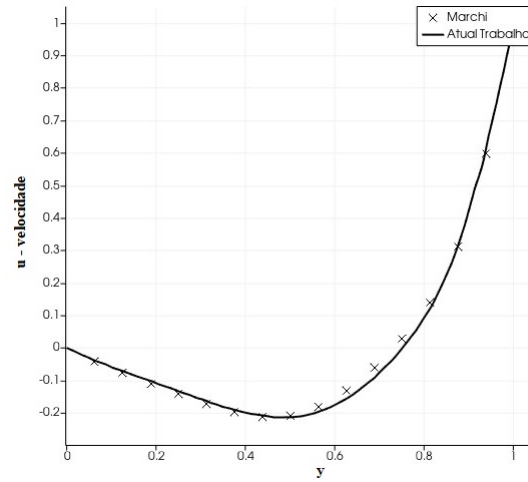


Figura 11 – Perfil de u na linha central da cavidade ($x = 0.5$) para Reynolds = 100.

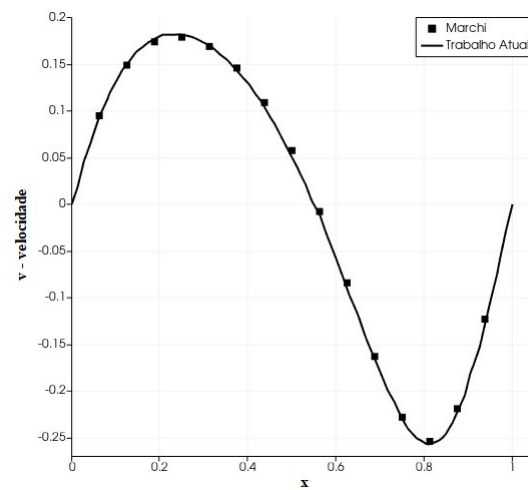


Figura 12 – Perfil de v na linha central da cavidade ($y = 0.5$) para Reynolds = 100.

7 RESULTADOS

Neste capítulo apresentaremos as geometrias estudadas e os resultados obtidos para cada simulação. Devido ao escoamento calculado ser o sanguíneo em uma artéria, devemos considerar os seguintes fatores:

- Viscosidade $\rightarrow \mu = 0.0035 Pa.s$
- Densidade $\rightarrow \rho = 1060 kg/m^3$
- Diâmetro do lúmen da artéria $\rightarrow D = 0.003m$
- Velocidade do sangue $\rightarrow u = 0.012m/s$

Os valores de viscosidade e densidade são utilizados como sugerido por (JIN et al., 2014) e a velocidade do sangue de acordo com (KESSLER et al., 1998). Através dos valores acima, conseguimos calcular o número de Reynolds de nosso problema, sendo ele, $Re = 109.1$.

A formulação corrente-vorticidade da equação de Navier-Stokes e acoplada com a equação de transporte de espécie química foi utilizada para dez geometrias, que serão exposta em sequência, desenvolvidas pelo próprio autor desse trabalho.

Na primeira seção deste capítulo mostraremos a análise de malha utilizada para definir qual as propriedades da malha utilizada como padrão. Na segunda seção, introduziremos a primeira geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato de canal, que será numerada como geometria 1, Figura 18. Na terceira seção, introduziremos a segunda geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato de mola helicoidal com diâmetro maior que parede interna da artéria, que será numerada como geometria 2, Figura 23. Na quarta seção, introduziremos a terceira geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato de mola helicoidal com passo igual a 2mm, que será numerada como geometria 3, Figura 28. Na quinta seção, introduziremos a quarta geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato de quatro anéis interligados, que será numerada como geometria 4, Figura 34. Na sexta seção, introduziremos a quinta geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato de mola helicoidal com passo igual a 1mm, que será numerada como geometria 5, Figura 39. Na sétima seção, introduziremos a sexta geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato atualmente utilizado em stents, que será numerada como geometria 6, Figura

44. Na oitava seção, introduziremos a sétima geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato de mola helicoidal com espirais retangulares, que será numerada como geometria 7, Figura 51. Na nona seção, introduziremos a oitava geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato de mola helicoidal com espirais losangulares, que será numerada como geometria 8, Figura 57. Na décima seção, introduziremos a nona geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato com deformação aleatória, que será numerada como geometria 9, Figura 63. Por fim, na décima primeira seção, introduziremos a décima geometria e apresentaremos a simulação para o stent farmacológico em formato senoidal, que será numerada como geometria 10, Figura 68.

Todas as geometria apresentam duas partes, a primeira de maior comprimento representando as paredes da artéria com três milímetros de diâmetro interno e vinte e quatro milímetros de comprimento e a segunda parte de menor comprimento representando o stent farmacológico com diâmetro também de três milímetros e comprimento de oito milímetros. As partes são apresentadas sobrepostas, sendo assim a parede da artéria e do stent tem a mesma representação física no sistema, todas as geometrias representam o stent farmacológico já expandido dentro da artéria.

O stent se localizará sempre na medida central do comprimento da artéria, sendo assim resultando em uma distância de oito milímetros da região de inlet do fluido e outros oito milímetros de distância da região de outlet do fluido.

Em todas as simulações feitas neste trabalho, foram utilizadas Número de Schmidt (Sc) = 1.0. Nas superfícies que não são imputadas diretamente as condições de contorno - como o outflow - o MEF automaticamente compreende que é definida um condição de contorno de Neumann, onde a derivada dos valores nestas superfícies se igualam a zero.

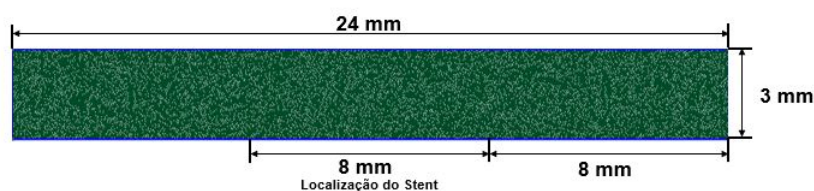


Figura 13 – Geometria base com representações das distâncias padrão de posição do stent e do volume de estudo

Devida ao fato de estarmos resolvendo as equações na forma adimensional, necessitamos alterar a geometria para que estejam em escala adimensional assim como adimensionar os valores das condições de contorno.

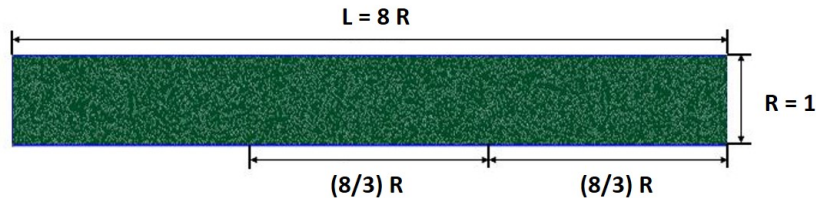


Figura 14 – Geometria base - adimensionalizada

Em todas as simulações feitas foi utilizado número de Schmidt $Sc = 1$, a visualização da simulação foi feita através do software de livre acesso *Paraview*.

7.1 Definição de Malha

Visando a maior assertividade do resultado deste trabalho foi feita uma análise da malha para a determinação do melhor refinamento a ser utilizado nas simulações.

Importante ressaltarmos que todas as malhas foram geradas no *GMSH* através da função "Element Size Factor"(ESF), que é imputado pelo usuário do programa. Este fator é usado pelo software pra definir um intervalo de possíveis tamanhos que o elemento da malha pode ter, para melhor entendimento do uso da ESF pode-se consultar o manual do programa disponível gratuitamente online.

Tendo isto em vista, plotamos uma relação N° de Elementos x Erro, relacionado ao resultado numérico encontrado e ao resultado analítico do Escoamento de Poiseuille. O ponto estudado é o referente ao valor da norma da velocidade em $x = 4$ e $Y = 0.5$, que de acordo com o resultado analítico é um ponto que apresenta $|\mathbf{v}|$ máximo.

Também apresenta-se uma comparação entre o refinamento da malha e o tempo de processamento para uma simulação de 500 passos com $\Delta t = 0.0005$. Por fim mostraremos a relação encontrada entre ESF e o Número de elementos para o geometria um, apresentada neste trabalho. O valor de ESF foi limitado a 0.05 devido as limitações de processamento do equipamento usufruído para a execução das simulações.

Para este trabalho foi escolhido o valor de $ESF = 0.05$, proporcionando assim um erro menos de 0.5%, em contrapartida foi necessário um maior tempo de processamento para as simulações.

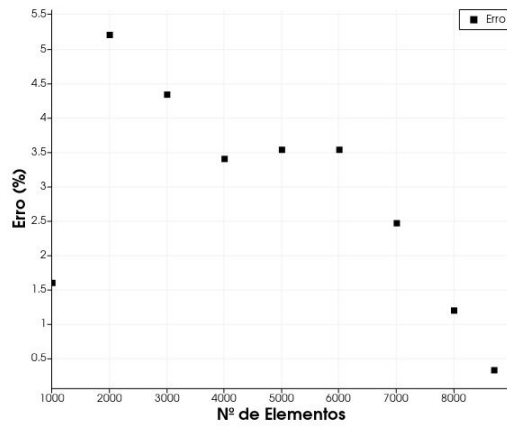


Figura 15 – Relação Número de Elementos x Erro

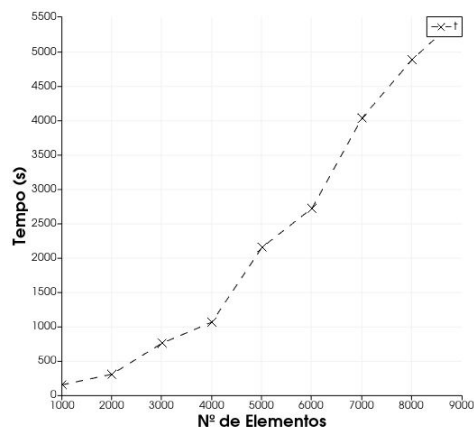


Figura 16 – Relação Número de Elementos x Tempo de processamento

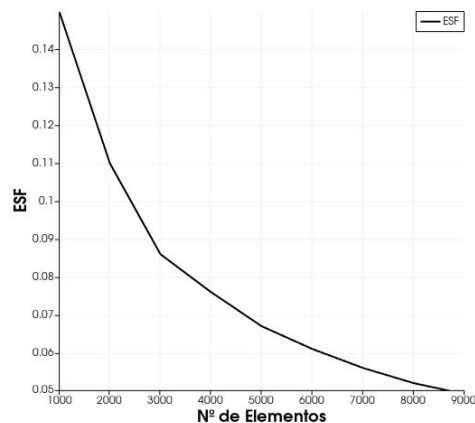


Figura 17 – Relação Número de Elementos x Element Size Factor

7.2 Geometria 1 - Canal

Esta geometria é baseada em um stent com formato tubular, entretanto, devido a aproximação para um sistema bidimensional, foi considerado que a parede do stent irá formar uma superfície reta em contato com parede arterial, semelhante a um canal. Sendo assim, esta representação se assemelha a de duas placas horizontais estáticas, como podemos ver na figura abaixo.

Um escoamento monofásico, permanente e plenamente desenvolvido de um fluido newtoniano e incompressível entre duas placas horizontais estáticas é conhecido como *Escoamento de Poiseuille*. Este escoamento apresenta solução analítica e por isso iremos usar a solução desta geometria para a validação de nosso código.

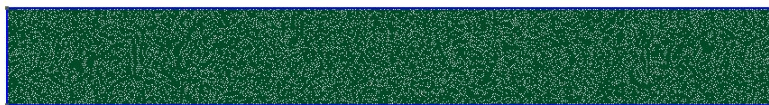


Figura 18 – Geometria 1 - Stent canal

Neste trabalho não temos a intenção de estudar a variação da velocidade do fluido variando com a geometria, o ponto de análise será a concentração do medicamento e a difusão do mesmo ao longo do tempo.

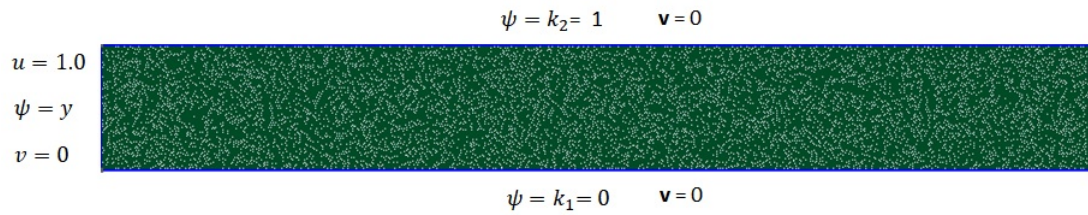


Figura 19 – Condições de contorno geometria 1, espécie química não representada

7.2.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram as definidas pelo escoamento de Poiseuille:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = 1.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições de espécie química* → utilizada na parede superior e inferior da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.2.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria um, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4336 nós e 8670 elementos.

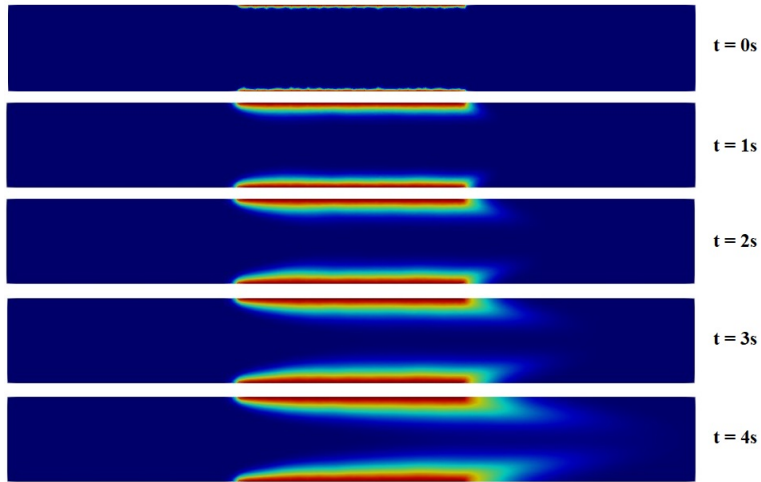


Figura 20 – Geometria 1 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 1.5
- Azul = 0.0

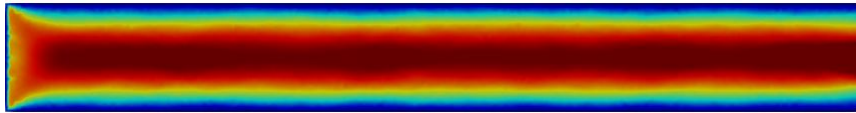


Figura 21 – G1 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0



Figura 22 – G1 - Campo de velocidade v

7.3 Geometria 2 - Mola Helicoidal com diâmetro maior que parede interna da artéria

Nesta geometria é baseada em um stent com formato de mola helicoidal com passo igual a dois milímetros e diâmetro da mola igual a três milímetros e meio (3.5mm). Nessa situação a mola excede o diâmetro da parede interna da artéria, criando-se cavidades nas mesmas. Aproximamos o formato dessas cavidades para um semicírculo.

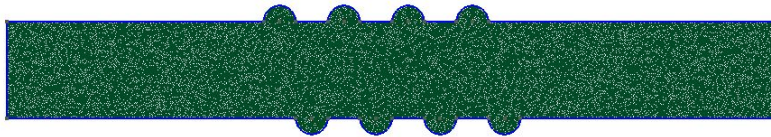


Figura 23 – Geometria 2 - Stent mola helicoidal tipo 1

7.3.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram definidas considerando as semi-circunferências como cavidades, sendo assim, utilizando as condições de Lid-Driven para estas regiões:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = 6y(1 - y)$ (Solução analítica da velocidade)
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (semi-circunferências superiores)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (semi-circunferências inferiores)

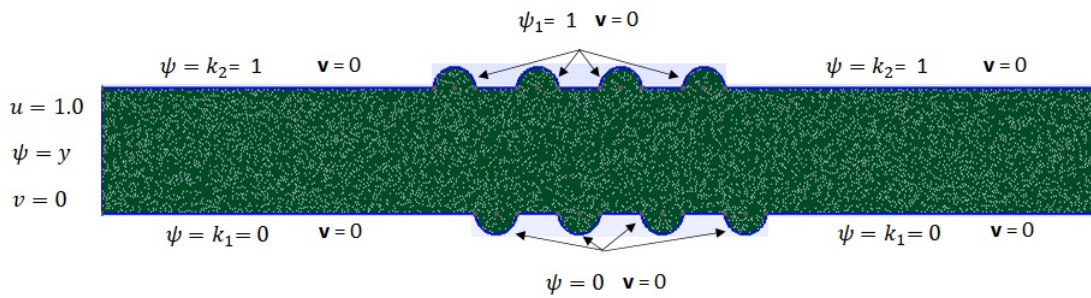


Figura 24 – Condições de contorno geometria 2, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada nas semi-circunferências superiores e inferiores da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.3.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria dois, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4752 nós e 9502 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 1.5$ no ponto onde não está implantado o stent na região. Onde está implantada o stent, apresenta velocidade máxima de $u = 1.49$.

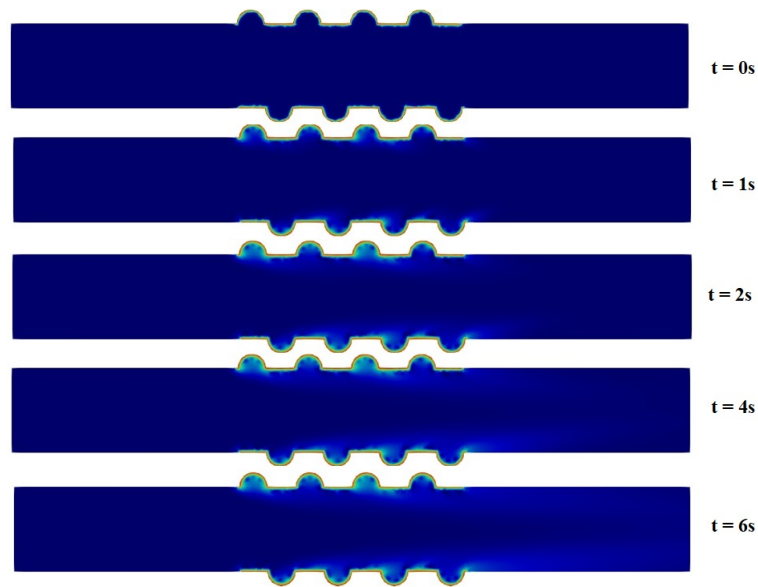


Figura 25 – Geometria 2 - Evolução do campo de concentração

Podemos perceber nesta geometria a baixa concentração da espécie química no fluido. Em seguida, podemos observar o perfil de velocidade u neste modelo, assim conseguimos entender que este comportamento deve ocorrer devido a baixa velocidade do fluido nas cavidades, que pode ser observado pelo coloração azul nas "cavidades", encontrada na **Figura 26**.

Escala:

- Vermelho = 1.5
- Azul = 0.0

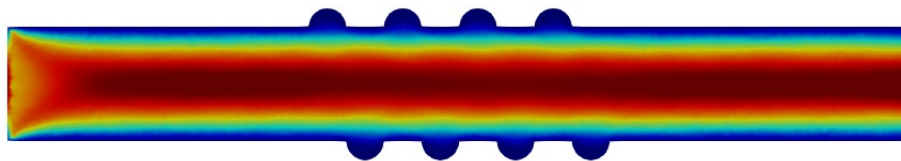


Figura 26 – G2 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0



Figura 27 – G2 - Campo de velocidade u

7.4 Geometria 3 - Mola Helicoidal com passo igual a 2mm

Esta geometria também se baseia em uma mola helicoidal, entretanto seu diâmetro, praticamente, se equivale ao da parede da artéria. As espirais da mola apresentam diâmetro de um milímetro e metade desse valor se adentra ao interior da parede arterial e a parte que se mantém exterior é representada por um semicírculo.

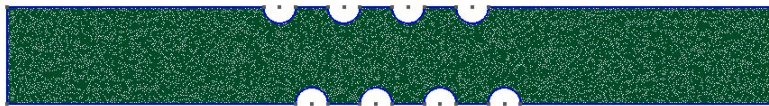


Figura 28 – Geometria 3 - Stent mola helicoidal tipo 2

7.4.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram definidas considerando um caso de escoamento sobre semi-cilindros, sendo assim, utilizando as seguintes condições para as regiões:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = u = 6y(1 - y)$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$

- Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
- Função corrente $\psi = y_c$ que representa o valor de y no centro do semi-circulo.

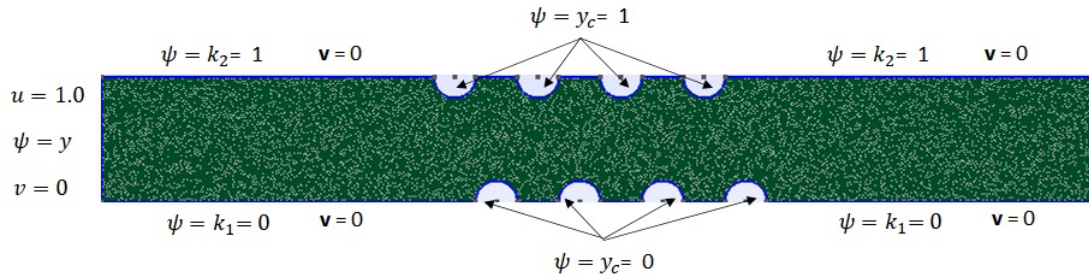


Figura 29 – Condições de contorno geometria 3, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada nas semi-circunferências superiores e inferiores da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.4.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria três, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4381 nós e 8760 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.03$ no ponto onde stent é implantado.

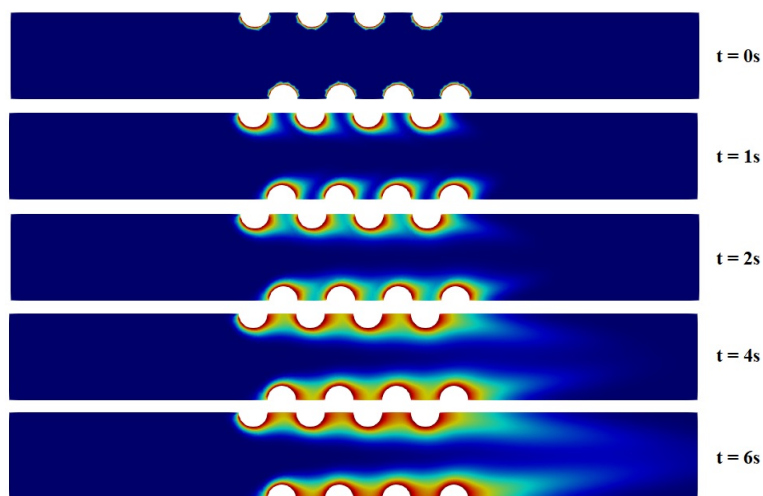


Figura 30 – Geometria 3 - Evolução do campo de concentração

Na imagem acima, podemos perceber uma tendência de acúmulo de concentração nas regiões posteriores aos obstáculos - este mesmo comportamento é encontrado nas geometrias 4,7 e 8 - que pode ser explicado de através dos perfis de velocidade apresentados.

Escala:

- Vermelho = 2.1
- Azul = 0.0

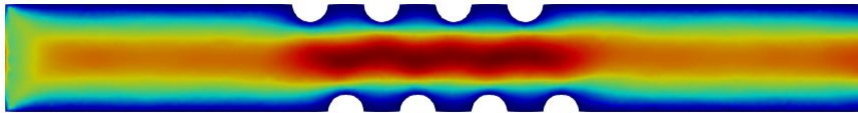


Figura 31 – G3 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0

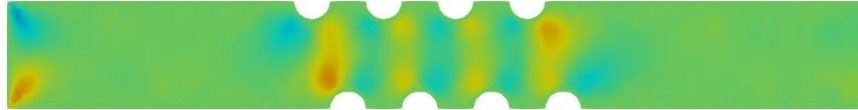


Figura 32 – G3 - Campo de velocidade v

No gráfico abaixo mostramos a evolução da concentração na metade da altura do obstáculo inferior.

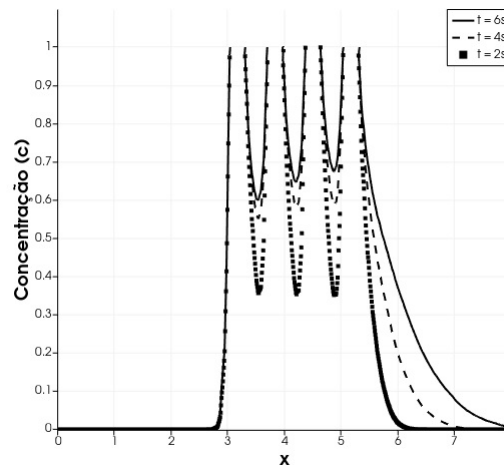


Figura 33 – Geometria 3 - Evolução do acúmulo de concentração

7.5 Geometria 4 - Quatro Anéis interligados

Esta geometria representa um stent formado por quatro anéis interligados por uma geometria tubular, onde o anel apresenta diâmetro interno de dois milímetros e externo de quatro milímetros, além de ser constituído por um filete circular maciço de dois milímetros de diâmetro. Nessa representação apenas os anéis são responsáveis pela liberação da espécie química no fluido.

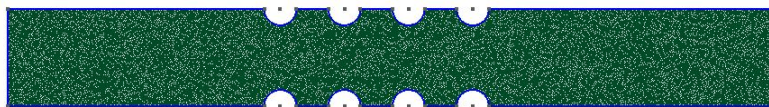


Figura 34 – Geometria 4 - Stent anéis interligados

7.5.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram definidas considerando um caso de escoamento sobre semi-cilindros, sendo assim, utilizando as seguintes condições para as regiões:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = u = 6y(1 - y)$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$

- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y_c$ que representa o valor de y no centro do semi-circulo.

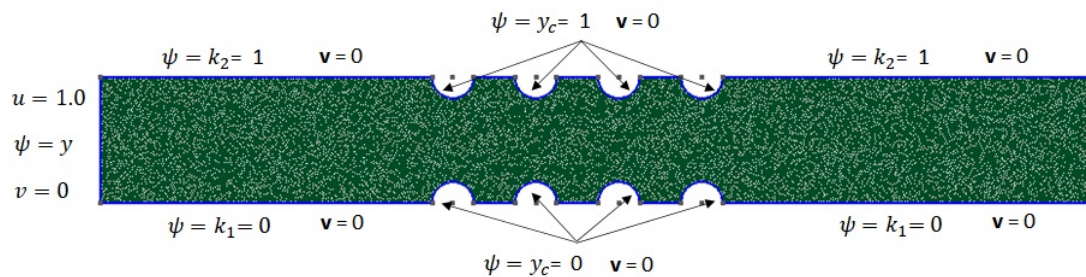


Figura 35 – Condições de contorno geometria 4, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada nas semi-circunferências superiores e inferiores da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.5.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria quatro, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4333 nós e 8664 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.12$ no ponto onde stent é implantado.

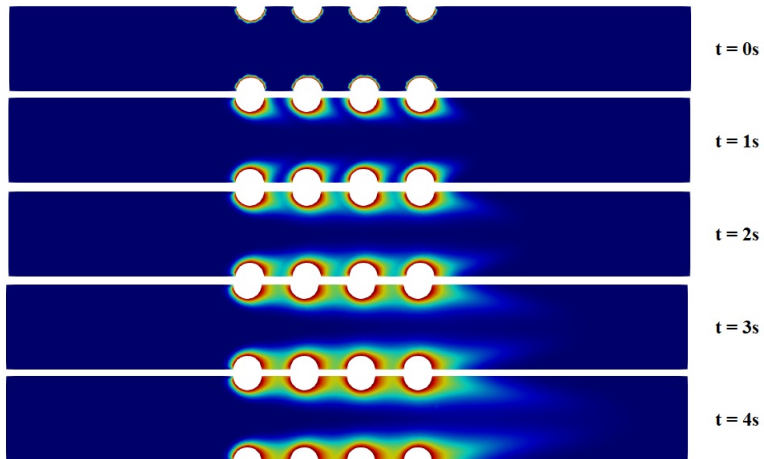


Figura 36 – Geometria 4 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 2.2
- Azul = 0.0

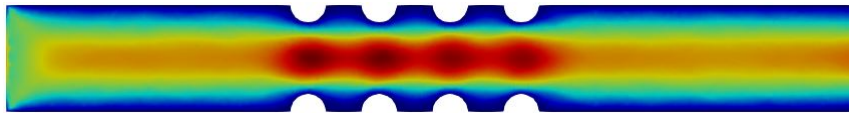


Figura 37 – G4 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0

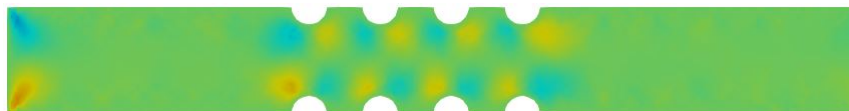


Figura 38 – G4 - Campo de velocidade v

7.6 Geometria 5 - Mola Helicoidal com passo igual a 1mm

Esta geometria também se baseia em uma mola helicoidal, onde seu diâmetro, praticamente, se equivale ao da parede da artéria. As espirais da mola apresentam diâmetro de um milímetro e metade desse valor se adentra ao interior da parede arterial e a parte que se mantém exterior é representada por um semicírculo. O passo da mola é de um milímetro, assim apresentando oito voltas na dimensão do stent.

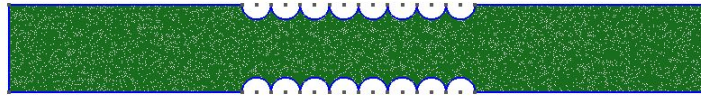


Figura 39 – Geometria 5 - Stent mola helicoidal tipo 3

7.6.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram definidas considerando um caso de escoamento sobre semi-cilindros, sendo assim, utilizando as seguintes condições para as regiões:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = u = 6y(1 - y)$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y_c$ que representa o valor de y no centro do semi-círculo.

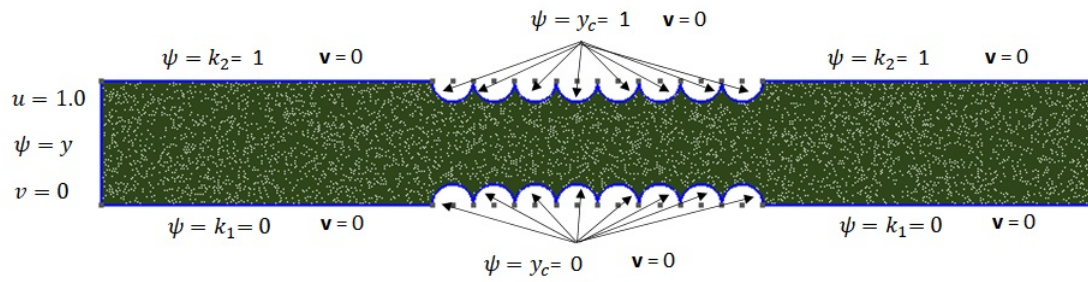


Figura 40 – Condições de contorno geometria 5, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada nas semi-circunferências superiores e inferiores da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.6.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria cinco, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4278 nós e 8489 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.22$ no ponto onde stent é implantado.

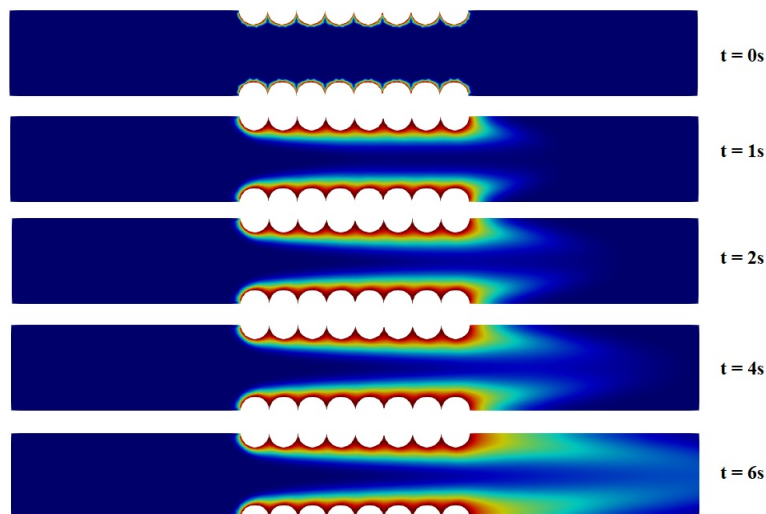


Figura 41 – Geometria 5 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 2.3
- Azul = 0.0

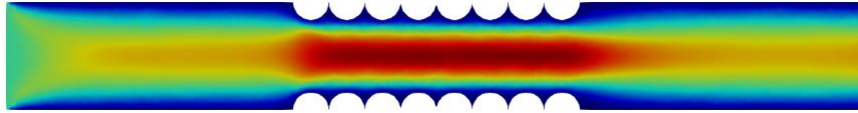


Figura 42 – G5 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0



Figura 43 – G5 - Campo de velocidade v

7.7 Geometria 6 - Stent Atual

O stent atual é um estrutura "gradeada" formada por uma pequenos losangos que ao se expandir pressionam-se contra a parede da artéria.

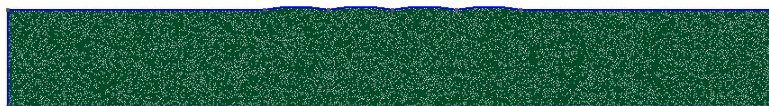


Figura 44 – Geometria 6 - Stent atual

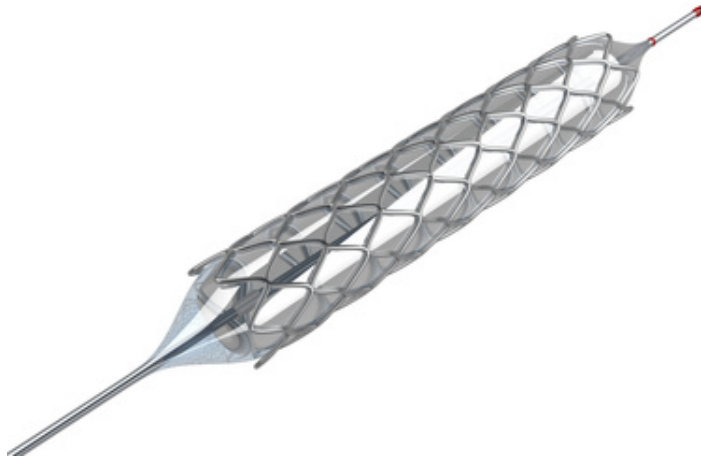


Figura 45 – Stent Farmacológico com balão

Fonte: (MIGLIARO, 2016)

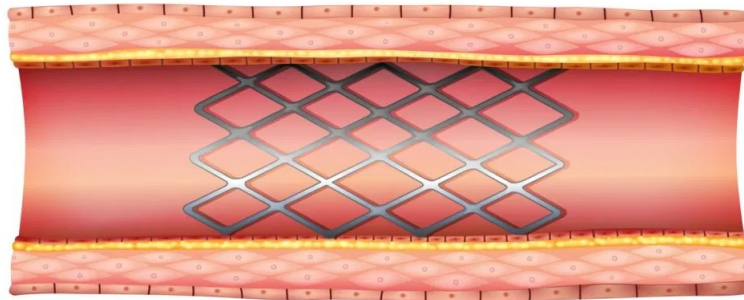


Figura 46 – Stent farmacológico em uma artéria

Fonte: (GUEDES, 2017)

Em nossa representação, o contato entre os stent e a parede da artéria irá resultar em uma pequena deformação elíptica onde a altura do centro dentro da elipse até o ponto mais alto é de um décimo de milímetro (0.1mm) em seu comprimento total no eixo x é de dois milímetros.

7.7.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram definidas considerando as deformações são cavidades, sendo assim:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = u = 6y(1 - y)$

- Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
- Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (semi-elipses superiores)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (semi-elipses inferiores)

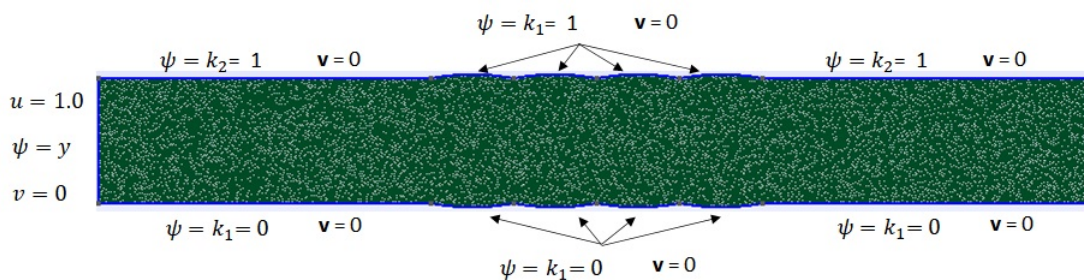


Figura 47 – Condições de contorno geometria 6, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada nas semi-elipses superiores e inferiores da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.7.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria seis, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4656 nós e 8942 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 1.5$ no ponto onde não está implantado o stent na região onde está implantada o stent, apresentamos velocidade máxima de $u = 1.47$.

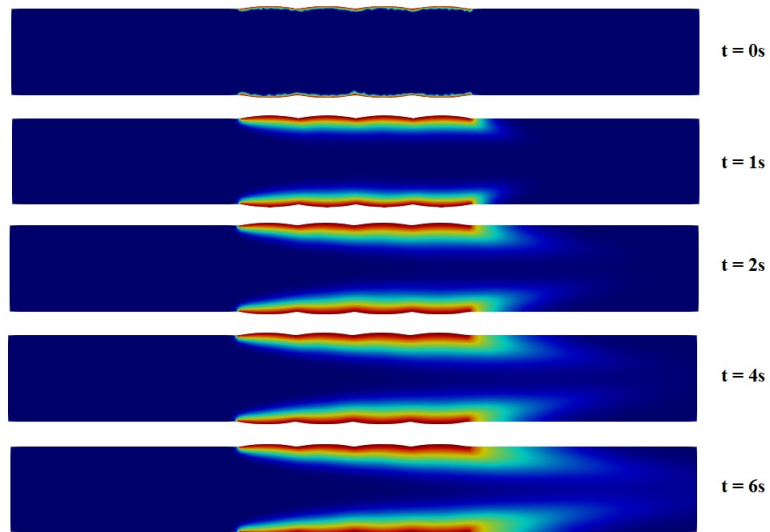


Figura 48 – Geometria 6 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 1.5
- Azul = 0.0

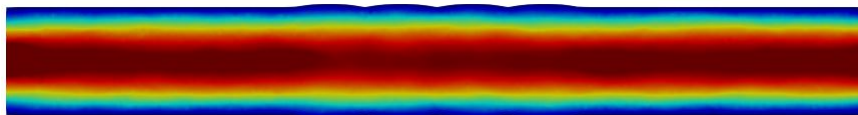


Figura 49 – G6 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0



Figura 50 – G6 - Campo de velocidade v

7.8 Geometria 7 - Mola helicoidal com geometria retangular

Nesta representação foi considerada a geometria descrita na Seção 7.4, entretanto o formato das esperais nessa geometria é retangular, onde a parte externa a parede apresenta altura de meio milímetro (0.5mm) e comprimento de um milímetro.



Figura 51 – Geometria 7 - Stent mola helicoidal tipo 4

7.8.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram definidas da seguinte forma:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = 1.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (degraus superiores)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (degraus inferiores)

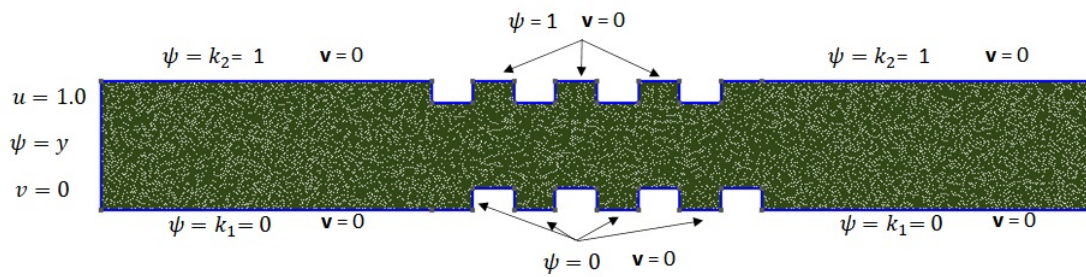


Figura 52 – Condições de contorno geometria 7, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada nas retângulos superiores e inferiores da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.8.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria sete, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4587 nós e 9171 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.22$ no ponto onde stent é implantado.

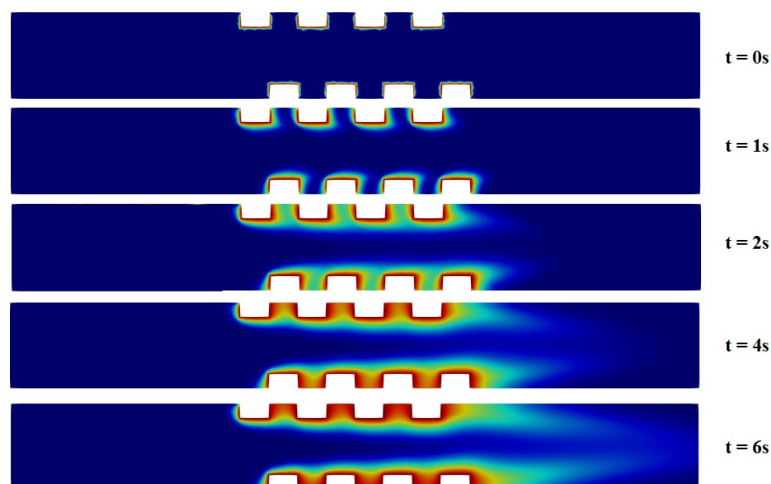


Figura 53 – Geometria 7 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 2.3
- Azul = 0.0

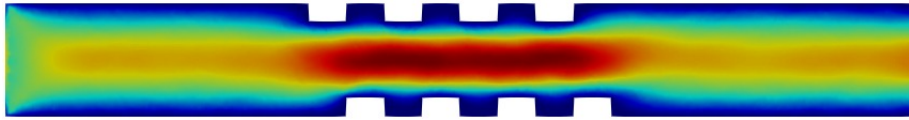


Figura 54 – G7 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0



Figura 55 – G7 - Campo de velocidade v

No gráfico abaixo mostramos a evolução da concentração na metade da altura do obstáculo inferior.

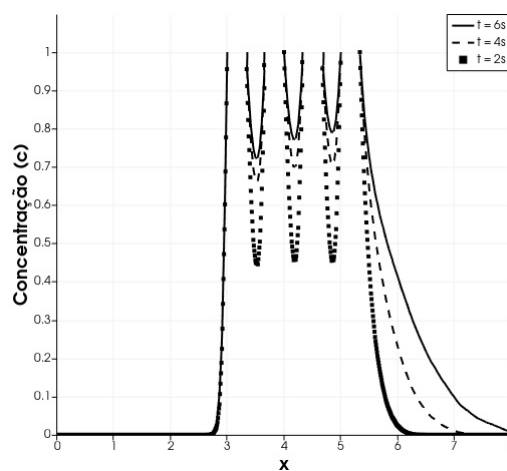


Figura 56 – Geometria 7 - Evolução do acúmulo de concentração

7.9 Geometria 8 - Mola helicoidal com geometria losangular

Nesta representação foi considerada a geometria descrita na Seção 7.4, entretanto o formato das esperais nessa geometria é losangular, onde a metade externa a parede representa um triângulo de altura de meio milímetro (0.5mm) e base de um milímetro.

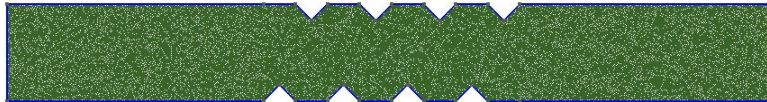


Figura 57 – Geometria 8 - Stent mola helicoidal tipo 5

7.9.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foram definidas da seguinte forma:

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = 6y(1 - y)$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (triângulos superiores)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (triângulos inferiores)

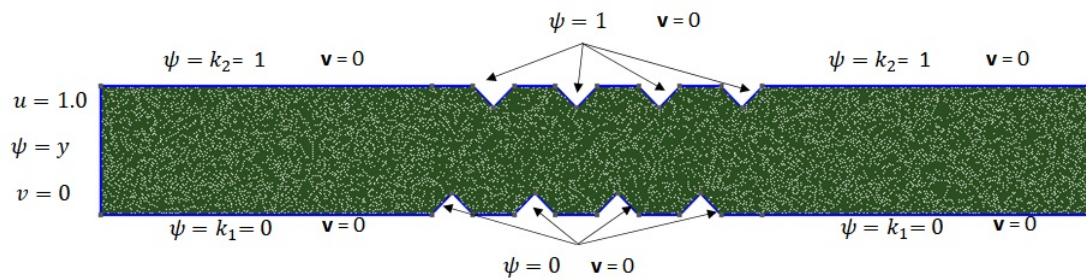


Figura 58 – Condições de contorno geometria 8, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada nas triângulos superiores e inferiores da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.9.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo para a geometria oito, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4478 nós e 8954 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 1.5$ no ponto onde não está implantado o stent na região. Onde está implantada o stent, apresenta velocidade máxima de $u = 1.95$.

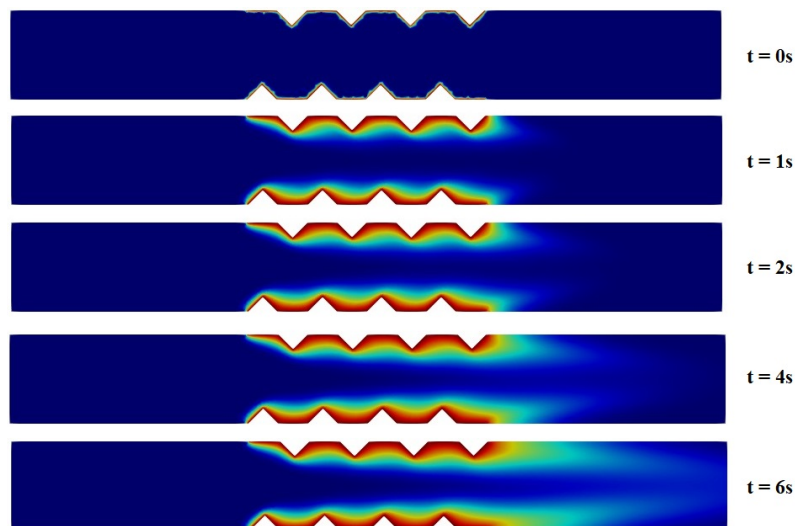


Figura 59 – Geometria 8 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 1.95
- Azul = 0.0

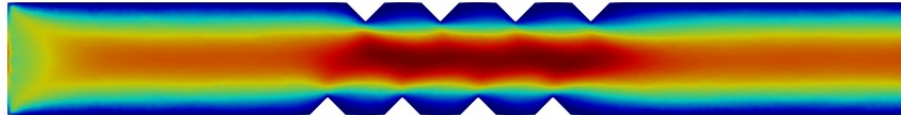


Figura 60 – G8 - Campo de velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0

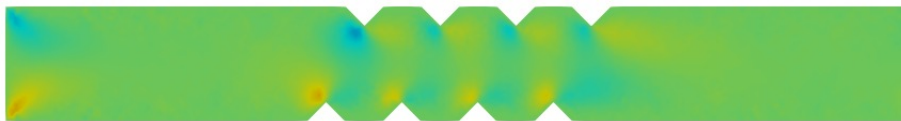


Figura 61 – G8 - Campo de velocidade v

No gráfico abaixo mostramos a evolução da concentração na metade da altura do obstáculo inferior.

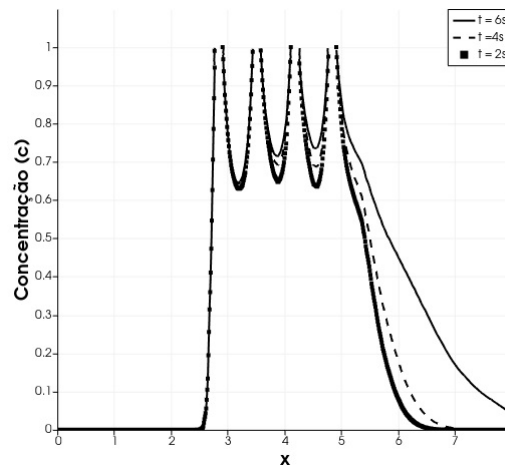


Figura 62 – Geometria 8 - Evolução do acúmulo de concentração

7.10 Geometria 9 - Parede com placa grossa

Esta geometria representa uma artéria com uma grossa placa de ateroma na parede inferior, o stent não conseguiu expandir-se o suficiente para achatar a parte inferior e assim deixando um formato aleatório na região inferior da análise.



Figura 63 – Geometria 9 - Stent com deformação

7.10.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foi definido que a parede do stent deveria conter a mesmas condições que a parede do lúmen.

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = 1.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$

- Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
- Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* \rightarrow aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (deformação inferior)

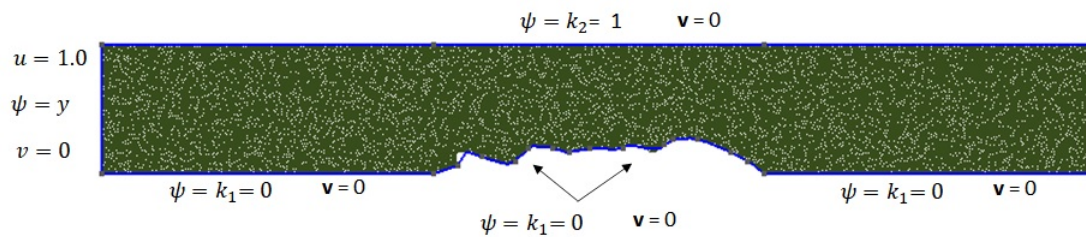


Figura 64 – Condições de contorno geometria 9, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* \rightarrow utilizada na parede superior e na deformação inferior da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.10.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4217 nós e 8432 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 2.08$ na área onde stent é implantado.

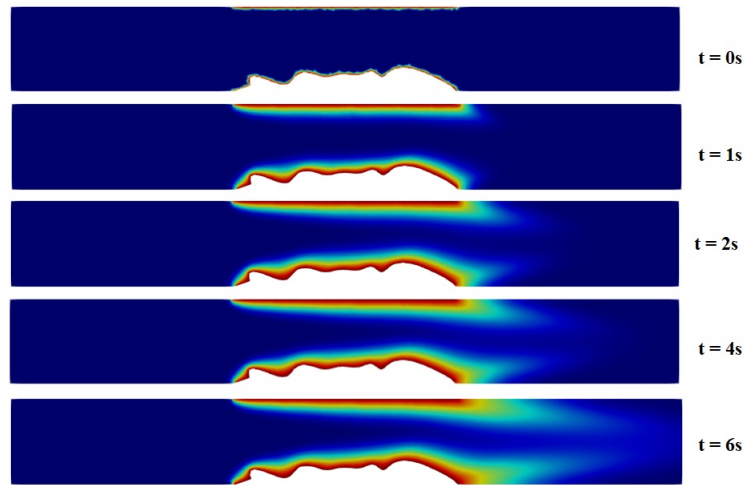


Figura 65 – Geometria 9 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 2.1
- Azul = 0.0

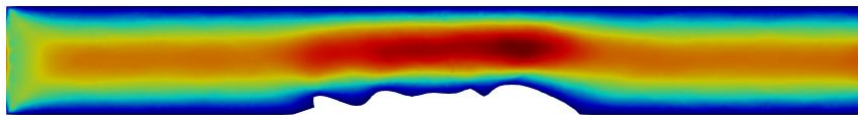


Figura 66 – G9 - Campo de Velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0

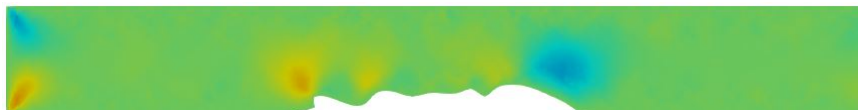


Figura 67 – G9 - Campo de Velocidade v

7.11 Geometria 10 - Stent senoidal

Esta geometria é baseada em um stent com paredes de uma função senoidal de amplitude de um milímetro (1mm).

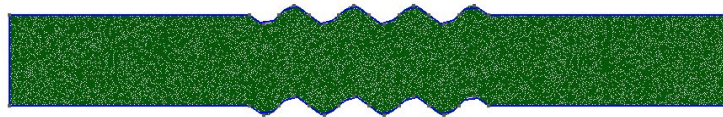


Figura 68 – Geometria 10 - Stent senoidal

7.11.1 Condições de Contorno

Condições de contorno utilizadas nessa simulação foi definido que a parede do stent deveria conter a mesmas condições que a parede do lúmen.

- *Condição de entrada (inflow)*
 - Componente horizontal da velocidade $u = 1.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = y$
- *Condições de não escorregamento* → utilizada na parede superior e inferior da geometria.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (parede superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (parede inferior)
- *Condições do stent* → aplicada nas paredes onde o stent está localizado.
 - Componente horizontal da velocidade $u = 0.0$
 - Componente vertical da velocidade $v = 0.0$
 - Função corrente $\psi = 1.0$ (função superior)
 - Função corrente $\psi = 0.0$ (função inferior)

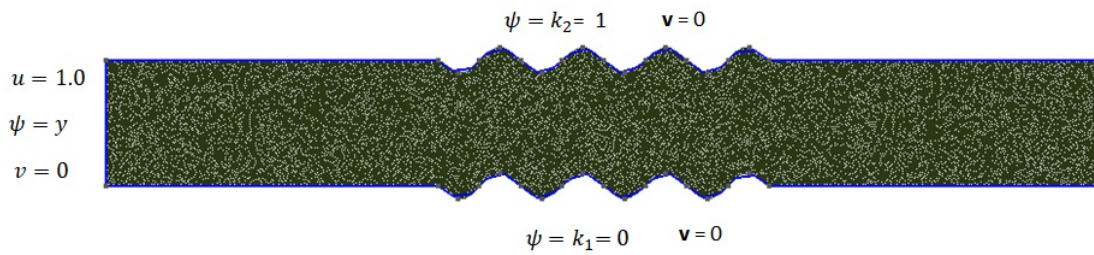


Figura 69 – Condições de contorno geometria 10, espécie química não representada

- *Condições de espécie química* → utilizada na parede superior e na parede inferior da geometria onde o stent está localizado.
 - Concentração $c = 1.0$

7.11.2 Resultados Obtidos

A figura abaixo representa a evolução no tempo e espaço do campo de concentração da espécie química no tempo, como os valores utilizados foram adimensionais, a coloração vermelha representa 100% e a coloração azul representa 0%.

Para a obtenção desse resultado, foi utilizada uma malha com discretização de domínio em 4470 nós e 8938 elementos. O valor adimensional máximo do campo de velocidade chega a $u = 1.74$ no ponto onde stent é implantado.

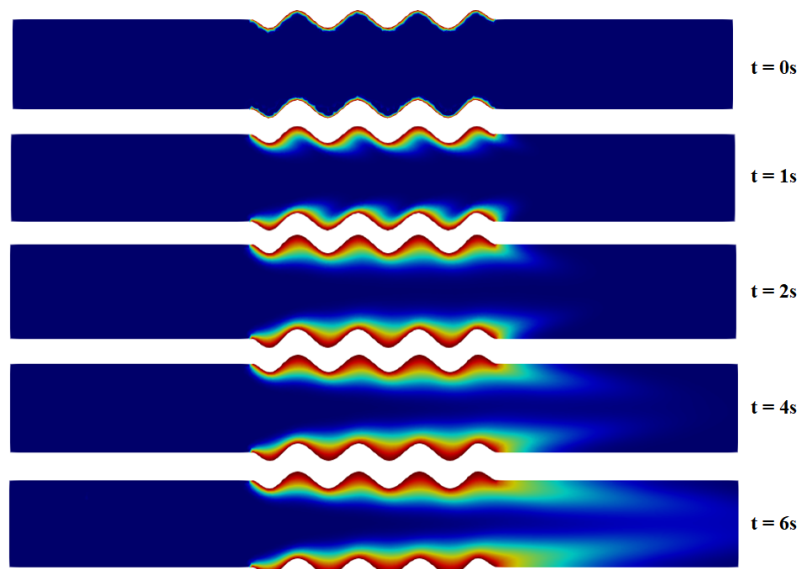


Figura 70 – Geometria 10 - Evolução do campo de concentração

Em seguida, as figuras representam o campo vetorial de u e v da geometria referida.

Escala:

- Vermelho = 1.75
- Azul = 0.0

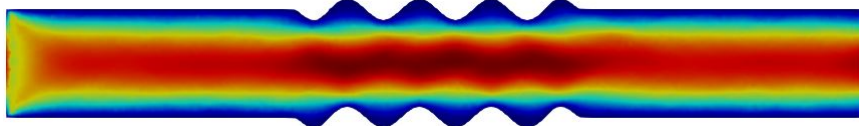


Figura 71 – G10 - Campo de Velocidade u

Escala:

- Vermelho = 1.0
- Verde = 0.0
- Azul = - 1.0

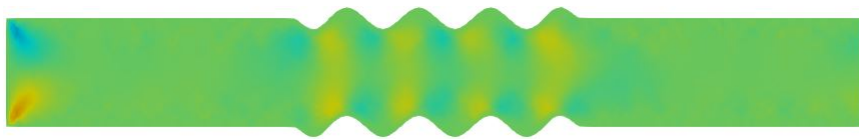


Figura 72 – G10 - Campo de Velocidade v

8 CONCLUSÃO

Nesta monografia foi apresentado o objetivo de estudar a difusão de uma espécie química em diferentes geometrias de stent farmacológico, para isto introduzimos a equação de Navier-Stokes em sua formulação corrente-vorticidade com a equação de transporte de espécie química como nossas equações de governo. Para resolução foi utilizado a abordagem de Métodos de Elementos Finitos com aplicação do esquema Taylor-Galerkin visando eliminar oscilações espúrias. Foi utilizado elemento triangular linear, permitido, devido a não existir acoplamento entre velocidade e pressão na formulação corrente-vorticidade, sendo assim, facilitando a implementação do código numérico.

O código numérico utilizado neste trabalho apresentou resultados satisfatórios comparados com a solução analítica do escoamento de poiseuille e ao trabalho de (MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009) para Reynolds com valor igual a 100. Desta forma foi feita a validação do código numérico para problemas convectivos-difusivos bidimensionais em coordenadas cartesianas e submetido à condição de contorno de Dirichlet.

Para o cumprimento do objetivo desse trabalho foi apresentada a simulação de dez geometrias modeladas como bidimensionais e em coordenadas cartesianas. Apresentamos a evolução do campo de concentração para as dez geometrias e podemos observar fatores interessantes como a baixa difusão encontrada na geometria dois e o acúmulo de concentração em algumas geometrias que apresentavam partes que podem ser consideradas como obstáculos ao escoamento com vãos entre os obstáculos como as geometrias 3, 4, 7 e 8. Estes acontecimentos podem ser explicados devido ao perfil de velocidade u e v encontrados nas geometrias.

Devemos levar em consideração ao funcionamento dos fármacos, segundo (NAKAGAWA; IKENO, 2012) os fármacos geralmente utilizados nos stents apresentam rápida infiltração celular. Sendo assim a espécie química visa infiltrar-se na parede da artéria, mais precisamente na placa de ateroma. Tendo em vista isto, podemos considerar que a geometria que implica em menor difusão do medicamento no sangue irá proporcionar melhor contato entre o fármaco e placa. Entretanto, com a maior difusão no sangue irá permitir que o fármaco possa atuar em outras placas de ateroma pelo corpo, sendo assim geometrias que permitem maior difusão poderiam ser consideradas como melhores. Esta análise se configura em um estudo diferente e portanto não foi tratada neste trabalho.

O esquema Taylor-Galerkin é conhecido por ser condicionalmente estável, ou seja,

é necessário uma imputação correta da relação entre tamanho da malha e valor de Δt , para isto existem alguns métodos que calculam valores para a estabilização do resultado, como o método de Von-Neumann (WESSELING, 1996). Devido a complexa implementação deste método e a limitação computacional disponível, foi escolhido fazer diferentes testes de valores de Δt , para a malha utilizada, até encontrado um resultado satisfatório e estável. As simulações das geometrias um e quatro foram limitadas a resolução de quatro segundos devido a limitação computacional para processamento de intervalos de tempo pequenos.

Para trabalhos futuros, destaca-se os seguintes desenvolvimentos:

- Utilização de outros esquema para substituir o esquema Taylor-Galerkin para a redução das oscilações espúrias, como por exemplo o método SUPG (streamline upwind Petrov-Galerkin).
- Modelar o escoamento sanguíneo como um problema multifásico
- Estudar o impacto do número de Schmidt no escoamento.
- Utilização das variáveis primitivas na equação Navier-Stokes numa abordagem 3D

Referências

ANJOS, G. R. Hydrodynamics field solution of electrochemical cells through finite element method. **Metallurgical and Materials Engineering**, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 41.

BABUŠKA, I. Error-bounds for finite element method. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 16, n. 4, p. 322–333, 1971. Citado na página 42.

BOZSAK, F.; CHOMAZ, J.-M.; BARAKAT, A. I. Modeling the transport of drugs eluted from stents: physical phenomena driving drug distribution in the arterial wall. **Biomechanics and modeling in mechanobiology**, Springer, v. 13, n. 2, p. 327–347, 2014. Citado na página 5.

BRENNER, S. C.; SCOTT, L. R. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods**. [S.l.]: Springer, 1994. v. 1. Citado na página 29.

Brezzi, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. **Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique**, v. 8, n. 2, p. 129–151, 1974. Citado na página 42.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982. Citado na página 7.

CARREL, A. Results of the permanent intubation of the thoracic aorta. **Transactions of the American Surgical Association**, American Surgical Association., v. 30, p. 308, 1912. Citado na página 4.

CHRISTIE, I. et al. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 10, n. 6, p. 1389–1396, 1976. Citado na página 7.

CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. In: **Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960**. [S.l.: s.n.], 1960. Citado na página 6.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 49, p. 1–23, 1943. Citado na página 6.

CRAGG, A. et al. Nonsurgical placement of arterial endoprotheses: a new technique using nitinol wire. **Radiology**, v. 147, n. 1, p. 261–263, 1983. Citado na página 4.

DONEA, J. A Taylor–galerkin method for convective transport problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 20, n. 1, p. 101–119, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 2, 8 e 24.

DOTTER, C. T. Transluminally-placed coilspring endarterial tube grafts: long-term patency in canine popliteal artery. **Investigative radiology**, LWW, v. 4, n. 5, p. 329–332, 1969. Citado na página 4.

FINLAYSON, B. A. **The Method Weighted Residuals and Variational Principles**. [S.l.]: Elsevier, 1972. v. 1. Citado na página 30.

FISCHMAN, D. L. et al. A randomized comparison of coronary-stent placement and balloon angioplasty in the treatment of coronary artery disease. **New England Journal of Medicine**, Mass Medical Soc, v. 331, n. 8, p. 496–501, 1994. Citado na página 4.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introduction to Fluid Mechanics**. [S.l.]: LTC, 2004. v. 1. Citado na página 19.

GUEDES, C. **Podemos reduzir o tempo de Terapia Antiplaquetária Dupla após implante de stents farmacológicos?** 2017. Disponível em <<https://cardiopapers.com.br/podemos-reduzir-o-tempo-de-terapia-antiplaquetaria-dupla-tad-apos-implante-de-stents-farmacologicos/>>. Citado na página 81.

HEINRICH, J. et al. An ‘upwind’ finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. **IJNME**, v. 11, n. 1, p. 131–143, 1977. Citado na página 7.

HWANG, C.-W.; WU, D.; EDELMAN, E. R. Physiological transport forces govern drug distribution for stent-based delivery. **Circulation**, Am Heart Assoc, v. 104, n. 5, p. 600–605, 2001. Citado na página 5.

JIN, K. H. et al. Piezoelectric layer embedded-microdiaphragm sensors for the determination of blood viscosity and density. **Applied Physics Letters**, v. 105, n. 25, p. 153504, 2014. Citado na página 62.

KESSLER, W. et al. Assessment of coronary blood flow in humans using phase difference mr imaging. comparison with intracoronary doppler flow measurement. **International journal of cardiac imaging**, v. 14, n. 3, p. 179–86, 1998. Citado na página 62.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. **Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2012. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 24, 50 e 51.

LÖHNER, R.; MORGAN, K.; ZIENKIEWICZ, O. C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, Wiley Online Library, v. 4, n. 11, p. 1043–1063, 1984. Citado na página 8.

- Mangiavacchi, N. et al. Transport through polymer layer and porous arterial wall with binding in drug-eluting stents using the fem. In: **Proceedings of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering**. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 5.
- MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 31, n. 3, p. 186–198, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 2, 57, 60 e 96.
- MARQUES, L. **Simulação Numérica em Elementos Finitos do Escoamento em Artéria Coronária**. 2018. Monografia (Bacharel em Engenharia Mecânica), UERJ (Universidade do Estado do Rio de Janeiro), Rio de Janeiro, Brazil. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 42 e 52.
- MELDAU, D. **Stent Cardíaco**. 2009. Disponível em <<https://www.infoescola.com/medicina/stent-cardiaco/>>. Citado na página 6.
- MIGLIARO, G. **Fratura do stent: Um achado mais frequente do que o que se supõe**. 2016. Disponível em <<https://solaci.org/pt/2016/06/28/fratura-do-stent-um-achado-mais-frequente-do-que-o-que-se-supoe/>>. Citado na página 81.
- NAKAGAWA, K.; IKENO, F. O sirolimus é um fármaco conhecido para o stent farmacológico, mas é um novo fármaco para o balão farmacológico. **Revista Brasileira de Cardiologia Invasiva**, SciELO Brasil, v. 20, n. 2, p. 123–124, 2012. Citado na página 96.
- NARDINO, M.; ARNDT, M. Abordagem sobre o uso do mef em análises de estruturas de aço com ligações semirrígidas. In: **I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia**. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 7.
- PALMAZ, J. C. et al. Expandable intraluminal graft: a preliminary study. work in progress. **Radiology**, v. 156, n. 1, p. 73–77, 1985. Citado na página 4.
- PIRONNEAU, O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the navier-stokes equations. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 38, n. 3, p. 309–332, 1982. Citado na página 7.
- PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. N. “fenômenos de transferência com aplicações as ciências físicas e a engenharia”. **Apostila do Curso-UFRJ**, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 9, 11, 22 e 57.
- SIGWART, U. et al. Intravascular stents to prevent occlusion and re-stenosis after transluminal angioplasty. **New England Journal of Medicine**, Mass Medical Soc, v. 316, n. 12, p. 701–706, 1987. Citado na página 4.
- SOUSA, J. E. et al. Lack of neointimal proliferation after implantation of sirolimus-coated stents in human coronary arteries: a quantitative coronary angiography and three-dimensional intravascular ultrasound study. **Circulation**, Am Heart Assoc, v. 103, n. 2, p. 192–195, 2001. Citado na página 5.

WESSELING, P. Von neumann stability conditions for the convection-diffusion equation. **IMA journal of Numerical Analysis**, Oxford University Press, v. 16, n. 4, p. 583–598, 1996. Citado na página 97.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. **The Finite Element Method, volume 3: Fluid Dynamics**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 24.