

# Simulação Numérica das Equações de Saint-Venant Utilizando o Método dos Elementos Finitos

## Gustavo Rabello dos Anjos

UFRJ - Programa/Depto. de Eng. Metalrgica e de Materiais PEMM-DMM/COPPE/UFRJ  
Caixa Postal 68505 Rio de Janeiro, RJ - CEP 21941972 - Brasil  
gustavo\_rabello@metalmat.ufrj.br

## Norberto Mangiavacchi

UERJ - Depto. de Engenharia Mecânica/GESAR  
Rua Fonseca Teles, 121 - Rio de Janeiro, RJ - CEP 20940903 - Brasil  
norberto@uerj.br

## José Pontes

UFRJ - Programa/Depto. de Eng. Metalrgica e de Materiais PEMM-DMM/COPPE/UFRJ  
Caixa Postal 68505 Rio de Janeiro, RJ - CEP 21941972 - Brasil  
jopontes@metalmat.ufrj.br

## Cássio Botelho Pereira Soares

Furnas Centrais Elétricas S.A. - Depto de Engenharia Ambiental  
Rua Real Grandeza, 219 - Rio de Janeiro, RJ - CEP22283400 - Brasil  
cassiobp@furnas.com.br

**Resumo.** Um modelo numérico é proposto para a solução das equações de Saint-Venant. O Método dos Elementos Finitos é utilizado para a discretização do problema e o paradigma da orientação a objetos, para elaboração do código numérico. A discretização espacial dos termos difusivos e da pressão é feita pelo método de Galerkin. Utiliza-se, para discretização da derivada substancial, uma abordagem semi-Lagrangeana através de um esquema implícito por diferenças regressivas de primeira ordem. O sistema linear é decomposto em blocos LU através do método da projeção discreto e resolvido por método iterativo.

**Palavras chave:** equações de Saint-Venant, método de elementos finitos, método semi-Lagrangeano, método da projeção, programação orientada a objetos

## 1 Introdução

Muitos são os casos na engenharia onde a simulação de escoamentos de fluidos se torna necessária. A modelagem tridimensional é a forma mais direta e a que mais se assemelha à realidade. Porém, frequentemente uma abordagem simples e eficiente é preferível evitando-se os altos custos computacionais de uma simulação 3D. É neste contexto que se inserem as equações de Saint-Venant (de Saint-Venant, 1871). Essas equações são um caso particular das equações de águas rasas. Elas descrevem propriedades de escoamentos tridimensionais integrando verticalmente as equações bidimensionais. São usadas comumente no estudo da hidrodinâmica de rios e regiões costeiras e podem ser deduzidas diretamente das equações de Navier-Stokes (Gerbeau and Perthame, 2001). A topografia do fundo introduz um termo de fonte, influenciando as variáveis do problema. O problema principal encontrado na resolução

numéricas das equações de Saint-Venant refere-se à aproximação de tal termo, que deve ser feita de modo a assegurar a manutenção, pelo esquema numérico discreto, das características encontradas no problema físico.

A modelagem clássica do problema utiliza esquemas de volumes finitos (Godlewski and Raviart, 1996, Eymard et al., , Perthame, 2001) porém, uma abordagem através do método de elementos finitos apresenta bons resultados com convergência para o estado estacionário (ver Arvanitis et al., 2001).

Neste trabalho um modelo numérico é proposto para a solução das equações de Saint-Venant. O Método dos Elementos Finitos é utilizado para a discretização do problema, sendo caracterizado por 4 técnicas: *método de Galerkin*, *método semi-Lagrangeano*, *discretização do tempo por diferenças regressivas de primeira ordem* e *método da projeção para solução do sistema linear*. O método de Galerkin foi utilizado para discretização espacial dos termos difusivos, da pressão e de forçagem. A utilização do método Semi-Lagrangeano consiste na discretização da derivada substancial ( $D\mathbf{u}/Dt$ ). É nessa derivada que se encontra o termo convectivo, responsável pela não linearidade do problema. Para a discretização do tempo foi utilizada uma técnica de diferenças regressivas de primeira ordem. Depois de passar por todas essas etapas recai-se em um problema de resolução de um sistema linear do tipo  $Ax = b$ . Utilizar métodos diretos para resolução desse sistema pode parecer a opção mais fácil, porém, o uso de alguns algoritmos agilizam o processamento da solução. O método da projeção discreto é utilizado para dividir a matriz original em dois fatores do tipo  $LU$  em blocos obtendo assim um sistema com custo computacional menor devido ao desacoplamento entre velocidade e pressão. O código numérico é implementado usando os paradigmas da orientação a objetos permitindo fácil manutenção e desenvolvimentos futuros.

## 2 Equações Governantes

As equações governantes do campo hidrodinâmico em sua forma adimensional utilizadas na formulação do método de elementos finitos podem ser escritas como:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -g\nabla\zeta + \frac{1}{H Re}[\nu\nabla(H\tau) + \nabla(H\tau)^T] + \frac{1}{\rho_0 H}(\tau_x^S - \tau_x^B) - 2\Phi sen(\theta\mathbf{v}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

As equações (1) e (2) são conhecidas como equações de *Saint-Venant*. Essas equações são responsáveis pela descrição do movimento de um fluido em duas dimensões com a pressão calculada hidrostaticamente ao longo da coordenada vertical  $z$ , esse procedimento é representado pelo termo  $[-g\nabla\zeta]$ . As componentes  $u$  e  $v$  representam velocidades médias na direção horizontal e vertical respectivamente.

O termo  $[2\Phi sen(\theta v)]$  representa a força de Coriolis devido ao fato do referencial estar se movimentando na superfície da Terra,  $[(1/\rho_0 H)\tau_x^S]$  representa a tensão do vento na superfície livre por unidade de massa. Se o vento estiver na mesma direção do escoamento, esse termo irá acelerar o escoamento; se for oposto, irá retardá-lo,  $[(1/\rho_0 H)\tau_x^B]$  representa a tensão de atrito no fundo atuante no escoamento por unidade de massa. Conforme indicado pelo sinal negativo, esse termo sempre tende a desacelerar o escoamento, tendo sempre sentido oposto e  $[\nu_t]$  representa a viscosidade turbulenta.

### 3 Método dos Elementos Finitos

#### 3.1 Formulação Variacional

Considere as equações de Saint-Venant para escoamentos incompressíveis dadas em sua forma adimensional representadas pelas equações (1) e (2), válidas em um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  sujeitas às condições de contorno

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\Gamma \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_t = 0 \quad \text{e } \sigma^{nn} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (4)$$

Considere o subespaço:

$$\mathbb{V} = H^1(\Omega)^m = \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m) : v_i \in H^1(\Omega), \forall i = 1, \dots, m\} \quad (5)$$

onde  $H^1(\Omega)$  é o espaço de *Sobolev* dado por:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, m \right\} \quad (6)$$

sendo  $L^2(\Omega)$  um espaço de dimensão infinita definido por

$$L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} v^2 d\Omega < \infty \right\} \quad (7)$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\mathbf{v}_\Gamma} &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{V} : \mathbf{v} = \mathbf{v}_\Gamma \text{ em } \Gamma_1\} \\ \mathbb{P}_{p_\Gamma} &= \{q \in L^2(\Omega) : q = p_\Gamma \text{ em } \Gamma_2\} \end{aligned} \quad (8)$$

a formulação variacional do problema consiste em encontrar soluções  $\mathbf{v}(x, t) \in \mathbb{V}_{\mathbf{v}_\Gamma}$  e  $p(x, t) \in \mathbb{P}_0$  tais que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{w} d\Omega - \frac{g}{\rho} \int_{\Omega} \zeta \nabla \cdot \mathbf{w} d\Omega + \frac{1}{H Re} \int_{\Omega} \nu [\nabla(H\mathbf{v}) + \nabla(H\mathbf{v})^T] : \mathbf{w} d\Omega \\ - \frac{1}{\rho_0 H} \int_{\Omega} (\tau^S - \tau^B) \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} 2\Phi_{sen}(\theta\mathbf{v}) \mathbf{w} d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] H q d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

#### 3.2 Método de Galerkin semi-discreto

Após a formulação variacional das equações de governo, parte-se para aproximação pelo método de Galerkin. Considere as equações de governo em sua forma adimensional e variacional (9).

Considere  $NV$  o número de pontos de velocidade,  $NP$  o número de pontos de pressão e  $NE$  o número de elementos na malha de elementos finitos que discretiza o domínio  $\Omega$ . O método de *Galerkin* consiste em fazer as seguintes substituições em (9):

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NV} N_n(\mathbf{x})u_n(t) \quad (10)$$

$$v(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NV} N_n(\mathbf{x})v_n(t) \quad (11)$$

$$p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{n=1}^{NP} P_n(\mathbf{x})p_r(t) , \quad (12)$$

que são aproximações semi-contínuas, isto é, contínuas no tempo ( $t$ ) e discretas no espaço ( $x$ ). Aqui,  $N_n(x)$  representam as funções de interpolação utilizadas para a velocidade e  $P_n(x)$  as funções de interpolação para a pressão. Considere ainda que as propriedades  $\rho$  e  $\nu$  são constantes em cada elemento.

A equação de conservação de quantidade de movimento é normalmente avaliada em todos os nós livres de velocidade, e portanto, as funções peso  $w_x$  e  $w_y$  são substituídas por funções de interpolação  $N_m = N_m(x)$ ,  $m = 1, \dots, NV$ . Aplicando este procedimento nas equações (9), chega-se a:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \frac{Du_n}{Dt} N_m N_n d\Omega + g \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_r \frac{\partial N_m}{\partial x} P_r \zeta_r d\Omega \\ & - \frac{1}{H Re} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \nu^e \left( \frac{\partial N_m}{\partial x} u_n \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} u_n + \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial x} u_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial x} v_n \right) d\Omega \\ & - \frac{1}{\rho_0 H} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \left[ N_m \tau_x^B - N_m \tau_x^S \right] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n 2\Phi \text{sen}(\theta v) N_m d\Omega = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \frac{Dv_n}{Dt} N_m N_n d\Omega + g \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_r \frac{\partial N_m}{\partial x} P_r \zeta_r d\Omega \\ & - \frac{1}{H Re} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \nu^e \left( \frac{\partial N_m}{\partial x} v_n \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n + \frac{\partial N_m}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n + \frac{\partial N_m}{\partial y} \frac{\partial N_n}{\partial y} v_n \right) d\Omega \\ & - \frac{1}{\rho_0 H} \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \left[ N_m \tau_y^B - N_m \tau_y^S \right] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n 2\Phi \text{sen}(\theta u) N_m d\Omega = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

A equação da continuidade (2), é avaliada nos nós livres de pressão e, portanto, a função peso  $q$  é aproximada pelas funções de interpolação associadas à pressão  $P_r(x)$ , resultando

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sum_n \left( \frac{\partial N_n}{\partial x} H_n u_n + \frac{\partial N_n}{\partial y} H_n v_n \right) P_r d\Omega = 0 . \quad (15)$$

para  $r = 1, \dots, NP$ . Restringindo as funções de interpolação a cada elemento  $e$ , conclui-se

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \sum_{j,k \in e} \left( \frac{\partial N_j^e}{\partial x} H_j u_j + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} H_j v_j \right) P_k^e d\Omega = 0 . \quad (16)$$

As equações (13), (14) e (16) podem ser representadas na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$(M_x + M_{\tau_x})\dot{u} + \frac{1}{H Re} \{ (2K_{xx} + K_{yy})u + K_{xy}v \} - gG_x \zeta = 0 \quad (17)$$

$$(M_y + M_{\tau_y})\dot{v} + \frac{1}{H Re} \{ K_{yx}u + (K_{xx} + 2K_{yy})v \} - gG_y \zeta = 0 \quad (18)$$

$$D_x u + D_y v = 0 \quad (19)$$

onde  $\dot{u}$  e  $\dot{v}$  representam a derivada substancial, sendo definidas por  $\dot{u} = [\frac{Du_1}{Dt}, \dots, \frac{Du_{NV}}{Dt}]^T$ ,  $\dot{v} = [\frac{Dv_1}{Dt}, \dots, \frac{Dv_{NV}}{Dt}]^T$ ,  $u = [u_1, \dots, u_{NV}]^T$ ,  $v = [v_1, \dots, v_{NV}]^T$ ,  $\zeta = [\zeta_1, \dots, \zeta_{NP}]^T$ ,  $g_x = [g_1^x, \dots, g_{NV}^x]^T$ ,  $g_y = [g_1^y, \dots, g_{NV}^y]^T$ , , são os vetores dos valores nodais para as variáveis de velocidade e pressão.

As dimensões das matrizes que aparecem no sistema (19) são  $NV \times NP$  para  $G_x$  e  $G_y$ ,  $NP \times NV$  para  $D_x$  e  $D_y$  e  $NV \times NV$  para todas as outras.

### 3.3 Método semi-Lagrangeano

O método *semi-Lagrangeano* foi primeiramente utilizado em sistemas convecção-difusão com o objetivo de se obter duas características: *passo de tempo grande* e *estabilidade*. Além disso, discretizações em ordens elevadas levam a erros de dispersão mínimos. A aproximação semi-Lagrangeana tem sido utilizada em meteorologia para previsões numéricas das condições climáticas, onde o uso de grandes passos de tempo é essencial para eficiência. Nas equações de Saint-Venant e Navier-Stokes, entretanto, seu uso não é tão freqüente, porém, trabalhos recentes vêm demonstrando sua elevada eficiência, principalmente quando o escoamento é caracterizado por alto número de Reynolds.

Esse método foi introduzido no início dos anos 80 por Robert, 1981 e Pironneau, 1982 e a idéia básica procedia na discretização da solução da derivada Lagrangeana no tempo ao invés da derivada Euleriana. Como exemplo, pode-se citar um esquema semi-Lagrangeano de uma equação do tipo convecção-difusão qualquer. Para isso trataremos, ilustrativamente, apenas o termo responsável pela convecção, desprezando o termo difusivo. Seguindo o método semi-Lagrangeano, discretiza-se a equação mencionada no tempo no ponto  $x_i$  utilizando um esquema de primeira ordem implícito

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t} \quad (20)$$

onde  $c_d^n = c^n(x_d, t^n)$  e  $x_d$  é chamado de ponto de saída.

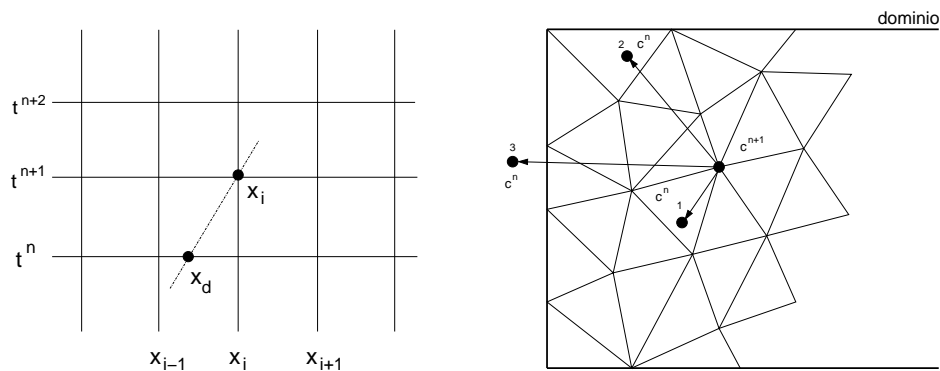


Figura 1: método semi-lagrangeano

Na forma forte a derivada substancial é calculada ao longo do trajeto característico, determinando-se o ponto  $x_d$  e resolvendo a equação  $Dx/Dt = a$  para trás no tempo  $t^{n+1} \geq t \geq t^n$  usando a condição inicial  $x(t^{n+1}) = x_i$ . Este esquema é mostrado na figura (1a). Um método de integração deve ser utilizado para se encontrar a posição do ponto do passo anterior na malha. Utilizando-se um esquema de discretização de primeira ordem, a trajetória é aproximada por uma reta. Dependendo da trajetória, três situações podem ocorrer, a primeira e a segunda são mostradas na figura (1b) pelos pontos 1 e 2, e a terceira, pelo ponto 3. Na trajetória 1, o ponto do passo anterior  $c^n$  se encontra próximo ao ponto do passo atual  $c^{n+1}$  e dentro do domínio do problema. Depois de identificado o elemento que contém o ponto 1, uma interpolação entre os

nós do elemento é necessária para se conhecer seu valor. No caso do ponto 2, o ponto do passo anterior  $c^n$  se encontra distante do ponto do passo atual  $c^{n+1}$  e dentro do domínio do problema. A diferença entre o ponto 1 e o ponto 2 está no comprimento das trajetórias. No ponto 2, a trajetória também será aproximada por reta o que pode gerar algum erro de aproximação, pois com pouca informação (tempos inicial e final) não se sabe a real trajetória do ponto. No caso do ponto 3, o valor de origem é calculado utilizando as condições de contorno. Após a discretização pelo método semi-Lagrangeano, as equações de governo tomam a forma de:

$$(M_x + M_{\tau_x})\left(\frac{u_i^{n+1} - u_d^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{H Re}\{(2K_{xx} + K_{yy})u^{n+1} + K_{xy}v^{n+1}\} - gG_x\zeta^{n+1} = 0 \quad (21)$$

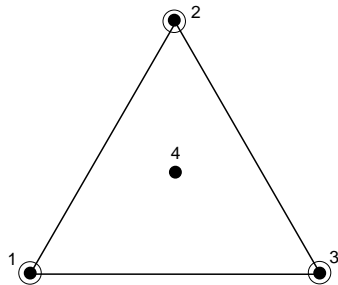
$$(M_y + M_{\tau_y})\left(\frac{v_i^{n+1} - v_d^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{H Re}\{K_{yx}u^{n+1} + (K_{xx} + 2K_{yy})v^{n+1}\} - gG_y\zeta^{n+1} = 0 \quad (22)$$

$$D_x u^{n+1} + D_y v^{n+1} = 0 \quad (23)$$

### 3.4 Elementos de Malha

A escolha do tipo de elementos em equações onde o acoplamento de variáveis existe, como no caso das equações de Saint-Venant, é restrito. Na literatura, essa restrição recebe o nome de condição de *Babuska-Brezzi*. Essa é uma condição de estabilidade referente ao modo de discretização do problema, portanto, a escolha de elementos adequados é fundamental para manter essa condição satisfeita. Muitos autores mencionam e detalham essa condição específica. Para se saber mais, recomendam-se: Cuvelier et al., 1986, Zienkiewicz and Taylor, 2000 e Oden and Carey, 1984. Há na literatura casos onde se encontra a solução do problema sem mesmo a condição de *Babuska-Brezzi* ser satisfeita, mas para tais elementos o método de *Galerkin* não pode ser utilizado. Métodos de penalidades também podem ser usados para contornar essa restrição, porém não é assunto deste trabalho o uso desta prática.

**Elemento triangular cúbico:** Este elemento apresenta um grau de liberdade a mais para velocidade localizado no centróide do triângulo. A função de interpolação recebe o nome especial de *função bolha*, pois aparece uma bolha localizada no interior do elemento. A combinação de funções de interpolação linear para pressão e de funções de interpolação cúbicas para a velocidade forma o que é conhecido na literatura por elemento *MINI*. Sendo um elemento cúbico, seu polinômio de interpolação é de grau 3. As velocidades das equações de *Saint-Venant* foram calculadas utilizando esse elemento.



● pontos de velocidade

○ pontos de pressão

$$N_i = L_1 - 9L_1L_2L_3, \quad i = 1, 2, 3$$

$$N_4 = 27L_1L_2L_3$$

### 3.5 Método da Projeção Discreto

O método da projeção discreto baseado em decomposição *LU* é obtido através de fatoração em blocos do sistema linear resultante. Isto sugere que a separação (ou *split*) entre velocidade e pressão é feita depois da discretização no espaço e no tempo das equações de governo. Considere as equações discretizadas no tempo e no espaço como se segue:

$$(M + M_\tau)\left(\frac{u^{n+1} - u_d^n}{\Delta t}\right) + \frac{1}{H Re}Ku^{n+1} - gG\zeta^{n+1} = 0$$

$$Du^{n+1} = 0 \quad (24)$$

a última equação de (24) pode ser resolvida separadamente, no entanto, as equações restantes formam um sistema de equações que pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} B & -\Delta t g G \\ D & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ \zeta^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bc_1 \\ bc_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde agora o sistema é escrito apenas para as incógnitas do problema, ou seja,  $u^{n+1} = [u_1^{n+1}, \dots, u_{Nu}^{n+1}, v_1^{n+1}, \dots, v_{Nv}^{n+1}]^T$ ,  $p^{n+1} = [p_1^{n+1}, \dots, p_{Np}^{n+1}]^T$ , sendo  $Nu$ ,  $Nv$  e  $Np$  o número de incógnitas (nós livres) para velocidade na direção  $x$ , velocidade na direção  $y$  e pressão respectivamente. A notação para as matrizes e vetores foi mantida a mesma por simplicidade. A matriz  $B$  é dada por

$$B = M + \frac{\Delta t}{Re}K \quad (26)$$

e o lado direito representa as grandezas conhecidas no tempo  $n$ ,

$$r^n = -\Delta t(Au_d^n) + Mu^n, \quad (27)$$

mais as condições de contorno que nada mais são do que as contribuições dos valores conhecidos de velocidade e pressão no lado direito do sistema.

O método da projeção baseado em fatoração LU visa decompor a matriz do sistema (25) através de uma fatoração por blocos. Em Lee et al., 2001 são apresentadas várias formas de se fatorar esta matriz, cada forma dando origem a uma família de métodos diferentes. Utilizando uma fatoração canônica  $LU$  por blocos, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ D & \Delta t DB^{-1}gG \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & -\Delta t B^{-1}gG \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{n+1} \\ \zeta^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bc_1 \\ bc_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

O sistema apresentado em (28), se resolvido, dá origem ao método de *Uzawa* (Chang et al., 2002). Porém sua solução é cara computacionalmente devido à inversão da matriz  $B$  a cada iteração. Duas técnicas foram utilizadas neste trabalho, todas utilizando um processo de aproximação chamado *lumping*. Na primeira técnica, a matriz  $B^{-1}$  foi aproximada por uma matriz de massa diagonal  $M_L^{-1}$ , neste caso algumas oscilações foram encontradas nos campos de velocidade para número de  $Re$  baixo. Portanto, uma outra solução resolveu esse problema, em vez de aproximar a matriz de massa, a diagonalização foi feita em  $B$ . Para este caso a solução não apresenta problemas para nenhum valor de  $Re$ . A matriz diagonalizada envolve uma aproximação conhecida na literatura por *lumping*. Esta técnica consiste em somar todos os elementos de linha e localizá-los na diagonal principal da matriz. O mesmo procedimento pode ser feito em elementos de coluna já que a matriz  $B$  é simétrica. Note que a utilização desta técnica se faz necessária pois a inversão de matrizes não-diagonais gera custos computacionais elevados. No métodos dos elementos finitos, a técnica de *Lumping* tem sua principal utilização na matriz de massa, pois ao final do procedimento, a massa total do elemento se mantém conservada.

### 3.6 Orientação a Objetos

O paradigma da orientação a objetos é empregado para a elaboração do código numérico. As vantagens deste tipo de programação comparadas à programação estrutural (convencional) são: facilidade de manutenção, modularidade, implementação de classes e objetos, abstração de dados, etc. A figura (2) representa o diagrama de classes simplificado em UML (Unified Modeling Language) do código desenvolvido neste trabalho.

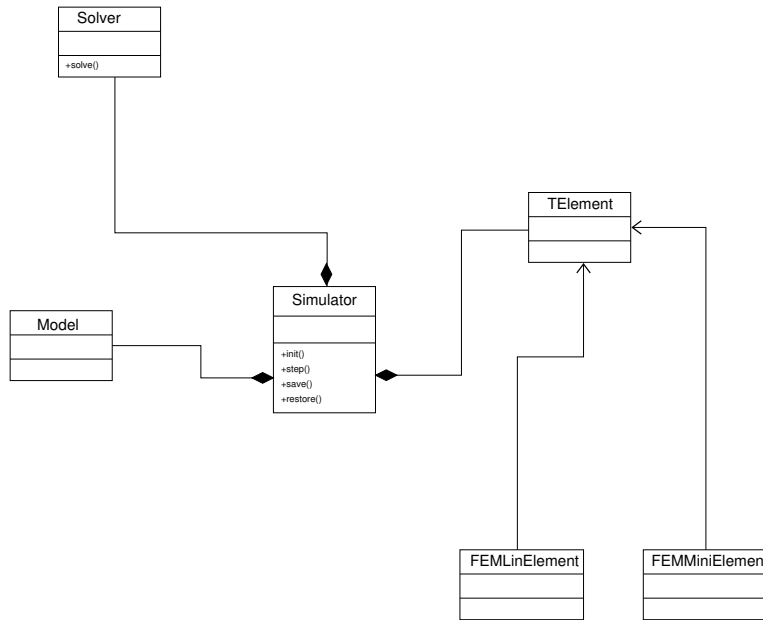


Figura 2: diagrama de classes

Na classe *Model* encontram-se as condições de contorno, a discretização do domínio e a geometria do problema. Em *FEMMiniElement* e *FEMLinElement* encontram-se as informações sobre os elementos utilizados e suas respectivas matrizes, tais como: matriz de rigidez, matriz de massa e matriz dos operadores gradiente e divergente. A classe *TElement* está preparada para capturar as informações das classe *FEMMiniElement* e *FEMLinElement* ou de uma outra classe com tipo de elemento diferente. A classe *Simulator* é responsável pela montagem das matrizes (*Assemble*), aplicação das condições de contorno e preparação do sistema linear a ser resolvido. Logo, este sistema é encaminhado para a classe *Solver* onde a solução do problema é processada utilizando métodos iterativos.

## 4 Resultados

O método foi validado para o caso de escoamento plano de Poiseuille estacionário, produzindo valores nodais virtualmente exatos. O problema do degrau, ou em inglês, *backward-step* foi utilizado para ilustrar as características do método desenvolvido. As condições de contorno e geometrias são apresentadas na figura (3).

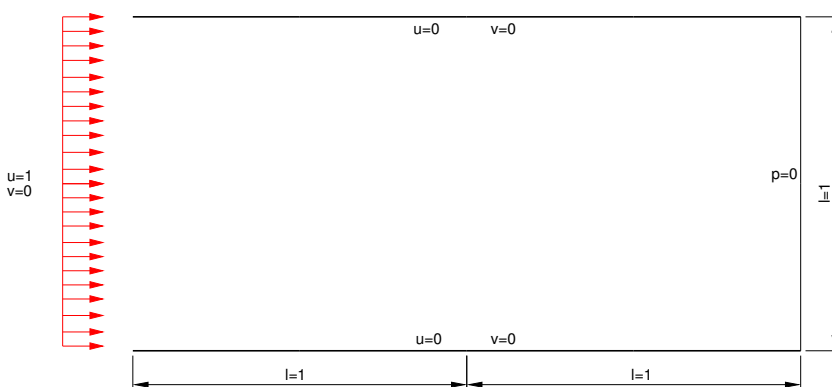


Figura 3: condições de contorno para o problema proposto

Para os resultados mostrados nas figuras (4) e (5) foi considerado o caso onde a força de Coriolis  $[2\Phi \text{sen}(\theta \mathbf{v})]$  e a tensão na superfície  $[\tau^S]$  são nulas e a tensão no fundo  $[\tau^B]$  é igual a 1. Foram retirados de duas situações caracterizadas em seqüência. A primeira imagem de cada linha representa uma condição logo após a condição inicial (2 iterações). A segunda figura de



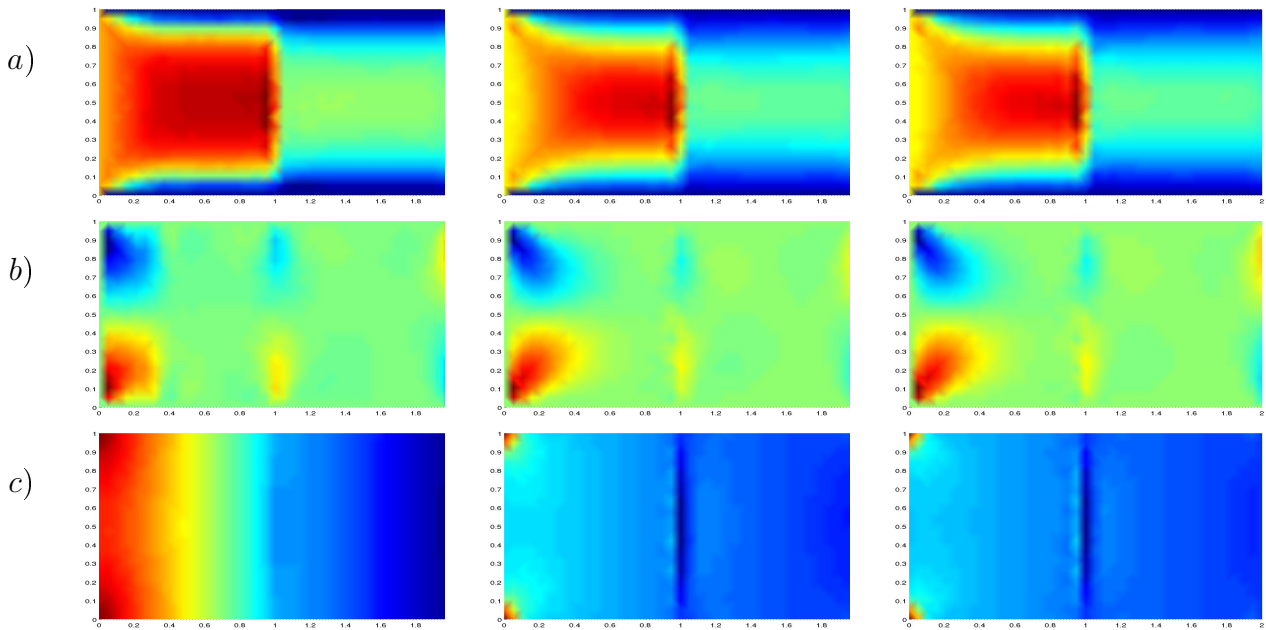


Figura 4: Simulação de  $Re = 10$ . Evolução das componentes  $u$  (a) e  $v$  (b) da velocidade e da pressão (c)

cada linha representa um estágio intermediário, de aproximadamente 35 iterações. A terceira figura representa um estado próximo ao estacionário (aproximadamente 300 iterações). A seguir são mostrados os casos  $Re = 10$  (figura 4) e  $Re = 10000$  (figura 5), usando malha triangular com aproximadamente 3200 vértices.

Os resultados mostram que o método é estável, mesmo para passos de integração no tempo longos ( $CFL = \Delta t U / \Delta x \approx 5$ ), e não apresenta oscilações mesmo para valores de  $Re$  elevados.

A validação do código baseou-se na representação do modelo sem variação vertical, podendo assim ser comparada a um escoamento típico descrito pelas equações de Navier-Stokes e encontrada freqüentemente na literatura específica.

As imagens da figura (5) apresentam um modelo perturbado de malha retangular representando o escoamento de um delta de rio genérico. Note que para ambas distribuições do campo hidrodinâmico, a função que descreve a variação de profundidade é do tipo degrau, do início até a metade do domínio o terreno é plano com pouca profundidade, em seguida até o final do domínio o terreno é fundo. A transição abrupta desses dois terrenos caracteriza o degrau. Para terreno com pouca profundidade os efeitos de velocidade são mais pronunciados e para terrenos profundos, a velocidade tende a zero, como pode-se observar nas figuras.

O efeito da variação do  $Re$  pode ser apreciado na redução da espessura da camada limite hidrodinâmica e no crescimento da região de recirculação a jusante do degrau com o aumento do  $Re$ .

Em particular, pode-se observar que para  $Re = 10000$  a propagação da quantidade de movimento é muito bem definida, mostrando que o método numérico apresenta baixa difusão artificial e estabilidade.

## 5 Conclusão

O método dos elementos finitos proposto nesse trabalho, baseado no método de Galerkin e na formulação semi-Lagrangeana, se mostrou estável para todos os valores de  $CFL$  e  $Re$  analisados. Os resultados não apresentaram oscilações espúrias e nem difusão numérica excessiva

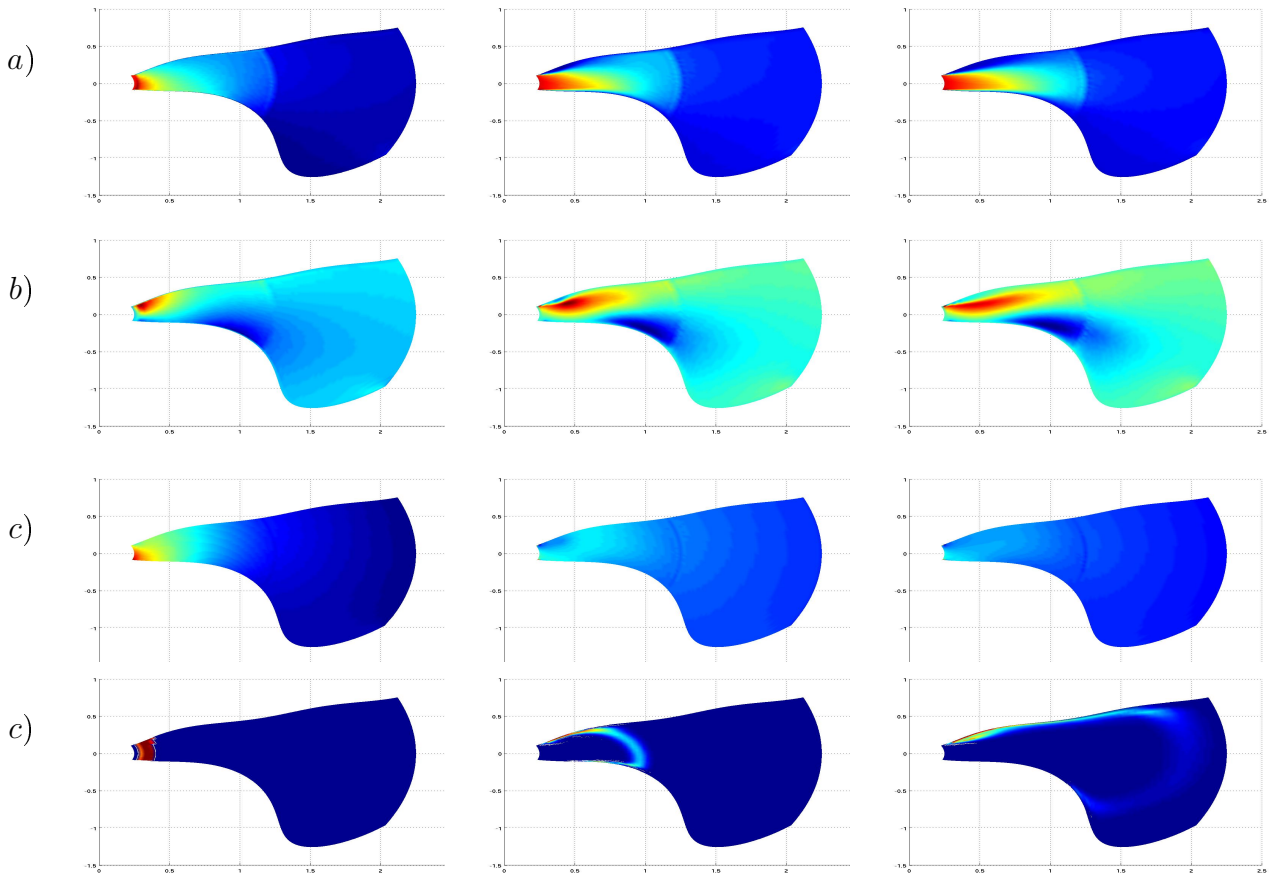


Figura 5: Simulação de  $Re = 10000$ . Evolução das componentes  $u$  (a) e  $v$  (b) da velocidade, da pressão (c) e de transporte de escalar passivo (d).

nas simulações para altos valores de  $Re$ . Essas características estão associadas à escolha da formulação semi-Lagrangeana em combinação com o elemento *MINI* para a discretização das equações de *Saint-Venant*.

O método de projeção discreto, baseado em fatoração LU, combinado com a técnica de aproximação *Lumped* resultou em um esquema numérico computacionalmente eficiente, permitindo a utilização de métodos de solução de sistemas lineares com matrizes de coeficientes simétricas e positivas definidas como o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador de *Cholesky* incompleto. A utilização do paradigma de orientação a objetos permitiu a implementação de um sistema de simulação de qualidade do ponto de vista de engenharia de *software*, de fácil manutenção e desenvolvimento futuro.

## 6 Agradecimentos

Agradecemos a Furnas Centrais Elétricas S.A., ao CNPQ e a FAPERJ pelo suporte financeiro ao desenvolvimento deste trabalho.

## 7 Referências

Arvanitis, C., Katsaounis, T., and Makridakis, C. (2001). Adaptive finite element relaxation schemes for hyperbolic conservation laws. *Math. Model. Numer. Anal.*, 35:17–33.

- Chang, W., Giraldo, F., and Perot, B. (2002). Analysis of an exact fractional step method. *Journal of Computational Physics*.
- Cuvelier, C., Segal, A., and van Steenhoven, A. A. (1986). *Finite Element Method and Navier-Stokes Equations*. Dordrecht, Holland.
- de Saint-Venant, A. (1871). Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 73:147–154.
- Eymard, R., Gallouet, T., and Herbin, R. *Finite volume methods*.
- Gerbeau, J. and Perthame, B. (2001). Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water, numerical validation. *Discret Contin. Dynam. System*.
- Gerbeau, J.-F. and Perthame, B. (2000). Dérivation du système de Saint-Venant visqueux pour les écoulements laminaires en eaux peu profondes; validation numérique. Rapport de recherche de l'INRIA.
- Godlewski, E. and Raviart, P. (1996). Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. *Applied Mathematical Sciences*, 118.
- Lee, M. J., Oh, B., and Kim, Y. B. (2001). Canonical fractional step methods and consistent boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*.
- Oden, J. T. and Carey, G. (1984). *Finite Elements: Mathematical Aspects*. Englewood Cliffs.
- Perthame, B. (2001). An introduction to kinetic schemes for gas dynamics.
- Pironneau, O. (1982). On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equation. *Numer. Math*, pages 38–309.
- Robert, A. (1981). A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmos. Ocean*, pages 19–35.
- Schlichting, H. (1979). *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill Science.
- Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2000). *The Finite Element Method Volume 1: The Basis*. Wiley John and Sons, 5th edition.

## Numerical Solution of Saint-Venant Equations Using the Finite Element Method

### Gustavo Rabello dos Anjos

UFRJ - Programa/Depto. de Eng. Metalúrgica e de Materiais PEMM-DMM/COPPE/UFRJ  
 Caixa Postal 68505 Rio de Janeiro, RJ - CEP 21941972 - Brasil  
 gustavo\_rabello@metalmat.ufrj.br

### Norberto Mangiavacchi

UERJ - Depto. de Engenharia Mecânica/GESAR  
 Rua Fonseca Teles, 121 - Rio de Janeiro, RJ - CEP 20940903 - Brasil  
 norberto@uerj.br

### José Pontes

UFRJ - Programa/Depto. de Eng. Metalúrgica e de Materiais PEMM-DMM/COPPE/UFRJ  
 Caixa Postal 68505 Rio de Janeiro, RJ - CEP 21941972 - Brasil  
 jopontes@metalmat.ufrj.br

### Cássio Botelho Pereira Soares

Furnas Centrais Elétricas S.A. - Departamento de Engenharia Ambiental  
 Rua Real Grandeza, 219 - Rio de Janeiro, RJ - CEP 22283400 - Brasil  
 cassiobp@furnas.com.br

**Abstract.** *A numerical model is proposed for solving the Saint-Venant equations coupled to the transport equation of a chemical species. The Finite Element Method is employed in the problem discretization and the object-oriented paradigm, in the development of the numerical code. Spatial discretization of the diffusion and pressure terms is made through the Galerkin method and the substantial derivative, through a semi-Lagrangian technique, using a first-order backward Euler implicit scheme. The linear system is decomposed in LU blocks through the discrete projection method and solved by an iterative method.*

**Keywords** *Saint-Venant equations, finite element method, semi-Lagrangian method, projection method, object-oriented programming*